Settimana Matematica
6.02.2020 Ver 2.2

CHE COSA NON POSSO MISURARE CON I NUMERI REALI?

FABRIZIO BROGLIA

Uno degli scopi di questo incontro è cercare di evidenziare, senza entrare troppo nel dettaglio, alcune delle ragioni del perché la scoperta dell'incommensurabilità costituì un problema per gli antichi Greci, quasi una rivoluzione copernicana.
Ricordiamo di che cosa stiamo parlando.

Definizione 1. *Due grandezze* g_1 *e* g_2 *omogenee si dicono* commensurabili *se esiste una grandezza* g*, omogenea con* g_1 *e* g_2*, tale che*

$$g_1 = mg \qquad g_2 = ng \quad \text{con } n, m \text{ interi }.$$

Per il momento diremo che due grandezze sono *omogenee* se si possono confrontare tra di loro, sommarle e sottrarle con le usuali proprietà di queste operazioni.
Tornando alla definizione, praticamente due grandezze sono commensurabili se il loro rapporto è un numero razionale.

Scoperta dell'incommensurabilità. Il risultato di cui stiamo parlando è

Esistono grandezze incommensurabili; in particolare la diagonale e il lato di un quadrato sono incommensurabili.

Cioè se d è la diagonale del quadrato e l un suo lato, non esiste nessuna grandezza g omogenea con d e l tale che

$$d = mg, \quad l = ng \qquad \text{con } n, m \text{ interi }.$$

Una possibile prova di questa cosa si ottiene ragionando per assurdo. Per il teorema di Pitagora si ha $d^2 = l^2 + l^2$; supponiamo che d e l siano commensurabili e sia $d = mg$ e $l = ng$ e quindi $m^2g^2 = 2n^2g^2$.
Possiamo supporre che in questa relazione m, n siano primi tra loro, cioè senza fattori in comune. Ma il fatto che $m^2 = 2n^2$ dice che m^2 è pari e quindi che anche m lo è, cioè $m = 2k$ e quindi $4k^2 = 2n^2$. Ma questo implica che anche n^2, e quindi n, è pari e questo è contraddittorio con l'aver supposto m, n coprimi. $\square$
Quindi abbiamo che

la Geometria produce grandezze che non si controllano con i numeri, cioè con l'Aritmetica.

E allora come si fa? Ad esempio come si può fare per misurarle?
A questo punto rovesciamo completamente il punto di vista e poniamoci la domanda

a che cosa servono i numeri?

Ovviamente i numeri servono a contare, misurare. Raffiniamo la domanda chiedendoci piuttosto

che cosa riesco a misurare con una determinata classe di numeri?

o meglio ancora (anche se più difficile)

che proprietà deve avere una classe di numeri per affrontare un determinato problema?

Torniamo alla commensurabilità per mostrare che adombra anche un altro problema.
Supponiamo di avere due bastoni che rappresentino rispettivamente la diagonale e il lato di un quadrato. Per tentare di trovare una grandezza che sia sottomultiplo comune si potrebbe cercare di imitare il procedimento che nei numeri interi porta alla ricerca del massimo comun divisore.
Possiamo iniziare il ben noto procedimento cercando di suddividere tramite il bastone più piccolo quello più grande e, se l'operazione non riesce precisa e quindi c'e' un piccolo avanzo, continuare suddividendo il bastone più piccolo con la parte restante e così via.
Il punto è che, mentre nei numeri naturali questo processo ha termine dopo un numero finito di passi, in questo caso il procedimento può non terminare dopo un numero finito di passi, anzi non termina dopo un numero finito di passi perchè se terminasse le grandezze sarebbero commensurabili, e quindi si vanno a toccare campi pericolosissimi: già Zenone ci ha avvertito della pericolosità dei processi infiniti, provando che Achille non raggiunge la tartaruga o che le frecce scagliate da un arco in realtà non si muovono e via discorrendo.

I greci proposero un criterio per confrontare coppie di grandezze incommensurabili.

