

$$\left. \begin{array}{l} 3) \quad \exists F \vdash \forall x, y \quad D_x \wedge D_y \rightarrow \exists! z (D_z \wedge f(x, y, z)) \\ \text{e simili per } f, f_2 \\ \exists F \vdash \exists! z (D_z \wedge f_0(z)) \end{array} \right\}$$

~~Teorema~~ L'insieme delle PA $\triangleleft$ $\exists F$

Un teorema vero $T \supset Q \Rightarrow T$ indecidibile.

BERARDUCCI 10-12-2008

Per l'ort ~~RE~~ RIC = RE $\cap$ CRE

~~RE = RE~~

$$\Rightarrow \text{RIC} = \exists \text{RIC}, \forall \text{RIC}$$

Ne segue che se partivamo IN in n insiemi RE. Allora sono tutti RIC.

~~Definizione~~ A, B RE. Infatti si ha:

Oss.: A, B RE. Allora $A \cup B$, $A \cap B$, $\forall x \in A$, $\exists x \in A$ RE

Def.: $A = \{x \mid \exists y P(x, y)\}$ P, Q ricorsi

$$B = \{x \mid \exists y Q(x, y)\}$$

$$x \in A \cup B = \exists y P(x, y) \vee \exists y Q(x, y) = \exists y (P(x, y) \vee Q(x, y))$$

$$x \in A \cap B = \exists y P(x, y) \wedge \exists y Q(x, y) = \exists y \exists z (P(x, z) \wedge Q(x, y))$$

$$= \exists y \exists z \leq n (P(x, z) \wedge Q(x, y))$$

$$C = \{x \mid \forall y < z \quad P(x, y, z)\}$$

$$P = \exists \text{RIC} \Rightarrow C \text{ RE}$$

$$(x, z) \in C \Leftrightarrow \forall y < z \quad \exists t \leq T R(x, y, z, t) \Leftrightarrow \left(\text{dove } T = \max\{t_0, \dots, t_{z-1}\} \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists T \quad \forall y < z \quad \exists t < T \quad R(x, y, z, t)$$

L'ultima non è un'equivalenza logica, ma funziona perché siamo in IN. $\square$

Interpretazioni

$$L = \{0, s, +, \cdot\}$$

$$L' = \{E\}$$

1 interpretazione di L in L'

$$I = (I_0(x), I_s(x, y), I_+(x, y, z), I_\cdot(x, y, z), D(x)) \quad L' \text{ formule}$$

$$p \xrightarrow{\quad} p^I$$

L -formula L' -formula

$$(\neg p)^I = \neg p^I$$

$$(p \wedge q)^I = p^I \wedge q^I$$

ecc.

DEF.: I interpreto PA in ZF ($PA \not\subseteq ZF$) u:

$$1) ZF \vdash (PA)^I \quad (\text{per ogni } p \text{ assioma di PA, } ZF \vdash p^I)$$

$$2) ZF \vdash \exists x D(x), (\forall x \exists! y, y = sx)^I, (\exists! y, y = 0)^I \text{ etc.}$$

$(x=y)^I = (x=y)$

Esempio di interpretazione di PA in ZF.

$$I_0(x) = \forall z (z \notin x)$$

$$I_s(x, y) = \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x)$$

$$I_+(x, y, z) = \exists f (f \text{ è una funzione: } f \emptyset = x, f y = z \wedge \forall u \in \text{dom } f, s(u) \in \text{dom } f \wedge f(s(u)) = s(f(u)))$$

$$[\text{idea } x + y = z \leftrightarrow ss \dots sx = z \dots]$$

$$I_\cdot(x, y, z) = \exists f (f \text{ è una funzione: } f \emptyset = \emptyset \wedge f y = z \wedge \forall u \in \text{dom } f, s(u) \in \text{dom } f \wedge f(s(u)) = f(u) + x)$$

$$I_\cdot(x, y, z) = \exists f (f \text{ è una funzione: } f \emptyset = \emptyset \wedge f y = z \wedge \forall u \in \text{dom } f, s(u) \in \text{dom } f \wedge f(s(u)) = f(u) + x)$$

$$D(x) = \forall z (0 \in z \wedge (\forall u, u \in z \rightarrow su \in z)) \rightarrow x \in z$$

