

DEF.: Un linguaggio (sintassi) L è un insieme di simboli di funzione, costanti, relazione, detti di arità assegnata

DEF. Una L -struttura M è data da:

1) un insieme $M = \text{dom}(M) \neq \emptyset$

2) un'interpretazione di L $f \mapsto f_M: M^n \rightarrow M$ $R \mapsto R_M \subseteq M^n$
 $a \mapsto a_M \in M$

~~DEF. L -formula~~

DEF.: L -termini:

L -costanti

variabili $x_1, x_2, \dots$

$f(t_1, \dots, t_n)$ dove $f \in L$ $t_1, \dots, t_n$ L -termini

DEF.: L -formule: costruite a partire dalle formule atomiche usando

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \forall, \exists$

L -formule atomiche: $t_1 = t_2$ t_i L -termini
 $R(t_1, \dots, t_n)$ $R \in L$ relazione

L -formule $(f_1 \wedge f_2), (f_1 \vee f_2), \neg f_1, (f_1 \rightarrow f_2), \forall x f_1, \exists x f_1$
dove f_1, f_2 sono L -formule, x variabile

DEF.: $M \models f$ f è vera in M
 L -struttura L -formula

DEF.: L linguaggio, f L -formula $VL(f)$ (variabili libere di f):

$$VL(\alpha \wedge \beta) = VL(\alpha) \cup VL(\beta)$$

$$VL(\neg \alpha) = VL(\alpha)$$

$$VL(\forall x \alpha) = VL(\alpha) - \{x\}$$

$VL(\text{atomica}) =$ tutte le variabili che vi compaiono (si definisce per induzione)

DEF.: f chiusa $\Leftrightarrow VL(f) = \emptyset$

Es: L -struttura M $L[M]$ formula chiusa

$$\text{Es. } L = \{0, 1, +, \cdot\} \quad M = (R, 0_M, 1_M, +, \cdot) \quad \exists x (x > m)$$

DEF.: Unità

L -struttura M

$L[M]$ formula chiusa φ

Definire $M \models \varphi$ per induzione su φ

$$M \models (\alpha \wedge \beta) \iff M \models \alpha \text{ e } M \models \beta$$

$$M \models (\alpha \vee \beta) \iff M \models \alpha \text{ o } M \models \beta$$

$$M \models \neg \alpha \iff \text{non } M \models \alpha$$

$$M \models \forall x \alpha \iff \text{per ogni } a \in M \quad M \models \alpha \left[\frac{a}{x} \right]$$

$\uparrow$
sostituzione

$$M \models R(t_1, \dots, t_n) \iff (t_1^M, \dots, t_n^M) \in R^M \subset M^n$$

$$M \models (t_1 = t_2) \iff (t_1^M, t_2^M) \in \Delta = \{(x, x) \mid x \in M\} \subset M^2$$

DEF.: Una L -teoria è un insieme T di L -formule chiuse (gli assiomi).

DEF.: Conseguenza logica $\models$ (notare che prima aveva un significato diverso)

T teoria $\models$ formula φ

$$T \models \varphi \stackrel{\text{df.}}{=} \text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$$

$$\text{cioè } \forall M \text{ } L\text{-struttura } M \models T \Rightarrow M \models \varphi$$

Teorema di completezza di Gödel 1930:

$$T \models \varphi \iff T \vdash \varphi$$

$\text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$ esiste una dimostrazione di φ da T usando certe regole logiche che non dipendono da T, L

In altri termini:

Dati T, φ esiste una dimostrazione formale di φ da T o esiste un controesempio ~~$M \models T$~~ $\varphi \notin \text{Mod}(M)$ $M \in \text{Mod}(T)$ $M \not\models \varphi$

DEF.: T è coerente se non esiste φ $T \models \varphi$ e $T \models \neg \varphi$

DEF.: T è completa se T è coerente e per ogni L -formula φ chiusa

$$T \models \varphi \text{ o } T \models \neg \varphi$$

Oss.: ~~$\text{Mod}(T) \neq \emptyset$~~ $\text{Mod}(T) \neq \emptyset \Rightarrow \text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$ per ogni φ

Quindi T è coerente $\Leftrightarrow$ ha modelli (il minimo insieme)

Lemma di compattezza

T : L-teoria

DEF. T è soddisfacibile $\Leftrightarrow \text{Mod}(T) \neq \emptyset$.

T è finitamente soddisfacibile $\Leftrightarrow \forall$ ogni $T' \subset T$, T' finita $\text{Mod}(T') \neq \emptyset$

Lemma di compattezza

T è finitamente soddisfacibile $\Leftrightarrow T$ è soddisfacibile

Esempio

Non esiste una L-teoria che abbia come unico modello i numeri naturali. $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ $(\mathbb{N}; 0, 1, +, \cdot)$

Unica si intende a meno di isomorfismo.

BERARDUCCI 1-10-2009

Lemma di compattezza

TEO: Sia T una L-teoria (insieme anche finito di assiomi).

Supponiamo che $\forall T' \subset T$ T' finito $\exists M \in \text{Mod}(T')$

Allora $\exists M \in \text{Mod}(T)$.

Esempi

① $L = \{0, 1, +, \cdot, s, \leq\}$ $T = \text{PA}(\text{Rams}) = Q + \text{induzione}$

Assiomi di Q di Robinson:

$$\forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists x' x = sx')$$

$$\forall x (0 \neq sx')$$

$$sx = sy \rightarrow x = y$$

$$x + 0 = x$$

$$x + sy = s(x + y)$$

$$x \cdot 0 = 0$$

$$x \cdot sy = x \cdot y + x$$

Induzione (infiniti assiomi)

$$\varphi(0) \wedge \forall x (\varphi(x) \rightarrow \varphi(sx)) \rightarrow \forall x \varphi(x)$$

Modelli di $\mathcal{Q}$

1) $\mathbb{N}$

2) $M \models p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ con coeff. direttore positivi e lo 0

Esercizio

$$M \models PA^0$$

$\{x\} \in x$ per $\forall x$, diguni

$$= \exists y (2y = x) \vee \exists y (2y + 1 = x)$$

ma l'igiore induttiva, ma non è né pari né diguni.

Lemma di Löwenheim-Skolem PA^0 ha modelli $\in \mathbb{N}$

DEF.: A, B L -strutture, $A \leq B$ (sottostruttura) se $\text{dom}(A) \subseteq \text{dom}(B)$

e le funzioni ^{le costanti} e le relazioni su A sono la restrizione di quelle su B .

$$\text{Es.: } (\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1, \leq) \leq (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$$

DEF.: A è una L -struttura, B è una L' -struttura con $L' \supset L$,

$$B \text{ estende } A \text{ se } B|_L = A$$

Esempio $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ estende $(\mathbb{R}, +, 0)$

TEO.: PA^0 ha modelli non isomorfi a $\mathbb{N}$

D.D.: (uso tes. di compattazione)

$$L = \{0, 1, +, \cdot, c\}$$

$$T = PA^0 \cup \{c \neq 0, c \neq 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad L \cup \{c\}$$

T è finitamente soddisfacibile, basta interpretare la teoria con i naturali in cui la c è un numero opportuno.

Per il teorema di compattazione T ha un modello A .

$A|_L \models PA^0$ (evidente); ma una cosa è vera sui naturali e vera nelle estensioni.

