Prova libera n. 9

1. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x}.$$

2. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y = \sin x \cos x.$$

3. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}.$$

4. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = y^2 x^{-2}, \qquad y(1) = 1.$$

5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = -xy^{-2}, \qquad y(0) = 1.$$

6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y''' - 2y'' + y' = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1.$$

7. Tra i problemi di Cauchy seguenti indicare quelli per cui la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbf{R}$:

$$\begin{cases} y' = y^2 + e^y - 2 \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y^2 + e^y + 2 \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = ye^{-|y|} + 2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

8. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$y' = \max\{x, y\}, \qquad y(0) = -3/2.$$

9. Dato il problema di Cauchy

$$y' = \log(1 - y^2), \qquad y(0) = \alpha \in]-1, 1[$$

stabilire tra le affermazioni seguenti quelle che risultano vere:

1) per ogni $\alpha \in]-1, 1[$ la soluzione massimale è decrescente;
2) per $\alpha = \frac{1}{2}$ la soluzione massimale non è definita su tutta la semiretta $\mathbf{R}^+$;
3) per $\alpha = \frac{1}{2}$ la soluzione massimale è definita su tutta la semiretta $\mathbf{R}^-$.

10. Dato il problema di Cauchy

$$y' = \tan(xy), \qquad y(0) = \alpha \in \mathbf{R}$$

stabilire tra le affermazioni seguenti quelle che risultano vere:

1) per $\alpha = 1$ la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbf{R}$;
2) per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ la soluzione massimale è una funzione pari;
3) per $\alpha = 1$ la soluzione massimale è una funzione convessa.