500.2

100... PA $\not\models$ $\exists x \neg \phi(x)$

Esempio

$\mathbb{Z}F \vdash (\text{induzione})^I$ ma $\mathbb{Z}F$ dimostra di più !!! l'induzione del secondo ordine !!

$$(*) \quad \mathbb{Z}F \vdash \forall X (0 \in X \wedge \forall u (u \in X \rightarrow su \in X) \rightarrow \forall n (D(n) \rightarrow n \in X))$$

È questo è ovvio per come abbiamo definito $D(x)$.

In PA l'induzione sono ∞ assiomi del tipo:

$$\forall z \theta(0/z) \wedge \forall u (\theta(u/z) \rightarrow \theta(su/z)) \rightarrow \forall x \theta(x/z)$$

Interpretiamo:

$$(*)^0 \quad \forall z \Delta(z) \rightarrow \left[\theta^2(0, z) \wedge \forall u (\Delta u \rightarrow (\theta^2(u, z) \rightarrow \theta^2(su, z))) \right] \rightarrow \forall x (Dx \rightarrow \theta^2(x, z))$$

In $\mathbb{Z}F$, $\mathbb{Z}$ è tale che Dz

$$\text{Definire } X = \{u \mid \Delta(u) \wedge \theta^2(u, z)\}$$

$$\mathbb{Z}F \vdash (*) \text{ e da questo segue } (*)^2$$

Ma perché X è un insieme?

L'assioma dell'infinito e quello di separazione permettono di dire che

$$\mathbb{Z}F \vdash \{n \mid \Delta n\} \text{ è un insieme}$$

E quindi possiamo definire anche X come sopra.

Oss.: $\mathbb{Z}F \vdash \text{Inf} \not\models PA$ 5 interpretazioni diverse di D

$$\Delta(x) \Leftrightarrow x \text{ ordinale} \wedge \forall y < x \quad y \text{ non è ordinale limite}$$

$$\text{DEF.: } T = \{ \phi \text{ L-formula } L = \{0, +, \cdot, s\} \mid \mathbb{Z}F \vdash \phi^I \}$$

Oss.: $T \not\models PA$ ~~non~~ assiomi RE

$$T \not\models PA \text{ perché } T \vdash \text{con} PA \text{ (PA è coerente)}$$

$$\text{mentre } PA \vdash \text{con} PA$$

Ma per Gödel $T \vdash \text{con} T$

IDEA: Questo perché $\mathbb{Z}F$ dimostra che PA ha un modello e che ciò che ha un modello è coerente.

$\mathbb{Z}F \models PA$

Semanticamente che valdine?

Se $M \models \mathbb{Z}F$ posso definire un modello M^I di PA .

$$\text{dom}(M^I) = \{x \in M \mid M \models \Delta(x)\}$$

$$+ : M^I \times M^I \rightarrow M^I$$

$$a+b=c \Leftrightarrow M \models p_+(a, b, c)$$

$$x=0 \Leftrightarrow M \models p_0(x) \text{ etc.}$$

LEMMA $M \models \varphi^I \Leftrightarrow M^I \models \varphi$

 $M \models \mathbb{Z}F \quad \varphi \in L(PA)$

Dim.: Per induzione su φ .