$A|_L \cong \mathbb{N}$ (perché in A c'è l'elemento che prima interpretava c !!)

e in un eventuale isomorfismo con $\mathbb{N}$ non si riesce a mappare c da nessuna parte). □

DEF.: $(X, \leq)$ è un ordine totale se $\neq$ axioms

$$\text{axioms} \begin{cases} x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \\ x \leq x \\ x \leq y \vee y \leq x \\ x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \end{cases}$$

→ questo articolo

Handbook of mathematical logic

(book total)

DEF.: $(X, \leq)$ è un buon ordine se è un ordine totale e qui aggiungiamo
Sì X ha un minimo. (axioms del secondo ordine)

Esercizio: Non è possibile definire i buoni ordini con soli axioms del primo ordine.

~~Propo~~ Esercizio: X è un buon ordine se non esiste successioni infinite decrescenti (anche questo axioms non è esprimibile al primo ordine).

→ DIT.: Data K una classe di L -strutture (esempio: buoni ordini)

direi che K è elementare se esiste una L -teoria T tale che

$$K = \text{Mod}(T)$$

(del primo ordine)

Vogliamo dimostrare che la classe K dei buoni ordini non è elementare.

Per assurdo se $\exists T \{ \text{buoni ordini} \} = \text{Mod}(T)$ considero T'

$$L' = \{ \leq, c_0, c_1, c_2, \dots \} \quad \text{con axioms di } T' = T \cup \{ c_0 > c_1, c_1 > c_2, c_2 > c_3, \dots \}$$

È una teoria del primo ordine, quindi non quantifica sull'esistenza di infinite cose ma le fissa nel linguaggio.

Applico la completezza di T' . È chiaro che $\text{Mod}(T') = \emptyset$ (ovvio)

Completezza $\Rightarrow$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ $T \cup \{ c_0 > c_1, \dots, c_{n-1} > c_n \}$ non ha modelli.

Per i numeri naturali con $\begin{matrix} c_0 \\ \downarrow \\ n \end{matrix} \dots \begin{matrix} c_n \\ \downarrow \\ 0 \end{matrix}$ è un modello. Assurdo. $\square$

Sia T una L -teoria, $\forall n \in \mathbb{N}$ T ha un modello M_n $|M_n| > n$
 Allora $\forall K$ cardinale $\exists M \in \text{Mod}(T)$ $|M| \geq K$.

DIM.: ~~PROPOSIZIONE~~ $L' = L \cup \{c_i \mid i \in I\}$ dove $|I| = K$

$$T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid i \neq j \in I\}$$

Dall'lemma di compattezza segue che T' ha modelli, poiché per
 le ipotesi T' è finitamente soddisfacibile. Inoltre $|M| \geq K$ dove $M \in \text{Mod}(T')$.

Ma togliendo i simboli in più M è un modello di T . $\square$

Teoria dei grafi

$L = \{R\}$ R relazione binaria

L -strutture = grafi

$K = \{\text{grafi}\} = \text{Mod}_L(\text{nessuna restr.})$ ~~elementare~~ ~~elementare~~

$K' = \{\text{grafi connessi}\} = \text{Mod}_L(\forall x \forall y R(x, y))$ ~~elementare~~
 (ogni vertice connesso agli altri)

~~grafi orientati~~ $K'' = \{\text{grafi non orientati}\}$

~~grafi simmetrici~~ $\text{Mod}(\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)))$ ~~elementare~~

Teoria log. $\text{Mod}(\forall x \neg R(x, x))$ ~~elementare~~

~~grafi aciclici~~

Grafi non orientati ciclici $\quad \quad \quad 1 \quad \Delta \quad \square \quad \diamond \dots$ non elementare

In per esempio esistenziale T $\text{Mod}(T) = \text{grafi ciclici}$

applico L.S. T a T ipotesi di L.S. $\forall n \exists M_n \in \text{Mod}(T)$ $|M_n| > n$

Teori di L.S. $T \exists M \in \text{Mod}(T)$ $|M|$ infinita e ciò non può essere

perché non ci sono modelli infiniti

Grafi connessi = non orientati, senza loop e dati due vertici c'è un
 cammino finito da a a b

$$R(a, b) \vee \exists x [R(a, x) \wedge R(x, b)] \vee \dots$$

In si forse a causa di $\vee$ sarebbe diventato elementare

(infiniti azioni). Dimostriamo che la teoria dei grafi connessi
 non è elementare.

Per omni $\exists T$ grpi commi = Mod (T).

Considera $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D} \text{ per } L' = \{R, a, b\}$

$$T' = T \cup \{ \neg R(a, b), \neg \exists x (Rax \wedge Rxb) \dots \}$$

↑
negando le "v" diventando "a" e "pi";

T' non ha modelli per estensione, ha modelli per la compattezza. Analo.

OSS.: $G = (V, R)$ è non vuoto se $\exists P, Q$ sottoinsiemi di V tali che

$$\neg \forall x \forall y (x R y \rightarrow \neg (P_x \wedge Q_y)) \quad (\forall x \forall y (P_x \wedge Q_y \rightarrow \neg Rxy) \wedge$$

$$\forall x (P_x \vee Q_x) \wedge \exists x P_x \wedge \exists y Q_y$$

non vuoto se $\neg \exists P, Q \dots$ e quindi l'abbiamo detto al secondo ordine.

BERAROUCCI 5-10-2009

$$\boxed{\text{TBD. DI COMPATTEZZA: } \forall T' \subseteq T_{\text{finite}} \exists M \in \text{Mod}(T') \Rightarrow \exists M \in \text{Mod}(T)}$$

D.D.: Sia I un insieme di indici (non necessariamente ordinato)

$\forall i \in I$ M_i è una L -struttura

$$\prod_{i \in I} M_i = \{ f \mid \forall i \in I \ f(i) \in M_i \}$$

$$f = \langle a_i \mid i \in I \rangle$$

$$f(i) = a_i \in M_i$$

$\prod_{i \in I} M_i$ (è una generalizzazione del prodotto cartesiano)

$\prod_{i \in I} M_i$ diventa una L -struttura con le operazioni e le relazioni definite componente per componente.

OSS.: Un prodotto di ordini totali non è, in generale, totale.

DEF.: $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ è un filtro su I se $\forall X \in \mathcal{U} \quad X \subseteq I$

$$X, Y \in \mathcal{U} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{U}$$

$$X \in \mathcal{U} \quad X \subseteq Y \subseteq I \Rightarrow Y \in \mathcal{U}$$

$$\emptyset \notin \mathcal{U} \quad I \in \mathcal{U}$$

DEF.: $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro se

$$\forall X \subseteq I \quad X \in \mathcal{U} \vee X^c \in \mathcal{U}$$



Esempio:

$I = \mathbb{N}$ $U = \{X \mid X \subseteq \mathbb{N} \text{ } \mathbb{N} \setminus X \text{ finito}\}$ filtro di Frechet o dei infiniti

L'idea è che gli insiemi di U sono "grandi".

Oss.: Se U è un ultrafiltro su I allora può definire

$m: P(I) \rightarrow \{0, 1\}$ misura

$$X \in U \quad m(X) = 1$$

$$X \notin U \quad m(X) = 0.$$

Si verifica che m ha una misura a valori in $\{0, 1\}$ che anche un ultrafiltro corrispondente.

Esempio di ultrafiltro

$U = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid 5 \in X\}$ ultrafiltro

Filtro principale su I , preso $B \in I$ $U = \{B' \mid B' \supseteq B\}$ è un filtro
ma è un ultrafiltro $\Leftrightarrow |B| = 1$.

