Il problema dei mattoni

Disponendo di n mattoni tutti uguali, sistemarli uno sull'altro, senza colla o cemento, in modo da raggiungere la massima estensione possibile.

Supponendo i mattoni di lunghezza unitaria e disponendo il primo mattone sull'intervallo $[0,1]$, con $n=2$ metteremo il secondo mattone che sporga di $1/2$. Il baricentro del sistema dei due mattoni si troverà quindi nel punto di ascissa $3/4$.

Con $n=3$ mettiamo il terzo mattone sotto la configurazione ottima ottenuta per $n=2$, in modo che il baricentro dell'insieme dei due soprastanti cada sull'estremo destro del mattone di sotto. Si guadagna allora un'estensione pari ad $1/4$. Il baricentro del sistema dei tre mattoni sarà dunque nel punto di ascissa pari alla media aritmetica dei baricentri:

$$\frac{1}{2}+\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)+\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Big)=\frac{5}{6}.$$

Con $n=4$ si procede come in precedenza, mettendo il quarto mattone sotto i primi tre in modo che il baricentro dell'insieme dei tre soprastanti cada sull'estremo destro del mattone di sotto. Si guadagnerà allora un'estensione pari ad $1/6$. Continuando così con n mattoni si raggiungerà un'estensione pari a:

$$1+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\Big).$$

Siccome la serie armonica diverge, con un numero sufficiente di mattoni si potrà raggiungere un'estensione comunque grande. Con 5 mattoni si arriva ad un'estensione pari a:

$$1+\frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)=\frac{49}{24}\simeq 2.04.$$

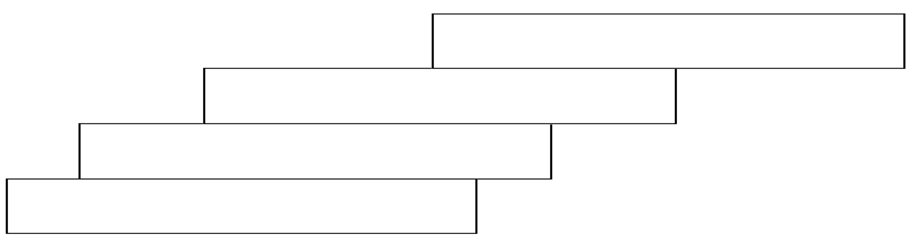

Figure 1: Disposizione ottima per 4 mattoni.

Dalla relazione asintotica

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\log n+\gamma+o(1),$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni ($\gamma\simeq 0.577215665$), si ricava che con n mattoni si raggiunge un'estensione massima pari a:

$$1+\frac{1}{2}\big(\log(n-1)+\gamma+o(1)\big).$$

Quindi, per raggiungere una grande estensione L sarà necessario un numero di mattoni circa uguale a:

$$n=e^{2L-2-\gamma}.$$