~~Per φ ad esempio $x+y=z$~~

Li sono i parametri. Dimostriamo

$$M \models \varphi^I(a, b, \dots) \Leftrightarrow M^I \models \varphi(a, b, \dots) \quad a, b, \dots \in \{x \mid M \models \Delta(x)\}$$

A questo punto il caso base funziona per definizione (il $+$, $=$, $<$ sono definiti aperte)

~~Questa~~ Il passaggio induttivo funziona bene. La cosa un po' delicata sono i quantificatori.

$$M^I \models \forall x \varphi(x, a)$$

$$\forall b \in M^I \quad M^I \models \varphi(b, a)$$

$$(\text{induzione}) \quad \forall b \in M^I \quad M \models \varphi^I(b, a)$$

$$M \models \forall b (\Delta b \rightarrow \varphi^I(b, a))$$

$$M \models (\forall x \varphi(x, a))^I \quad \dots$$

Ma dobbiamo ancora dimostrare questo:

TEO $M \models \mathbb{Z}F \Rightarrow M^I \models PA$

Dim.: $M \models \mathbb{Z}F$

$$\varphi \in A_{\mathbb{Z}F}(PA)$$

$$\mathbb{Z}F \models PA^I$$

$$\mathbb{Z}F \models \varphi^I$$

$$M \models \varphi^I$$

$$M^I \models \varphi \quad PA$$

teo.: $\mathbb{Z}F$ è indecidibile) $\Rightarrow$ è coerente

$$qn.: T = \{ \varphi \in L(PA) \mid \mathbb{Z}F \vdash \varphi^I \}$$

$\downarrow$
PA

$\downarrow$
 $\mathbb{Q}$

$$T \text{ coerente} \quad M \models \mathbb{Z}F \Rightarrow M^I \models T$$

$$PA(T) \text{ RE} \Rightarrow T \text{ indecidibile (è essenzialmente indecidibile)}$$

T è deduttivamente chiusa (facile esercizio)

$$\textcircled{*} T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathbb{Z}F \vdash \varphi^I$$

$\uparrow$

$$\varphi \in T \Leftrightarrow \mathbb{Z}F \vdash \varphi^I$$

$$\text{Quindi: } \mathbb{Z}F \text{ decidibile} \Rightarrow T \text{ decidibile} \Rightarrow \text{assurdo.} \quad \textcircled{***}$$

BERARDUCCI 14-12-2004

Risummo risultati precedenti:

$\downarrow$

$$\mathbb{Z}F \supset PA$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi & & \varphi^I \\ \downarrow & \searrow & \\ L\text{-formula} & & L'\text{-formula} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} M^I & & M \\ \downarrow & \swarrow & \\ L\text{-struttura} & & L'\text{-struttura} \end{array}$$

$$\mathbb{Z}F \vdash PA^I$$

$$\text{Lemma: } M^I \models \varphi \Leftrightarrow M \models \varphi^I$$

$$T := \{ \varphi \in L\text{-formulae chiari} \mid \mathbb{Z}F \vdash \varphi^I \}$$

= tutto ciò che $\mathbb{Z}F$ sa dei numeri naturali $\not\vdash PA$

$$\mathbb{Z}F \vdash \forall x (0 \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y+1 \in x) \rightarrow \forall z \in \mathbb{N} z \in x)$$

$$\text{Lia } X = \{ a \in A \mid \theta(a) \}$$

$$\mathbb{Z}F \vdash \theta(0) \wedge \forall x (\theta(x) \rightarrow \theta(x+1)) \rightarrow \forall z \in \mathbb{N} \theta(z)$$

Questo vale per ogni θ , anche non esprimibile nel linguaggio di PA. Questo intuitivamente fa capire perché $\mathbb{Z}F$ è più forte di PA, cioè che $T \not\vdash PA$.