Cerchiamo a costruire un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$.

Oss.: $A \cup B \in U \Rightarrow A \in U \text{ o } B \in U$

$$\text{non } A^c \in U \text{ e } B^c \in U \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \in U$$

$$m(mai) \stackrel{\text{scelta}}{=} 1 \Rightarrow m(\{4n \mid n \in \mathbb{N}\}) = 1 \text{ oppure } m(\{4n+2 \mid n \in \mathbb{N}\}) = 1$$

e dobbiamo fare un'altra scelta. Per definire un ultrafiltro non principale si vede allora la nuova l'assioma della scelta.

TEO.: Ogni filtro $F \subseteq P(I)$ è contenuto in un ultrafiltro $F \subseteq U \subseteq P(I)$

Dim. Zorn.

Definiamo $\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F} = \prod_{i \in I} M_i / \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ filtro su I

o

$\mathcal{P}(I)$

$$\langle a_i \mid i \in I \rangle \mathcal{F} \langle b_i \mid i \in I \rangle \text{ se } \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{F}$$

Verifica che $\mathcal{F}$ è una relazione di equivalenza.

Ottiene l'insieme, ne facciamo la L -struttura. Esempio $L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$

$$[\langle a_i \mid i \in I \rangle] \leq [\langle b_i \mid i \in I \rangle] \iff \{i \mid a_i \leq b_i\} \in \mathcal{F}$$

È vede facilmente che i ben definita la def. sulla classe di equivalenza.

Anche le altre cose si definiscono in modo analogo $(0, 1, +, \cdot)$.

~~TEO. DI LOS~~

~~U ultrafiltro su I, φ L-formula chiusa $\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{U} \models \varphi$~~

~~$\iff \{i \mid M_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$~~

~~Esempio: preso particolare $\{i \in I \mid M_i \models \varphi\} = I$~~

~~O.D.: Per induzione sulla lunghezza di φ~~

TEO. U) LOS

Sia $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I , $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ L-formula

$$\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{U} \models \varphi \iff \{i \mid M_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$$

Lemma: $\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{U} \models \varphi([\langle a_i \mid i \in I \rangle], [\langle b_i \mid i \in I \rangle])$

$\iff \{i \mid M_i \models \varphi(a_i, b_i)\} \in \mathcal{U}$

O.D.: Per induzione sulla lunghezza di φ

Caso base $\varphi(x, y) \equiv (x \leq y)$ vero per definizione

In generale se $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ è una formula $R(x_1, \dots, x_n)$ con R relazione $\in L$ è vero per definizione.

Caso simile: L non ha simboli di costante.

Alt. Sia $\varphi = R(x_1, \dots, x_n)$ (atto), $a \neq b$, $a \neq 0$, $1x$, $\exists x \varphi$, $\forall x \varphi$

$$\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{U} \models \alpha([\langle a_i \mid i \in I \rangle], \dots) \vee \beta([\langle a_i \mid i \in I \rangle], \dots)$$

$$\prod_{i \in I} M_i / \mathcal{U} \models \alpha([\langle a_i \mid i \in I \rangle], \dots) \iff \prod_{i \in I} M_i \models \alpha(a_i, \dots)$$

↓ Induzione (non formula più corta)

$$A = \{i \mid M_i \models \alpha(a_1, a_2, \dots)\} \in U \quad \text{or} \quad B = \{i \mid M_i \models \beta(a_1, a_2, \dots)\} \in U$$

$$A \cup B \in U$$

↓ Induzione

$$A \cup B = \{i \mid M_i \models \alpha(\dots) \vee \beta(\dots)\} \in U \quad \text{e ci siamo}$$

Il caso $\neg$ è analogo; ma a le posizioni rispettivamente una volta fatta la negazione $\neg A \cup B = \neg(\neg A \vee \neg B)$

La negazione è facile e si fa come il caso $\vee$.

Il caso un po' più complicato è quello dei quantificatori.

Supponiamo ad esempio che

$$\varphi(x) = \exists y \alpha(x, y)$$

$$\prod_i M_i / \mathcal{E} \models \exists y \alpha(x, [\langle a_i | i \rangle])$$

$$\Downarrow \text{Induzione}$$
$$\text{esiste } [\langle b_i | i \rangle] \text{ tale che } \prod_i M_i / \mathcal{E} \models \alpha([\langle b_i | i \rangle], [\langle a_i | i \rangle])$$

↓ Induzione

$$[\langle b_i | i \rangle] \in \{i \mid M_i \models \alpha(b_i, a_i)\} \in U$$

↓ Induzione

$$\{i \mid M_i \models \exists y \alpha(x, a_i)\} \in U$$

Ma qui non ci sono problemi!! Ricordarsi:

$$\text{Per } i \in A \text{ se la } M_i \models \exists y \alpha(x, a_i)$$

$$\text{sceglie (insieme della scelta) un } b_i \text{ tale che } M_i \models \alpha(b_i, a_i)$$

Per $i \notin A$ definire $b_i \in M_i$ in modo arbitrario

$$\text{Considera } \langle b_i | i \in I \rangle$$

$$\text{Definire } A \subseteq \{i \mid M_i \models \alpha(b_i, a_i)\} \in U$$

Da qui poco fatica di tornare indietro.

La nostra funzione è costruita abbiamo finito.

Il problema è di ottenere espressioni di funzioni (con funzioni semplici non c'è problema (ci si può fare prima). Ma c'è il trucco:

$$(1+x) \cdot y = z$$

$$\exists u (1+x = u \wedge u \cdot y = z)$$

Per le costanti non ci sono problemi (ci sono a forma parametri).

E ci siamo. $\square$

La volta scorsa abbiamo definito un ultraprodotto rispetto a un ultrafiltro e abbiamo visto il teorema di Łoś.

Def. in $\mathcal{A}$ si definisce un ultrafiltro.

DEF.: B è un'algebra di Boole se in B sono definite $x \mapsto \bar{x}$, $\cup: B^2 \rightarrow B$, $\cap: B^2 \rightarrow B$, $\neg: B \rightarrow B$, $0 \in B$, $1 \in B$.

Azioni:

$$\forall x, y, z \in B$$

$$x \cup \bar{x} = 1 \quad x \cap \bar{x} = 0$$

$$(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z) \quad (x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$$

$$x \cup y = y \cup x$$

$$x \cap y = y \cap x$$

$$x \cap (x \cup y) = x$$

$$x \cup (x \cap y) = x$$

Un'algebra di Boole è una L -struttura con $L = \{0, 1, \cup, \cap, \neg\}$.

Esercizio Dedurre De Morgan dagli assiomi: $\overline{(x \cap y)} = \bar{x} \cup \bar{y}$

$$\overline{(x \cup y)} = \bar{x} \cap \bar{y}$$

DEF. $x \leq y$ in B algebra di Boole $\Leftrightarrow x \cap y = x$

$$\Leftrightarrow x \cup y = y$$

Esercizio: le due formulazioni della def. di $\leq$ sono equivalenti.

Esercizio: $\leq$ è un ordine parziale: $x \leq x$; $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$; $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.

Esercizio: $x \cap y \leq x$ $x \cap y \leq y$ e $\forall z$ $z \leq x \wedge z \leq y \Rightarrow z \leq x \cap y$

$$x \cup y \geq x \quad x \cup y \geq y \quad \text{e} \quad \forall z \quad z \geq x \wedge z \geq y \Rightarrow z \geq x \cup y$$

Esercizio  è algebra di Boole



non è di Boole: $a \cap b = 0$, $b \cap c = c$, $b \cap c \cap e = 0 \dots$

Esercizio in B $\forall x, y$ $x \cap y = 0$ e $x \cup y = 1 \Rightarrow y = \bar{x}$

Ne segue che il mondo esempio non è un'algebra di Boole.