<u>*Criterio di Eudosso.*</u> Due grandezze (A, B) sono nella stessa proporzione di altre due grandezze (a, b), pensate come omogenee tra di loro, se comunque fissati due numeri interi positivi m e n si ha

- $mA < nB$ se e solo se $ma < nb$ e
- $mA > nB$ se e solo se $ma > nb$

Con linguaggio più attuale diremmo che $\dfrac{A}{B}$ e $\dfrac{a}{b}$ sono da considerarsi uguali se sono entrambi maggiori degli stessi razionali e minori degli stessi razionali.
Sotto la spinta della sistematizzazione di altri concetti, come ad esempio la continuità, molti matematici cercarono una definizione rigorosa di una classe di numeri soddisfacente a queste esigenze. I modi per farlo sono diversi e quello che più ricorda il mondo dei greci è il punto di vista di Dedekind che definisce, rifacendosi per sua stessa ammissione a Eudosso, la classe dei numeri reali in *modo assiomatico.*

In *modo assiomatico* non dovrebbe spaventare: è un modo a noi molto familiare per definire molte cose. Gli assiomi non sono, come scritto su alcuni dizionari, *verità così evidenti da non necessitare di dimostrazione.*
Nella vita di tutti i giorni incontriamo moltissimi esempi di situazioni assiomatiche: si pensi a un qualsiasi gioco di carte dove il valore delle carte dipende dalle regole assunte (assiomi): è ben noto che il sette di denari ha un valore diverso a scopa o a briscola, anche se la carta è la stessa. Inoltre usiamo modi assiomatici spesso anche per definire le cose: si pensi alla definizione di un pezzo degli scacchi che viene definito tramite il suo interagire con gli altri pezzi; anche Euclide non dice che cosa siano i punti e le rette, ma ne prescrive il reciproco comportamento: Ad esempio nel piano euclideo due rette non parallele si incontrano in un punto etc.

Dedekind chiede una classe di oggetti X in cui si possano fare operazioni di somma e prodotto con le usuali proprietà ma con una proprietà in più, altrimenti anche l'insieme dei razionali verificherebbe queste proprietà. La proprietà che richiede, che viene detta *Assioma di Continuità,* è la seguente.
Assioma di continuità. Se A, B sono due sottoinsiemi di X non vuoti tali che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B (cosa che indicheremo brevemente con $A \leq B$) allora in X esiste un elemento c separatore di A e B, cioè un elemento che è minore di ogni elemento di B e maggiore di ogni elemento di A, brevemente $A \leq c \leq B$.
Due sottoinsiemi A e B siffatti si diranno *separati* . Brevemente, due insiemi separati ammettono un elemento separatore.
Si osservi che se si chiede in più che i due insiemi A e B siano *contigui,* nel senso che comunque si fissi un k esistono un elemento a in A e uno b in B tali che $b - a < k$, allora è facile vedere che l'elemento separatore è anche unico.

Un insieme X siffatto lo chiameremo *campo ordinato completo* . Mostriamo che in un insieme di questo tipo esiste un elemento c tale che $c^2 = 2$

Proposizione 0.1. *Sia X un campo ordinato completo. L'equazione $x^2 = 2$ ammette almeno una soluzione.*

Prova. Indichiamo con $A = \{x \in X | x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in X | x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$
Dagli assiomi risulta che $A < B$ nel senso che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B e pertanto per l'assioma di continuità esiste un elemento separatore c in X. $A \leq c \leq B$.
Quello che vogliamo provare è che $c^2 = 2$.
Supponiamo che $c^2 < 2$. Mostriamo che allora esiste in X un $\delta > 0$ tale che $(c+\delta)^2 < 2$ e questa è una contraddizione perché $(c + \delta)^2 < 2 \Rightarrow c + \delta \in A$ e $\delta > 0 \Rightarrow c + \delta > c$ contro il fatto che ogni elemento di A è minore di c.
Il fatto che $c^2 < 2$ implica che esiste un altro elemento $\varepsilon \in X$ tale che $c^2 + \varepsilon < 2$. Ad esempio posso prendere $\varepsilon = \dfrac{2 - c^2}{2}$, in quanto $c^2 < 2 \Rightarrow c^2 + 2 < 4$ e quindi $c^2 + \dfrac{2 - c^2}{2} < 2$.
Risulta