Concludiamo la dimostrazione di:

TEO.: $\mathbb{Z}F$ è indecidibile

DM.: $p \in T \Leftrightarrow \mathbb{Z}F \vdash p^I$

come $\mathbb{Z}F \vdash PA^I$

$T \supset PA \supset Q$ T indecidibile

T è coerente perché $\alpha \models \mathbb{Z}F \Rightarrow \mu \models \text{in } T \models \mathbb{Z}F \Rightarrow M^I \models \mathbb{Z}F \Rightarrow M^I \models T$

T è deduttivamente chiusa: $T \vdash p$ voglio dimostrare $p \in T$ cioè $\mathbb{Z}F \vdash p^I$.

Se $M \models \mathbb{Z}F$ basta mostrare $M \models p^I$

Se $M \models \mathbb{Z}F$ segue $M^I \models T$ $M^I \models p$ $M \models p^I$.

Quindi

$T \vdash p \Leftrightarrow p \in T \Leftrightarrow \mathbb{Z}F \vdash p^I$

$\mathbb{Z}F$ decidibile $\Leftrightarrow T$ lo è.

~~Quindi~~ Assunto. 

Generalizziamo:

TEO.: $S \supset Q \Rightarrow S$ indecidibile (S coerente)

DM.: Come prima definiamo:

$T = \{ p \mid S \vdash p^I \}$

Come prima T è deduttivamente chiusa

$T \vdash p \Leftrightarrow p \in T \Leftrightarrow S \vdash p^I$

T coerente perché $\downarrow^I \subset \downarrow$
 $p \in S \nRightarrow \perp$

~~S decidibile $\Leftrightarrow T$ decidibile~~, $T \supset Q$, T coerente

$\Rightarrow$ (Rozar) T è indecidibile $\Rightarrow S$ indecidibile 

OSS.: Può capitare $S \vdash (\exists x y \ x + y \neq y + x)^I$

OSS.: Anche Q in Q alcuni modelli di $\mathbb{Z}F$ possono capitare con stranezze.

Si dimostra che $\alpha \models \mathbb{Z}F$ è coerente $\exists M \ M \models \mathbb{Z}F$

$\{ x \mid D(x) \} = \mathbb{N}^M \neq \mathbb{N}$

Può capitare anche $M \models \mathbb{Z}F \quad \exists a \in M \quad M \models a = \{ x \mid D(x) \}$

$a = \mathbb{N}^M$

 Definiamo anche $A \subset M \quad A = \{ x \in M \mid M \models D(x) \}$, ~~$A = \mathbb{N}^M$~~

cioè che può esistere x che esistano $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \in A \subseteq M$ o $G \subseteq M$
 tali che $M \models (S(x_{n+1}) = x_n)^T$. E ciò è "strano". Infatti:

$a \in M$

$$M \supset \text{ext}(a) = A = \{x \in M \mid M \models x \in a\} = \{x \in M \mid x \in_M a\}$$

$$x < y \Leftrightarrow (\exists z (x+z=y) \wedge z \neq 0)^T$$

Ogni $\phi = x \in \mathbb{N}$ ha minimo. Ma può capitare che $\exists x \in A = \{x \mid M \models \phi(x)\}$

e in x ci sono elementi $x_0 \geq_M x_1 \geq_M x_2 \geq_M x_3 \dots$

Ma M dimostra le conseguenze dell'induzione, cioè che ogni sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ha minimo. Il motivo è che sono insiemi non definiti dentro $\mathcal{L}_F$, ma solo da fuori.

$$\text{Th}(\mathbb{N}) := \{\phi \mid \mathbb{N} \models \phi\} \not\equiv PA$$

L'inclusione è stretta perché la prima è completa, l'altra no.

Inoltre $\text{Th}(\mathbb{N})$ è indecidibile (contiene $\mathcal{Q}$)

TEO.: $\text{Th}(\mathbb{N}, +, 0, 1, <) \text{ è decidibile}$

TEO.: Inoltre $\mathcal{R} \not\equiv \mathcal{Q}$, $\text{Th}(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \text{ è decidibile}$

Oss.: Non possiamo definire il $\cdot$ sui naturali col $+$ (con formule del primo ordine) e non possiamo definire i naturali sui reali.