Proprio
 $A, B, C, \dots$ variabili proposizionali

$A \wedge B, B \wedge C \rightarrow A$ formule proposizionali

0 contraddizione 1 tautologia

H / equivalenza logica dove $H = \{ \text{formule} \}$

$$[\neg \varphi] = \neg [\varphi]$$

$$0 = [A \wedge \neg A]$$

$$1 = [A \vee \neg A]$$

$$[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$$

$$[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$$

È un'algebra di Boole.

Il minore diventa l'implicazione.

Se abbiamo n variabili, abbiamo 2^{2^n} elementi.

Esercizio

L'algebra di Boole definita è isomorfa alle parti di $\{1, \dots, 2^{2^n}\}$.

Questo vale per tutte le algebre di Boole finite.

$$\# \{P(N), \wedge, \vee, \neg, 0, 1\} = 2^{\aleph_0}$$

È una sottoalgebra $|B|$ di questa con $\# B = \aleph_0$.

$$\text{Sia } L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$$

$$(N, 0^N, 1^N, +^N, \cdot^N, \leq^N) \text{ } L\text{-struttura}$$

$$L\text{-formula } \varphi(x). \text{ Sia } \varphi(x) = \forall y \forall z (yz = x \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$$

Diciamo che $X \subseteq N$ è L -definibile se esiste una L -formula $\varphi(x)$

$$\text{tale che } Y = \{n \in N \mid N \models \varphi(n)\}$$

$$B = \{Y \mid Y \subseteq N, Y \text{ } L\text{-definibile}\} \subseteq P(N) \quad \# B = \aleph_0$$

Nel caso di insiemi infiniti possiamo prendere anche solo
alcune delle parti dell'insiemi.

Def.: $\mathcal{B}$ algebra di Boole (ad esempio $\mathcal{P}(I)$)

$F \subseteq \mathcal{B}$ è un filtro se:

1) $0 \notin F$

2) $\forall x, y \in F \rightarrow x \wedge y \in F$

3) $x \in F, x \leq y \rightarrow y \in F$

4) $1 \in F$

Ultrafiltro

5) $x \notin F \rightarrow \neg x \in F$

Esercizio: chiamare i filtri e gli ultrafiltri nell'algebra delle formule

Un insieme di formule è un filtro $\Leftrightarrow$ è coerente

Un insieme di formule è un ultrafiltro $\Leftrightarrow$ è vero e completo

Esempio: $\mathcal{B} = \{f \mid f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1\}\}$

$(f \wedge g)(x) = \min f_x, g_x$

$(f \vee g)(x) = \max f_x, g_x$

$\neg f(x) = 1 - f_x$

$0(x) = 0$

$1(x) = 1$

$\mathcal{B} \cong \mathcal{P}\{1, \dots, n\}$

Esercizio: in un'algebra di Boole $\neg \neg x = x$.

TEO. Algebra di Boole, $F \subseteq \mathcal{B}$ filtro $\Rightarrow \exists U \subseteq \mathcal{B}$ ultrafiltro $F \subseteq U \subseteq \mathcal{B}$.

DEF.: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ algebra di Boole, $L \subseteq \mathcal{B}$ è una pietra se

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in L \quad x_1 \wedge \dots \wedge x_n \neq 0$

TEO.: $\emptyset \neq L \subseteq \mathcal{B}$ pietra $\Rightarrow \exists F$ filtro $L \subseteq F \subseteq \mathcal{B}$

DEF.: $F = \{x \in \mathcal{B} \mid \exists n \exists x_1, \dots, x_n \in L \quad x \geq x_1 \wedge \dots \wedge x_n\}$

È vero che è un filtro. $\square$

OSS.: $F \subseteq \mathcal{B}$ filtro, $x \in \mathcal{B}$, $x \notin F \Rightarrow F \cup \{x\}$ è una pietra

DEF.: In $F \cup \{\neg x\}$ non è una pietra $\Rightarrow \exists f_1, \dots, f_n \in F$ tali che

$f_1 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \neg x = 0 \Rightarrow f_1 \wedge \dots \wedge f_n \leq x$

$\Rightarrow x \in F$. Assurdo. $\square$

Esercizio: idem: ogni algebra di Boole è isomorfa ad un'algebra di insiemi

TEO.: Un filtro $F \subset \mathcal{B}$ è un ultrafiltro se e solo se è minimale.

(Minimale: non esiste filtro $F' : F \subsetneq F' \subset \mathcal{B}$.)

D.D.: $\Rightarrow$ Oatofetto Orie

$\Leftarrow$ F filtro minimale.

$$x \notin F$$

$F \cup \{x\}$ si estende a un filtro che contiene F , ma per ipotesi

$$F \cup \{x\} = F \quad (\text{non può essere vera estensione propria})$$

Quindi $\{x\} \in F$. $\square$

LEMMA DI ZORN: Ordine parziale tale che ogni catena ha un maggiorante.
Allora in tutto l'ordine c'è un elemento minimale.

TEO.: Ogni filtro si estende a un ultrafiltro.

D.D.: Applico con all'insieme dei filtri ordinato rispetto al contenimento.

Avrei guardato: filtri che contengono il filtro di partenza.

Estensione di filtri: c'è un filtro che li contiene tutti; è l'unione di tutti.

In fatti $\bigcup F_i$ è un filtro perché gli F_i stanno in una catena.

Quindi usando il lemma di Zorn si ottiene la tesi in modo

breve (e un po' misterioso). $\square$

ALTRO D.D. PER $|\mathcal{B}| \leq \aleph_0$:

$|\mathcal{B}| < \aleph_0$ ovvio (gli ultrafiltri sono solo quelli minimali).

$$|\mathcal{B}| = \aleph_0$$

$$\mathcal{B} = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$F \subset \mathcal{B}$ filtro

Voglio U ultrafiltro $F \subset U \subset \mathcal{B}$

● Ho un induttivamente dei filtri $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$

$$F_0 = F$$

$$F_{i+1} = \begin{cases} \text{filtro contenente } F_i \cup \{b_{n_i}\} \end{cases}$$

$$F_{i+1} \supset F_i \cup \{b_{n_i}\} \text{ ma } b_{n_i} \notin F_i$$

$$F_{i+1} \supset F_i \cup \{b_{n_i}\} \text{ ma } b_{n_i} \notin F_i$$

Poi prendo $U = \bigcup_n F_n$: è un ultrafiltro. (ovvio)

La seconda dimostrazione funziona solo nei numerabili, qui non numerabili si può provare con l'induzione transfinita.