$$(c + \delta)^2 = c^2 + 2c\delta + \delta^2 = c^2 + \delta(2c + \delta)$$

Se $\delta < c$ si ha

$$(c + \delta)^2 = c^2 + \delta(2c + \delta) < c^2 + 3c\delta$$

e se $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3c}$ risulta

$$(c + \delta)^2 < c^2 + 3c\delta < c^2 + \varepsilon < 2.$$

Quindi prendendo $\delta = \min\{c, \dfrac{\varepsilon}{3c}\}$ si ha $c + \delta \in A$ che, come abbiamo detto, è in contraddizione con $c \geq A$.
Allo stesso modo si prova che c^2 non può essere maggiore di 2 e quindi si conclude che $c^2 = 2$.

Osserviamo inoltre che se chiediamo a tale elemento di essere positivo allora non solo esiste ma è anche unico. Siano infatti x e y due elementi in X tali che $x^2 = y^2 = 2$. Da $x^2 = y^2$ otteniamo $(x - y)(x + y) = 0$ e dalla positività di x e y otteniamo $x = y$. □

Notiamo en passant che con questo tipo di approccio sappiamo ben poco sull'insieme X, ad esempio non sappiamo neppure se campi ordinati completi esistano, né, qualora esistano, se sono unici, né come son fatti, o come si possano rappresentare i loro elementi. Per questioni di questo tipo rimandiamo ad un testo di analisi o alla dispensa "Ma servono davvero i numeri reali?".

Torniamo al tema principale, cioè di mostrare una situazione in un qualche senso simile a quella in cui si trovavano i Greci al momento della scoperta dell'incommensurabilità: per fornire questo esempio iniziamo a soffermiamoci brevemente sul concetto di angolo.
La definizione di angolo è ben nota: in questo concetto quello che principalmente ci interessa è quello che succede vicino al punto O di incontro delle due rette, o meglio delle due semirette, scelte una volta per tutte. Pensate alla frase in italiano "mettere in un angolo, vai nell'angolo" o simili.
Potremmo cercare di evidenziare maggiormente questo fatto dicendo che un angolo è la *pendenza* relativa delle due semirette uscenti da un punto, facendo le opportune chiarificazioni per evitare le ambiguità tra angolo concavo e convesso.
Questa definizione si può facilmente estendere considerando due curve complanari uscenti da un medesimo punto e definire una nuova nozione di *angolo* come la relativa inclinazione delle due semicurve senza necessariamente limitarci a quella delle loro tangenti o ancora come "la parte di piano etc etc". Nel seguito ci riferiremo alla nozione di angolo definito da semirette come "*angolo rettilineo".*
Il concetto resta ancora un po' astratto: potrebbe tuttavia essere interessante cercare di misurare in qualche modo questa grandezza.
Per farlo iniziamo con il misurare gli angoli rettilinei cosa che sappiamo essere per nulla evidente.
Il primo problema è vedere se si riesce a farlo con le classi di numeri di cui si dispone. Più precisamente pensiamo l'angolo (rettilineo) come angolo al centro di una circonferenza centrata nel punto O di incontro delle due semirette, e proviamo che la lunghezza dell'arco sotteso è proporzionale all'angolo.
A tal fine possiamo dividere il problema in 3 passi.

(1) Mostrare che posso espimere la lunghezza della circonferenza tramite la classe dei numeri reali.
(2) Mostrare che il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro è costante.
(3) Mostrare che archi circolari di ugual raggio sono proporzionali ai rispettivi angoli al centro.

Il rapporto costante di cui al punto 2) si indica comunemente con π.
Riassumendo, il primo passo dice che la grandezza c *"lunghezza della circonferenza"*si può esprimere con un numero reale, il secondo permette di calcolarla dicendo che $c = 2\pi r$ e il terzo prova che, detta l la lunghezza dell'arco sotteso dall'angolo α si ha $l = \dfrac{\alpha\pi r}{180°}$.

