Prova libera n. 10

1. Tra le soluzioni della seguente equazione complessa

$$z^3 = \arg z + \pi/6$$

determinare quella avente modulo minimo

2. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{\cos\sqrt{x}} - \sqrt{\cos x} + \frac{x}{4}e^{-x}}{\left(e^{-x/8} - \frac{\sin\sqrt{x}}{2} - \sqrt{1-\sqrt{x}}\right)\sqrt{x}}$$

3. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{4^n+n} - \sqrt[n]{4^n+3}\right)^{1/n}$$

4. Sia α un parametro reale, si consideri la seguente funzione $f_\alpha : R \to (0,+\infty)$

$$f_\alpha(x) = e^{-2x}(x^2 + \alpha x + 1/2)$$

dire per quali valori di α la funzione f_α risulta invertibile

5. Si determini per quale valore del parametro reale q le curve

$$f(x) = \sqrt{x} + q \qquad g(x) = x^2 - q$$

sono tra loro tangenti

6. Studiare al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$ la seguente successione per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + 2 \\ a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

7. Sia n un numero naturale, si calcoli, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{k} sin(n\theta)\right) sin\theta d\theta$$

8. Calcolare lo sviluppo di Taylor nell'origine fino all'ordine 5(compreso) della funzione

$$(\cos x)^x$$

9. Determinare per quali valore di m reale il seguente integrale

$$\int_1^m \frac{dx}{x\ln^2 x - x}$$

risulta pari ad 1/2

10. Determinare per quali valori del parametro reale a il seguente integrale converge

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{ax^4 + x^2 + 1}dx$$

11. Dire quali tra le seguenti serie converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,(2n)!}{n^n(3n)!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\log n - \frac{2\log^2 n}{\log(1+n^2)}\right) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

12. Determinare per quali $x \in R$ la seguente serie converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{(1+x)^n}$$

13. Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (y^2 - 1)\tan x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

14. Sia $y(x)$ una funzione dispari, determinare la soluzione della seguente equazione differenziale

$$y'''(x) + y'(x) = \int_0^{\pi} y(t)dt$$

che rispetta la condizione $y'(0) = 1$