TEO.: $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \text{ è indecidibile}$

Oss.: $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, \cdot) \supset \text{Th}(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$

Dim.: $\text{Th}(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1) \stackrel{T}{\equiv} \text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \supset PA \supset \mathcal{Q}$

$$\text{Data } n \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \underbrace{\exists x, y, z, w (n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2)}_{D(n)}$$

Coi:

$$(x+y=z)^T \Leftrightarrow (x+y=z)$$

analoghi per $\cdot, 0, 1$.

$$\begin{aligned} \text{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \vdash \phi &\Leftrightarrow (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \models \phi \Leftrightarrow \mathcal{Q} \models \phi \\ &\Leftrightarrow \mathbb{Z} \models \phi \Leftrightarrow \mathbb{Z} \models \phi^T \Leftrightarrow \text{Th}(\mathbb{Z}) \vdash \phi^T. \end{aligned}$$

TEO.: La teoria dei campi è indecidibile (Non lo dimostriamo)

Oss.: ~~Def.~~ Teoria dei campi $\subseteq Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$

J. Robinson

Oss.: T teoria, f formule chiuse $T_{dec} \Rightarrow T \cup \{f\}$ dec.

~~oss.~~

$$Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \supseteq_{J. Robinson} Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) \supseteq Q \text{ finitamente ax.}$$

$$Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1) \supseteq^I Q$$

$\vdash Q^I$ (numero finito di assiomi)

Per compattezza bastano un numero finito di assiomi $\bigvee_{i=1, \dots, k} p_i$ di $Th(\mathbb{Q})$ per interpretare $\mathbb{Q}$.

Quindi: teoria dei campi $\cup \{p_1, \dots, p_k\} \supseteq Q$

Quindi: teoria dei campi $\cup \{p_1, \dots, p_k\}$ è indecidibile.

$\Rightarrow$ teoria dei campi è indecidibile

DEF.: $T \Leftrightarrow T'$

$$\Leftrightarrow Mod(T) = Mod(T')$$

$$\Leftrightarrow \{p \mid T \vdash p\} = \{p \mid T' \vdash p\}$$

$Th(\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ ~~è completa~~ $\Leftrightarrow$ teo. dei campi alg. chiusi di ch. 0 e questa è RIC. RX. ~~completa~~ (vero)

Quindi teo. campi è RIC. RX. e completa $\Rightarrow$ è decidibile

2° lemma di Gödel

$$\Box \varphi = \text{tes}_{PA}(\ulcorner \varphi \urcorner) = \exists x \text{Dim}_{PA}(x, \ulcorner \varphi \urcorner)$$

$$\text{Dim} \subset \mathbb{N}^2$$

"
 $\{\ulcorner d \urcorner, \ulcorner e \urcorner\}$ è una dimostrazione di φ primitivo ricorsivo numerato in Q
 da $\text{Dim}_{PA}(x, y)$

$$PA \vdash \varphi \Leftrightarrow (\ulcorner d \urcorner, \ulcorner e \urcorner) \in \text{Dim} \Leftrightarrow Q \vdash \text{Dim}(\ulcorner d \urcorner, \ulcorner e \urcorner)$$

$$\begin{aligned} \text{OSS.: } PA \vdash \varphi &\Rightarrow \exists d \text{ } PA \vdash_d \varphi \Rightarrow \exists d \text{ } Q \vdash \text{Dim}(\ulcorner d \urcorner, \ulcorner e \urcorner) \\ &\Rightarrow Q \vdash \exists x \text{Dim}_{PA}(x, \ulcorner e \urcorner) \Rightarrow Q \vdash \Box \varphi \Rightarrow PA \vdash \Box \varphi \end{aligned}$$