Per mostrare che esiste un elemento ben determinato in $\mathbb{R}$ che misura la grandezza c, si mostra che tale grandezza si ottiene come elemento separatore di due classi separate in $\mathbb{R}$ e che poiché le due classi sono contigue tale elemento è unico.
Le prove dei 3 passi dovrebbero essere note dai percorsi scolastici, per cui, per non appesantire il discorso, le accenneremo in una appendice.

Ma veniamo alla classe di grandezze a cui accennavamo all'inizio e definiamo, seguendo Euclide, l'*angolo di contingenza.*
Sia S una circonferenza, O il suo centro e P un suo punto. Chiamiamo T la retta per P ortogonale al raggio. Si possono provare due cose.

(1) La retta T è tutta fuori del disco di centro O e bordo S. Cioè T non incontra la circonferenza S in altri punti diversi da P.
 Infatti se T incontrasse S in un altro punto Q avremmo che il triangolo POQ sarebbe un triangolo isoscele con due angoli retti alla base.

(2) Qualsiasi altra retta per P non può essere contenuta interamente nel settore delimitato dalla circonferenza S e dalla retta T.

Per non appesantire il discorso rimandiamo alla sezione 3.1.1 (pagina 21) dell'altro testo "Ma servono davvero i numeri reali?".
Chiameremo tale angolo, cioè l'angolo formato dalla mutua posizione dalla circonferenza S con la retta T, *angolo di contingenza.*
Quanto detto prova che l' angolo di contingenza è minore di ogni angolo rettilineo con vertice in P e con un lato T, perché altrimenti, se ci fosse un angolo rettilineo con vertice in P minore dell'angolo di contingenza si negerebbe la 2).
Questo basta a negare la possibilità di misurare l'angolo di contingenza con la classe dei numeri reali, perché in tale classe vale la proprietà di Archimede per cui dati $x, y \in \mathbb{R}$ con $0 < x < y$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$, o se si preferisce che dati $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > x > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n}y < x$.
Un elemento x di un corpo ordinato X tale che $0 < x < y$ per ogni $y > 0$ si dice *infinitesimo*: la proprietà di Archimede implica che $\mathbb{R}$ non ha infinitesimi.
Riassumendo abbiamo mostrato una categoria di grandezze che non può essere misurata tramite i reali poiché per questa categoria non vale una proprietà che vale per $\mathbb{R}$ cioè il principio di Archimede che appunto nega l'esistenza in $\mathbb{R}$ di infinitesimi.

A questo punto ci si può chiedere come si può procedere, e anche, qualora si trovasse una soluzione, valutarne il costo in termini di pregi e difetti, di vantaggi e svantaggi.

E con questo penso che possiamo chiudere qui l'incontro.

Appendice: teoremi relativi alla circonferenza.

In questa appendice riportiamo per somme linee le idee delle prove di quanto detto a proposito della misura degli archi di circonferenza, rimandando per una trattazione più dettagliata ad un libro di geometria delle scuole superiori.
Iniziamo con il punto 1).
Teorema: *Data una circonferenza esiste un unico segmento che sia maggiore dei perimetri di tutti i poligoni convessi iscritti e minore dei perimetri di tutti quelli circoscritti*

Se indichiamo con A la classe dei perimetri iscritti e con B quella dei perimetri circoscritti basterà provare che $A < B$. Se per di più proveremo che le classi A e B sono contigue avremo come conseguenza l'unicità.

Iniziamo osservando che le classi sono separate poiché il perimetro di ogni poligono circoscritto è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto, anzi più generalmente di ogni poligono convesso contenuto.
Per dimostrare che le due classi sono contigue fissiamo un (segmento di lunghezza) k e mostriamo che si possono trovare due poligoni P e p rispettivamente circoscritto e iscritto alla data circonferenza tali che, indicando ancora con la stessa lettera P e p i rispettivi perimetri, si abbia $P - p < k$.
Sia quindi, con riferimento alla Figura 1, p_n un poligono regolare di vertici $A_1, A_2, \ldots, A_n$ iscritto nella circonferenza: indichiamo con $B_1, B_2, \ldots, B_n$ i vertici del poligono P_n circoscritto costruito considerando le tangenti alla circonferenza nei punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

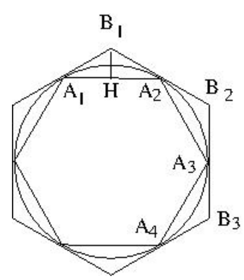

Figura 1.

