

Prova libera n. 7

1. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n \geq 1} n^{-1/n}, \quad \sum_{n \geq 1} n^{-n}, \quad \sum_{n \geq 0} n^3 3^{-n}.$$

2. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad \sum_{n \geq 1} (n!)^2 2^{(-n^2)}, \quad \sum_{n \geq 0} 2^n n! n^{-n}.$$

3. Tra le serie seguenti indicare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|\sin n|}{n}, \quad \sum_{n \geq 0} \frac{2 + \sin n}{n}.$$

4. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

5. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2}{n^2 + 2n}.$$

6. Tra le serie seguenti determinare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1 + n^3}{n!}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{n}{\log n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1 + \log n}{n^{3/2}}.$$

7. Tra le serie seguenti determinare quelle che risultano convergenti:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 2^n}{n!}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{n}{\log^2 n}, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\log n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n} + \log n}{n^{3/2}}.$$

8. Determinare per quali valori del parametro $x \in \mathbf{R}$ la somma della serie seguente risulta uguale ad $1/3$:

$$\sum_{n \geq 0} (\log x)^n.$$

9. Determinare per quali valori del parametro $x \in \mathbf{R}$ la somma della serie seguente risulta uguale ad $1/3$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(1+x)^n}.$$

10. Per ognuna delle serie seguenti discutere la convergenza semplice e assoluta:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n \sin(1/n), \quad \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{3n+2} \right)^n, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\log n}.$$