BERARDOCCI 12-10-2009

TEO. DI COMPATTEZZA $\forall T' \subset T$ finite $\exists M_{T'} \in \text{Mod}(T) \Rightarrow \exists M \in \text{Mod}(T)$

DIP.: $M = \prod_{T' \in I} M_{T'} / U$ dove $I = \{T' \mid T' \subset T \text{ finite}\}$

$U \subset \mathcal{P}(I)$ ultrafiltro

Voglio che f sia omom. di $T \Rightarrow M \models f$

Assumiamo ora $M \models f$

Possiamo usare il teorema di Los

$$(M \models f) \Leftrightarrow_{\text{Los}} X_f = \{T' \mid f \in T'\} \in U$$

Vogliamo un ultrafiltro U fatto in modo tale che $\forall f \in T \quad X_f \in U$

U esiste perché $\{X_f \mid f \in T\}$ è una prebase (da lì si intende a un filtro e poi a un ultrafiltro). Basta verificare che

$$f_1, \dots, f_n \in T \quad X_{f_1} \cap \dots \cap X_{f_n} \neq \emptyset$$

$$\text{Ma } T' = \{f_1, \dots, f_n\} \in X_{f_1} \cap \dots \cap X_{f_n}$$

E ci siamo. (ovvio)

Esempio

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} / U \quad U \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\text{DEF.: } \prod_{i \in I} A_i / U = \prod_{i \in I} A_i / V \quad \text{se } \forall i \quad A_i = B_i$$

Questo ultraprodotto si chiama ultraprodotto.

Esempio

$$\mathbb{R}^* = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} / U \neq \mathbb{R} \quad U \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ ultrafiltro non principale } L = \{0, 1, +, \cdot, \leq\}$$

$U = \text{cofinito}$

$\mathbb{R}^*$ è un anello ordinato

Quindi $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ (ovvio) Ma in realtà succedono cose strane:

$$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^* \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ma per il teorema di Los $\mathbb{R}^* \models \mathbb{R}$ con formule del primo ordine

sono indistinguibili.

$\exists E \in \mathbb{R}^* \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < E < \frac{1}{n}$ non è una formula nel linguaggio
perché i quantificatori sui naturali, che non possono essere definiti
nel linguaggio considerato.

~~$\exists E \in \mathbb{R}^* \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < E < \frac{1}{n}$~~

Consideriamo da $\mathbb{R} \in \mathbb{R}^* \quad \delta: \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^*$

$$x \mapsto \left\langle \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle$$

Basta verificare che δ è un'isomorfismo con la sua immagine: per
fare ciò vediamo che è iniettiva (ovvio). Inoltre $a+b=c \Rightarrow \mathbb{R}^* \models a+b=c$...

Ma δ non è surgettiva.

Sia $E = \left\langle \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle$, $E < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Inoltre $\delta = \left\langle \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\rangle \quad 0 < \delta < \frac{1}{n}$

Di solito si definiscono i reali come campo ordinato in cui insieme
limitato superiormente ha un sup:

$$\forall X \subset \mathbb{R} \text{ limitato sup } \exists a \left[(\forall u \in X \quad a \geq u) \wedge \forall a' < a \quad (a' > X) \rightarrow \exists a'' \in X \quad a' < a'' \right]$$

È del secondo ordine perché quantifica su insiemi.

In $\mathbb{R}^*$ questo assioma non vale: gli infinitesimi sono limitati,

ma non c'è il sup degli infinitesimi.

Un altro campo con un simile difetto è $\mathbb{R}[x]$ in cui si suppone
 $x > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ma $\mathbb{R}[x] \not\models \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ verifica $\forall a > 0 \rightarrow \exists b \quad b^2 = a$, ma per questo è falso in $\mathbb{R}[x]$.

Esempio

$$F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \quad p \text{ primo}$$

$$F^* = \prod_{p \in I} F_p / U \quad I = \{\text{primi}\} \quad U \text{ non principale, cioè } U \neq \text{ideale}$$

F_p ha caratteristica p , ma F^* ha caratteristica 0, infatti:

$$1_n = (\underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ volte}} \neq 0) \quad \text{per } n \text{ in quasi tutti gli } F_p \text{ (basta } p > n)$$

e quindi per il teorema di tes F^* ha caratteristica 0.

Come conseguenza di ciò $\exists M \models F^* \quad M \models Th(\text{campi di char 0}) \quad L(M) = 0$.

DEF.: A, B L -strutture

$A \subset B$ struttura $\Leftrightarrow \text{dom } A \subset \text{dom } B, \bullet \forall R \in L \quad R^A = R^B \cap A^n$

$$\bullet \forall f^A \in L \quad f^A \upharpoonright A^n = f^B \upharpoonright A^n, \forall c \in L \quad c^A = c^B$$

Esempio $(\mathbb{R}, +, \cdot, <) \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$

DEF.: A, B L -strutture

$$A \leq B \text{ se}$$

$$1) A \subset B$$

$$2) \text{ per ogni } \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ } L\text{-formula}$$

$$\forall a_1, \dots, a_n \quad A \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow B \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Esempio $(\mathbb{R}, +, \cdot, <) \not\leq (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$

perché $\exists x (x^2 = 2)$ è verificata nel secondo, ma non nel primo

$$\text{OSS.: } 1) A \leq B \Rightarrow A \equiv B$$

$$2) A \leq B \Rightarrow A \equiv B$$

$$3) A \subset B, A \equiv B \not\Rightarrow A \leq B$$

Esempio

$$A = (\mathbb{Z}, \leq) \quad B = (2\mathbb{Z}, \leq) \quad \text{interi pari}$$

$$A \equiv B \text{ e } B \subset A \text{ ma } B \not\leq A \text{ perché}$$

$$\exists x (2 \leq x \leq 4) \text{ vera in } A, \text{ falsa in } B$$

DEF.: ~~OSTO~~ $A \leq B \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow B \text{ inm. } A \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow B \models \varphi(fa_1, \dots, fa_n)$

cioè $A \leq B \Leftrightarrow A \stackrel{f}{\cong} A' \leq B$ e $A \leq B$ è il caso particolare

in cui f è l'identità

$$T\mathcal{D}: R \preceq R^* = \prod_{i \in \mathbb{R}} R / \nu$$

$$\text{In generale } M \preceq M^* = \prod_{i \in \mathbb{R}} M / \nu$$

$$\text{In altre termini } a_1, \dots, a_n \in M \quad f(x_1, \dots, x_n)$$

$$M \models f(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow M^* \models f(a_1, \dots, a_n)$$

$$\text{Esempio } (\mathbb{Q}, \leq) \prec (\mathbb{R}, \leq)$$

$$(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, \leq) \equiv (\mathbb{Z}, \leq)$$

TED. (forma più potente di Löwenheim Skolem in un)

$$\forall A \text{ L-struttura } \forall \kappa \text{ cardinale } \exists B \supset A \quad |B| > \kappa$$

$$\text{OSS: } \mathbb{Z}/\sim \cong A \Rightarrow \mathbb{Z}/\sim \cong A \quad (\text{e varie generalizzazioni})$$

$$\text{d.M.: } \exists x, y, z \left(x+y=y, x+z=z, y+z=x, \dots, x \neq y, y \neq z, x \neq z, \forall u (u=x \vee u=y \vee u=z) \right)$$

Ne segue la tesi. $\square$

TED. Löwenheim - Skolem ↑ debole

$$\text{con modelli infiniti} \\ \text{Teoria } \forall \kappa \text{ cardinale } \exists B \models T \quad |B| > \kappa$$

D.M.: più dimostrata.

$$\text{D.M. forte: } T = \text{ED}(A) = \{ f(x_1, \dots, x_n) \mid A \models f(x_1, \dots, x_n) \}$$

$$\mathcal{L}_A(A) = \{ f \mid A \models f \}$$

$$[\text{Esempio: } \text{ED}(A) \ni \pi > 3]$$

$$\text{Lema } B \supset A \Leftrightarrow B \models \text{ED}(A)$$

Però per avere il lemma di L.S. forte serve la L.S. debole. $\square$

D.M. Lema: $\Leftarrow$ (l'unico verso che serve)

$$A \preceq B \Leftrightarrow A \prec B \quad \text{finita}$$

completare la dim. per converso.

$$\text{Esercizio } B \models \text{ED}(A) \quad (\text{formula senza quantificatori}) \Rightarrow A \preceq B$$

TED. DI COMPLETEZZA (caso proposizionale) 0

DEF.: Un linguaggio proposizionale è un insieme $\{A_i \mid i \in I\}$ di simboli di A_i chiamati variabili proposizionali.