A parole: "PA dimostra φ ", PA "si accorge" di dimostrare φ , cioè
 $PA \vdash "PA \vdash \varphi"$

$$\text{OSS.: } \text{Dim} \subset \mathbb{N}^2$$

$\{(a, b) \mid \mathbb{N} \models \text{Dim}_{PA}(a, b)\}$ è numerabile

molto ~~meno~~ $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \Box \varphi$ (questo PA non lo vede; funziona in ZF)

$$\boxed{\begin{aligned} \text{TED.: D1) } PA \vdash \varphi &\Rightarrow PA \vdash \Box \varphi \quad [\mathbb{N} \models \Box \varphi \rightarrow \Box \Box \varphi] \\ \text{D2) } PA \vdash \Box \varphi &\rightarrow \Box \Box \varphi \end{aligned}}$$

D, P.: 1) OSS. di sopra

2) non lo facciamo 

OSS.: Ci sono dimostrazioni standard (codificate da numeri standard) e non standard. L'idea è che le dimostrazioni non standard non sono dimostrazioni solo perché hanno lunghezza non ~~standard~~ standard.

~~Nota bene~~: Questo succede perché si ha:

$$\boxed{\text{TED.: D3) } PA \vdash (\Box \varphi \wedge \Box(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \Box \psi}$$

O, P.: Anche questa non la dimostriamo. 

Generalizzazioni

$$1) \Gamma \vdash \varphi \Rightarrow_{PA} Q \vdash \Box_{\Gamma} \varphi \quad \text{« } \Gamma \text{ è RIC. AX. »}$$

$$2) PA \vdash \Box_{\Gamma} \varphi \rightarrow \Box_Q \Box_{\Gamma} \varphi$$

$$3) PA \vdash \Box_{\Gamma} \varphi \wedge \Box_{\Gamma} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \Box_{\Gamma} \psi$$

$\text{Corr}(PA) \equiv \neg \Box_{PA} \perp$ dove $\Box_{PA} \vdash \neg \perp$ ad esempio $\perp = (0=1)$

Abbiamo dimostrato il 1° teo. di Gödel. ~~Ripetere la stessa cosa~~: Ridimostrandolo.

Dico: $Q \vdash G \leftrightarrow \neg \Box G$ (generalizzazione)

in $PA \vdash G$

$PA \vdash \Box G$ proprietà D1

$PA \vdash \Box G \leftrightarrow \neg \neg G$ def. di G

$PA \vdash \neg G$

$PA \vdash \perp$ assurdo perché $\text{Corr}(PA)$

Quindi $PA \not\vdash G$.

Se $PA \not\vdash G$

Quindi $IN \not\models \Box G$

$IN \models \neg \Box G$

$IN \models G$

$PA \not\vdash \neg G$ ($IN \models PA$)

Quindi PA è incompleta. $\square$

LEMMA: $PA \vdash G \leftrightarrow \text{Corr}(PA)$

Dalla dimostrazione ~~infinite~~ segue che

$PA \vdash \text{Corr}(PA) \rightarrow \neg \Box G$
 $\updownarrow$
 G

$\Rightarrow PA \vdash \text{Corr}(PA)$

Ma facciamo bene

$$\text{TEO.: } PA \vdash \text{Con}(PA) = \neg \Box \perp \quad (2^{\circ} \text{ teo. di Gödel})$$

$$\text{D10.: } \left[\text{Liccone } PA \vdash G \text{ basta per vedere che } PA \vdash \text{Con}(PA) \rightarrow G \right]$$

$$\updownarrow$$

$$\neg \Box G$$

Lisc basta:

$$PA \vdash \neg \Box \perp \rightarrow \neg \Box G$$

int:

$$PA \vdash \neg \Box G \rightarrow \Box \perp \quad]$$

$$PA \vdash \Box G \rightarrow \Box \Box G \quad (D2)$$

$$PA \vdash \Box G \leftrightarrow \neg \neg \Box G \quad (\text{def di } \Box)$$