Per dimostrare il teorema ci avvarremo della costruzione di alcuni triangoli isosceli ausiliari: consideriamo un primo triangolo isoscele T di base 4 volte il diametro $2r$ della circonferenza ed altezza $\frac{1}{2}k$ ed un secondo triangolo di base nA_1A_2, cioè il perimetro del poligono iscritto, isoscele con angoli alla base pari, riferendosi alla Figura 1, all' angolo A_1, A_2, B_1 che, essendo angolo alla circonferenza dell'angolo al centro A_1, O, A_2 ha una ampiezza pari a $\frac{1}{n}180°$.
L'altezza di questo secondo triangolo, per similitudine con il triangolo $A_1A_2B_1$, sarà nB_1H.
Costruiamo ora sulla base del triangolo T un triangolo R con angolo alla base $\frac{1}{n}180°$: facendo crescere n si ottiene che l'angolo $\frac{1}{n}180°$ diviene più piccolo dell'angolo alla base

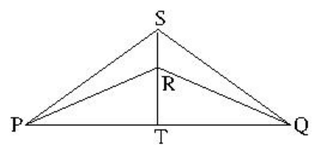

Figura 2.

di T, pertanto tale triangolo sarà contenuto in T e quindi la sua altezza sarà minore di quella di T.
Tornando ai poligoni iniziali, facendo riferimento per le notazioni alla Figura 2 e ancora alla Figura 1, abbiamo pertanto che, per ogni fissato n, $P_n = nB_1B_2 = 2nA_1B_2$ e $p_n = nA_1A_2 = 2nA_1H$, per cui $P_n - p_n = 2n(A_1B_1 - A_1H)$ cosa che, per le proprietà dei lati di un triangolo, implica $P_n - p_n < 2nB_1H$.
Ma la costruzione precedente mostra che fissato k crescendo n possiamo rendere il segmento nB_1H minore di $\frac{1}{2}k$ per cui in definitiva si ha che fissato k crescendo n si trovano due poligoni, uno iscritto e uno circoscritto, tali che $P_n - p_n < k$, cioè la contiguità delle classi di lunghezza dei perimetri.

La prova del secondo passo è simile, per cui la accenniamo fornendo solamente l'idea.
Siano S e S' due circonferenze di raggi rispettivamente r e r' e di lunghezza rispettivamente c e c': non è restrittivo supporle concentriche con lo stesso centro O come in Figura 3.
Per prima cosa costruiamo il quarto proporzionale (Talete) tra r, r' e c e indichiamolo con a. Cioè

$$\frac{r}{r'} = \frac{c}{a}$$

.
Per mostrare che $a = c'$ si prova che a è maggiore del perimetro di ogni poligono iscritto a S' e minore del perimetro di ogni poligono circoscritto a S', cioè che a coincide con c' per l'unicità dell'elemento separatore delle due classi. Ai fini della prova si osservi che i due poligoni costruiti sono simili e il rapporto di similitudine è dato dal rapporto dei raggi.

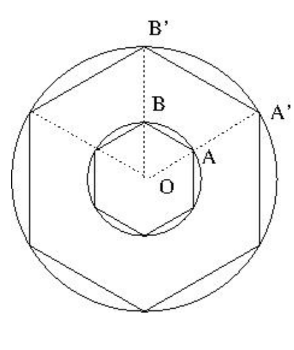

Figura 3.

La prova del terzo passo si costruisce seguendo lo stesso ordine di idee con ragionamenti del tutto simili alla prova del teorema di Talete.

Fabrizio Broglia
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: fabrizio.broglia@unipi.it
http://people.dm.unipi.it/broglia/