DEF.: Una L-formula proposizionale è (definita induttivamente)

- A_i
- $(\varphi \rightarrow \psi)$ dove φ e ψ sono L-formule
- $\neg \varphi$

DEF.: Una L-interpretazione è una funzione $M: L \rightarrow \{0,1\}$

M si estende a $M: L\text{-formula} \rightarrow \{0,1\}$:

$$M(\neg A) = 1 - M(A)$$

$$M(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{se } M(A) = 1, M(B) = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Una tautologia è una L-formula vera in tutte le L-interpretazioni.

DEF.: Una L-teoria T è un insieme di L-formule

$$T \models \varphi \Leftrightarrow \text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$$

$$\text{dove } \text{Mod}(\varphi) = \{M \mid M \models \varphi\}$$

$$\text{Mod}(T) = \bigcap_{\varphi \in T} \text{Mod}(\varphi)$$

DEF. Definizione + 26 Teorema di completezza direi $(T \vdash \varphi) \Leftrightarrow (T \models \varphi)$

DEF.: Gli assiomi logici (di Hilbert - Frege) sono le formule delle forme:

- 1) $\alpha \rightarrow \alpha$
- 2) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- 3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- 4) $(\neg \beta \rightarrow \neg \alpha) \rightarrow ((\neg \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$

Oss.1: Loro infiniti assiomi perché le formule sono arbitrarie.

Oss.2: Sono tutte tautologie.

DEF.: La regola di inferenza è :
$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

DEF.: Data una L. Teoria T

~~TEO.~~ $T \vdash p \Leftrightarrow \exists$ dimostrazione di di p da T

dove una dimostrazione è una successione finita $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ di formule tali che $\forall i$:

- $\varphi_i \in T$

- φ_i è assioma logico

- $\exists j, k < i$ tali che φ_j, φ_k per modus ponens (regole di inferenza)

In quest'ultimo caso $\varphi_i = \varphi_j \rightarrow \varphi_k$

~~TEO.~~ $T \vdash p \Leftrightarrow T \models p$

Oss.: L'assioma logico 1 si può dedurre da (2) + (3) quindi è superfluo.

TEO.: ~~$T \vdash p \Leftrightarrow T \models p$~~

COROLL. 1: $T \vdash p \Rightarrow \exists T' \subset T$ finito $T' \models p$

DEF.: $\perp = \neg(c \rightarrow c)$

COROLL. 2: $T \models \perp \Rightarrow \exists T' \subset T$ $T' \models \perp$

Quindi il calcolo equale al teorema di compattezza.

COR. 2 $\rightarrow$ COR. 1: $T \models p \Leftrightarrow T, \neg p \models \perp$

Quindi i due calcoli sono equivalenti ed equivalenti al teo. di compattezza.

DEF.: T è HF-completa se non esiste p tale che $T \vdash p$ e $T \vdash \neg p$

Esercizio Dimostrare che $\vdash \neg \neg a \rightarrow a$.

TEO.: T è HF-completa se e solo se $\exists p$ $T \not\vdash p$

DIM.: $\forall p$ $T \vdash p$ allora $\exists p$ $T \vdash p$ e $T \vdash \neg p$

Viceversa se $\exists p$: $T \vdash p$ e $T \vdash \neg p$. Data $\emptyset$ applico $T \vdash \emptyset$

1 Ax2 $\emptyset \rightarrow (\neg \emptyset \rightarrow \emptyset)$

2 Ax2 $\neg \emptyset \rightarrow (\neg \emptyset \rightarrow \neg \emptyset)$

3 $T \vdash \emptyset$

4 C. 1 $T \vdash (\neg \emptyset \rightarrow \emptyset)$

5 $T \vdash \neg \emptyset$

6 (2, 5) $T \vdash (\neg \emptyset \rightarrow \neg \emptyset)$

7 Ax1 $(\neg \emptyset \rightarrow \neg \emptyset) \rightarrow ((\neg \emptyset \rightarrow \emptyset) \rightarrow \emptyset)$

8 $T \vdash (\neg \emptyset \rightarrow \emptyset) \rightarrow \emptyset$

9 $T \vdash \emptyset$

TEO. 01 DEDUZIONE $T \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ se e solo se $T, \alpha \vdash \beta$

010. $\Rightarrow$ $T, \alpha \vdash \alpha \rightarrow \beta$

$T, \alpha \vdash \alpha$

~~Per la d.d.~~ $T, \alpha \vdash \beta$

$\Leftarrow$ La formula $\alpha \rightarrow \beta$ è una dim.

Per l'induzione su n mostro $T \vdash (\alpha \rightarrow \beta_i)$

$n=0$ i) $\beta_0 \in$ assiomi logici

ii) $\beta_0 \in T$

iii) $\beta_0 = \alpha$

con i) $T \vdash \beta$

$T \vdash \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

$T \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

ii) come i)

iii) $T \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$ Ax 1

Per induzione

i) $p_n \in$ assiomi logici

ii) $p_n \in T$

iii) $p_n = \alpha$

come caso base

~~Per induzione~~

iv) $\frac{p_j \quad p_i}{p_i}$ con $p_k = p_j \rightarrow p_i$

L'unico uso interessante è (iv)

Per induzione

$T \vdash (\alpha \rightarrow p_j)$

$T \vdash (\alpha \rightarrow (p_j \rightarrow p_i))$

Ax 3 $(\alpha \rightarrow (p_j \rightarrow p_i)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow p_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow p_i))$

MP $T \vdash (\alpha \rightarrow p_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow p_i)$

MP $T \vdash (\alpha \rightarrow p_i)$

E quindi per $i=n$ $T \vdash (\alpha \rightarrow \beta)$

$\square$

PROP.: $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T, \varphi$ è coerente.

DIM.: $\Rightarrow T, \neg \varphi \vdash \varphi$

$T, \neg \varphi \vdash \varphi$

Quindi è incoerente

$\Leftarrow T, \neg \varphi$ è coerente

$\exists$ un B (vero)

$T, \neg \varphi \vdash B$

$T, \neg \varphi \vdash \neg B$

$T \vdash \neg \varphi \rightarrow B$ tra. di deduzione

$T \vdash \neg \varphi \rightarrow \neg B$

$T \vdash (\neg \varphi \rightarrow B) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow B) \rightarrow \varphi)$ Ax 9

$T \vdash (\neg \varphi \rightarrow B) \rightarrow \varphi$

$T \vdash \varphi$

$\square$

LEMMA T HF-coerente, φ formula allora T, φ coerente o $T, \neg \varphi$ è coerente (possono essere anche tutte due).