$$PA \vdash \Box (\Box G \rightarrow \neg \neg G) \quad (D1)$$

$$PA \vdash \Box (\Box G) \wedge \Box (\Box G \rightarrow \neg \neg G) \rightarrow \Box \neg \neg G \quad (D3)$$

$$PA \vdash \Box G \rightarrow \Box \neg \neg G \quad (\text{calcolo proposizionale})$$

$$PA \vdash G \rightarrow (\neg \neg G \rightarrow \perp)$$

$$PA \vdash \Box (G \rightarrow (\neg \neg G \rightarrow \perp)) \quad (D1)$$

$$PA \vdash \Box G \rightarrow \Box (\neg \neg G \rightarrow \perp) \quad (D3)$$

$$PA \vdash \Box G \rightarrow (\Box \neg \neg G \rightarrow \Box \perp) \quad (D3)$$

$$PA \vdash \Box G \rightarrow \Box \perp \quad (\text{calcolo proposizionale})$$

$$PA \vdash \neg \Box \perp \rightarrow \neg \Box G$$

$$PA \vdash \text{Con } PA \rightarrow G$$

$$PA \vdash PA \nvdash G$$

$$PA \nvdash \text{Con } PA$$



$$\text{OSS.: } PA \vdash G \leftrightarrow \text{Con}(PA)$$

$$(\Leftarrow) \text{ facile}$$

$$(\Rightarrow) PA \vdash G \rightarrow \neg \Box G$$

$$PA \vdash \perp \rightarrow G$$

$$PA \vdash \Box (\perp \rightarrow G)$$

$$PA \vdash \Box \perp \rightarrow \Box G$$

$$PA \vdash \neg \Box \perp \rightarrow \neg \Box G$$

$$PA \vdash G \rightarrow \neg \Box \perp$$



$PA \nVdash \text{Con}(PA)$

Analogamente $ZF \nVdash \text{Con}(ZF)$

① $PA \vdash "ZF \overset{I}{\supset} PA"$ $(\forall x \Box_{PA}(x) \rightarrow \Box_{ZF}(x^Z))$

② $\nVdash T \overset{I}{\supset} T' \quad PA \vdash "T \overset{Z}{\supset} T'"$

③ $\nVdash T \overset{Z}{\supset} T' \text{ e } T \text{ coerente} \xrightarrow{PA} T' \text{ coerente}$
perché $T \vdash \perp \iff T' \vdash \perp$

Quindi:

$$PA \vdash \text{Con } ZF \vdash \text{Con } PA$$

$$PA \nVdash \text{Con } PA$$

$$PA \vdash \text{Con } ZF$$

Dim^F di Zermelo

$$PA^* = \bigcup_{PA_n \text{ coerente}} PA_n \quad PA_n \text{ primi } \eta \text{ assiomi di } PA$$

Noi sappiamo che $PA^* = PA$. $PA \vdash \text{Con}(PA^*)$ (teo. di compattezza)

$$Ax_{PA^*}(x) \Leftrightarrow \forall d \text{ Dim}_{PA}(d, \perp) \exists \gamma \text{ assioma di } d \rightarrow \gamma x$$

$$PA^* \vdash \text{Con}(PA^*) \quad \text{perché } PA \vdash \text{Con}(PA^*)$$

$$\text{Con}(PA^*) \Leftarrow \neg \Box^* \perp = \neg \exists n \text{ Con } PA_n \wedge \Box_{PA_n} \perp$$

Ma $\Box^*$ non verifica la proprietà.

$$\Box^* \varphi = \exists n (\text{Con } PA_n \wedge \Box_{PA_n} \varphi)$$

$$\Box \varphi = \exists RIC \quad \Box^* \varphi \text{ non è fatto così: c'è un } \forall \text{ che viene da } \text{Con } PA_n$$

$$\text{Latta D2: } PA \vdash \exists RIC \rightarrow \Box \exists RIC$$