DIM.: T, φ incoerente e $T, \neg \varphi$ incoerente. $\exists$ un B

$T, \neg \varphi \vdash B$

$T, \neg \varphi \vdash B$

$T \vdash \neg \varphi \rightarrow B$

$T \vdash \neg \varphi \rightarrow B$

$T \vdash (\neg \varphi \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow B) \rightarrow \varphi)$

(2MP) $T \vdash \varphi$

T, φ incoerente, T coerente

(La T è una teoria ^{coerente} si aggiunge un suo teorema φ che è coerente: si può usare la teoria nelle dimostrazioni). $\square$

Analogia

Base = coerente

Filtro = coerente debolmente chiuso

Ultrafiltro = coerente + massimale

DEF.: T è coerente massimale se $T \subseteq T'$ coerente $L(T) = L(T') \Rightarrow T = T'$

oss.: T coerente massimale $\Rightarrow \forall \varphi \in \mathcal{P} \Rightarrow \varphi \in T$ oppure $\neg \varphi \in T$

$\forall \varphi \in T \vdash \varphi$ oppure $T \vdash \neg \varphi$

DIM.: $T \not\vdash \varphi$ allora $T, \neg \varphi$ è coerente. Allora $T, \neg \varphi = T$, $\neg \varphi \in T$.

Perché $T, \neg \varphi$ coerente $\Rightarrow T \vdash \varphi$. $\square$

LEMMA DI LINDENBAUM T coerente $\Rightarrow \exists T' \supseteq T$ coerente massimale.

DIM.: $\{A_i \mid i \in I\}$ $I = \mathbb{N}$

allora $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\} = L$ -formale (picole)

In realtà segue dal teorema dei filtri applicato all'algebra di Boole con equivalenza ristretta

$T_0 = T$

$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se coerente} \\ T_n \cup \{\neg \varphi_n\} & \text{se no} \end{cases}$

$\varphi_n \in T_{n+1}$ o $\neg \varphi_n \in T_{n+1}$

$T' = \bigcup_n T_n$ è coerente massimale. Dimostrando

$T_0 \subset T_1 \subset \dots$ sono tutte coerenti. L'unione di teorie coerenti in catena è coerente perché se $\bigcup_n T_n$ dimostra una contraddizione lo dimostra in un numero finito di passi e quindi un certo T_n sarebbe incoerente (cosa che viene in catena). Quindi T' è coerente.

$\forall \varphi \quad \varphi \in T'$ oppure $\neg \varphi \in T'$, ma allora è massimale (non si può aggiungere altro). $\square$

TEO.: T consistente massimale $\Rightarrow \exists M \in \text{Mod}(T)$

DID.: $A_i \in L \quad M: L \rightarrow \{0,1\}$

$\vdash A_i \in T \quad M(A_i) = 1, \quad \neg \vdash A_i \in T \quad M(A_i) = 0.$

Per costruzione il modello rende vere le formule atomiche di $\mathcal{L}$.

Per induzione sulla lunghezza di φ dimostriamo che $\begin{cases} M(\varphi) = 1 \iff \varphi \in T \\ \Pi(\varphi) = 0 \iff \neg \varphi \in T \end{cases}$

Caso base $\varphi = A_i$ per costruzione

Caso $\varphi = \neg \psi$ caso: $M(\neg \psi) = 1 \iff M(\psi) = 0 \iff \psi \notin T \iff \neg \psi \in T$

Caso $\varphi = (\alpha \rightarrow \beta)$

$(\alpha \rightarrow \beta) \in T \stackrel{\text{proprietà}}{\iff} \beta \in T \text{ o } \alpha \notin T \Rightarrow M(\beta) = 1 \text{ o } M(\alpha) = 0 \text{ (induc.)}$

$\Rightarrow M(\alpha \rightarrow \beta) = 1$

Dimostriamo che $(\alpha \rightarrow \beta) \in T \Rightarrow \beta \in T \text{ o } \alpha \notin T$. Lo so:

$\begin{cases} \alpha \rightarrow \beta \in T \\ \neg \beta \in T \\ \alpha \in T \end{cases}$

Quesiti logici non per
 $(\alpha \rightarrow \beta) \notin T$ allora $\alpha \in T$ e $\neg \beta \in T$

Assunto quello per modus ponens $\beta \in T$. T.M.

COROLLARIO: T consistente $\Rightarrow$ T ha modello

COROLLARIO: $T \models \varphi \iff T \vdash \varphi$

DID.: $\vdash T \vdash \varphi \quad T, \neg \varphi$ è consistente $\Rightarrow T, \neg \varphi$ hanno modello $\Rightarrow T \not\models \varphi$.

Il viceversa è facile. T.M.

$\Leftarrow$ è detta completezza

$\Rightarrow$ è detta correttezza

Def. (conclusione): Sia $t_1, \dots, t_n$ una T-dimostrazione.

Per induzione su $i \leq n$ $T \models \varphi_i$

$i=1$ $t_1 \in T$ *ovvio*
 $\varphi_1 \in A_1, \dots, A_n$ *ovvio*

i $t_i \in T$ *ovvio*
 $\varphi_i \in A_1, \dots, A_n$ *ovvio*
 $\frac{\varphi_j \in T}{t_i} T \vdash \varphi_j \quad T \vdash \varphi_j \rightarrow \varphi_i \Rightarrow T \models \varphi_i$ *ma $i=2$ *ovvio**

Two predicates

HF predicates $L = \{ \text{costi, funz., rel.} \}$

$T \models \varphi$ si definisce analogamente al modello proposizionale $\text{Mod}(T) \subseteq \text{Mod}(\varphi)$

Definiamo $\vdash_{HF}$ nel caso $L = \{ \text{funz., rel.} \}$ e φ *due uguaglianze*.

A_1, A_2, A_3, A_4 $\varphi(t/x)$ tutte le occorrenze libere di x vanno sostituite con t

Regole logiche:

A_1, A_2, A_3, A_4

$A_5 \alpha(t) \rightarrow \exists x \alpha(x)$ in altri termini α formula $\alpha(t/x) \rightarrow \exists x \alpha$

$A_6 \forall x \alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$ cioè $\forall x \alpha \rightarrow \alpha(t/x)$ dove t è un termine sostituibile per x in α

Intendiamo t termine sostituibile per x in α se nessuna occorrenza libera di x in α compare entro una $\exists z \varphi$ e $\forall z \varphi$ con z variabile di t .

Regole:

MP

$\frac{\alpha \rightarrow B(x)}{\alpha \rightarrow \forall x B(x)}$ $x \notin \text{VL}(\alpha)$

$\frac{B(x) \rightarrow \alpha}{\exists x B(x) \rightarrow \alpha}$

$$\boxed{\text{Def. } T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi}$$

Def. Intendiamo:

ciò viene davanti a mettere: $\forall$

$$T \models \varphi \Leftrightarrow \forall M \text{ (se gli assiomi di } T \text{ sono universalmente veri in } M) \\ \Rightarrow \varphi \text{ è universalmente vera}$$

Ad esempio $p(x) \vdash p(x)$

Osserviamo che $P(x) \vdash P(y) \Leftrightarrow \forall x p(x) \rightarrow \forall y p(y)$

$$\vdash p(x) \rightarrow p(y) \Leftrightarrow \forall x \forall y p(x) \rightarrow p(y)$$

Quindi non è vero il teorema di deduzione se sono ~~variabili~~ variabili libere.

PROP.: Gli assiomi logici sono $\forall$ -veri in tutte le L -strutture.
Le regole preservano la $\forall$ -verità.

D.D.: Esempio $\frac{B(x) \rightarrow \alpha}{\exists x B(x) \rightarrow \alpha}$

$$M \models \forall x (B(x) \rightarrow \alpha)$$

$$M \models \exists x B(x) \rightarrow \alpha$$

~~$$\forall x (B(x) \rightarrow \alpha) \Rightarrow \exists x B(x) \rightarrow \alpha$$~~

$$\exists x B(x) \rightarrow \alpha \Leftrightarrow (\exists x B(x)) \vee \alpha \Leftrightarrow (\forall x \neg B(x)) \vee \alpha$$

$$\Leftrightarrow \forall x [\neg B(x) \vee \alpha] \Leftrightarrow \forall x [B(x) \rightarrow \alpha]$$

Ma in realtà non si dimostra nemmeno. È solo una ~~con~~ intuizione. Una da copiare finché si può quando copiare che è inutile.

COROLLARIO: $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$

Logiamo più il $\forall$. $\neg \exists x \neg f(x) =: \forall x f(x)$.

Ma è più facile.

TEO. DEDUZIONE : $T \cup \{a\} \vdash B \Leftrightarrow T \vdash a \rightarrow B$ a nuovo

$\Rightarrow$ modulo gamma

$\Rightarrow$ linea prima.

$(B_1, \dots, B_n)$ $T \cup \{a\}$ - dimostrazione

~~ipotesi~~

$\frac{B_i}{B_i} \quad i \leq n \quad B_i = \gamma(x) \rightarrow \theta \quad B_i = (\exists x \gamma(x)) \rightarrow \theta$

$T, \alpha \vdash \gamma(x) \rightarrow \theta$

$T \vdash \alpha \rightarrow (\gamma(x) \rightarrow \theta) \quad (A_1, \dots, A_n)$

$T \vdash \gamma(x) \rightarrow (\alpha \rightarrow \theta)$

$T \vdash \exists x \gamma(x) \rightarrow (\alpha \rightarrow \theta)$

Volendo si ragiona similmente per il

$T \vdash \alpha \rightarrow (\exists x \gamma(x) \rightarrow \theta) \quad \text{III}$

LEMMA DELLE COSTANTI : $T \vdash \alpha(c)$ c costante c non è menzionato
negli assiomi di T allora $T \vdash \forall x \alpha(x)$.

DIO.: $T \vdash \alpha(c)$

$T \vdash \alpha(c)$ stessa dimostrazione di $T \vdash \alpha(c)$ con c al posto di x

$T \vdash \forall x \alpha(x)$ regola del $\forall$

$T \vdash \alpha(x)$

$T \vdash \forall x \alpha(x)$

Non ci mette subito la $\forall$ perché poteva comparire nella dimostrazione
di $T \vdash \alpha(c)$.

DEF.: T è di Herkin ($T \in L$ -teoria) se per ogni L -enunciato $\exists x \beta(x)$
esiste c costante $c \in L$ $T \vdash \exists x \beta(x) \rightarrow \beta(c)$

COROLL.: T Herkin $T \vdash \exists x \beta(x) \Rightarrow T \vdash \beta(c)$

Esempio

$T = Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ è coerente massimale
 $\{ \varphi \mid \mathbb{R} \models \varphi \}$

Ma non è di Henkin: $\exists x (x^2 = 2)$, ma non c'è $\sqrt{2}$.

Esempio $T = Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1) = \{ \varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi \}$

è "quasi" di Henkin (devo considerare anche i termini)

2 casi: $\mathbb{N} \models \exists x B(x)$ allora $T \vdash \exists x B(x) \rightarrow B(0)$

$\mathbb{N} \models \exists x B(x)$ allora $T \vdash \exists x B(x) \rightarrow B(\underbrace{1+\dots+1}_{n\text{ volte}})$

BERARDUCCI 29-10-2009

Teorema di completezza predicativa per una lingua con simboli "=" e nuove funzioni.

Le costanti e relazioni.

DEF. T è sintatticamente coerente se non esiste nessuna formula φ chiusa tale che $T \vdash \varphi$ e $T \vdash \neg \varphi$.

LEMMA φ chiusa, T coerente $T \cup \{ \varphi \}$ o $T \cup \{ \neg \varphi \}$ è coerente sintatticamente.

DIM.: Se no $\perp = (A \wedge \neg A)$

$T, \varphi \vdash \perp$ $T, \neg \varphi \vdash \perp$

$T \vdash \varphi \rightarrow \perp$ $T \vdash \neg \varphi \rightarrow \perp$

deduzione

tautologia $(\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow ((\neg \varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)$

Modus ponens ~~2 volte~~ $T \vdash \perp$. Assunto. $\textcircled{M}$

~~DEF.~~ T coerente $\Rightarrow \exists T' \supset T$ coerente T' completa e ~~sintatticamente~~

COROLL.:

deduttivamente chiusa (cioè per ogni φ chiusa, $\varphi \in T$ o $\neg \varphi \in T$).

DIM.: Usare il lemma di König e il lemma precedente: prende T' massimale coerente e vede che per il lemma sopra non c'è niente da aggiungere. $\textcircled{V2}$

LETINA: T coerente è una L -teoria, $L' = L \cup \{c\}$, $\exists x \varphi(x)$ L -formula chiusa
 $\Rightarrow T \cup \{\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)\}$ è coerente come L' -teoria.

DIM.: Se no

$$T, \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \vdash \perp$$

$$T \vdash (\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c)) \rightarrow \perp \quad \text{deduzione}$$

$$\text{tautologia} \quad (A \rightarrow B) \rightarrow \perp \Leftrightarrow A$$

$$(\varphi \rightarrow B) \rightarrow \perp \Rightarrow \neg B$$

$$T \vdash \exists x \varphi(x)$$

$$T \vdash \neg \varphi(c)$$

Ma per il lemma delle costanti (c non stava negli assiomi)

$$T \vdash \forall x \neg \varphi(x)$$

Si dimostra, per esercizio che $\vdash \forall x \neg \varphi(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \varphi(x)$

(volendo possiamo considerarlo come nuovo assioma logico).

Ma allora T non è coerente. $\square$

Oss.: Questo punto di vista sintattico è tutto più semplice (il lemma di sopra).

TEO. T coerente $\Rightarrow \exists T' \supset T \quad L(T') \supset L(T) \quad T'$ coerente di Henkin.

DIM.: ~~non si può fare~~

~~Definiamo T^*~~

$$L^* := L \cup \{c_\varphi \mid \exists x \varphi(x) \in L\text{-formule chiuse}\}$$

$$T^* := T \cup \{\exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c_\varphi) \mid \varphi \text{ L-formula in } x\}$$

T^* è coerente, altrimenti ci sarebbe una sottoteoria finita incoerente, ma per finiti assiomi aggiunti a T basta applicare finiti volte il lemma.

Per iterare:

$$T_0 = T$$

$$T_{n+1} = T_n^*$$

$$T' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n \quad T' \text{ è coerente di Henkin}$$

T' è coerente perché unione di una catena di coerenti.

T' è di Henkin con linguaggio L' . Una L' formula $\exists x \varphi(x)$ è tale che

$\exists \varphi \exists x \varphi(x)$ è una L_0 formula $\Rightarrow T_{n_0+1} \vdash \exists x \varphi(x) \rightarrow \varphi(c_\varphi) \Rightarrow T'$ è di Henkin. $\square$

TEO.: T coerente $\Rightarrow \exists T' \supset T$ $L(T') \supset L(T)$ coerente, di Herkin e
 proprieta massima.

DIM.: Prima la rete di Herkin, poi la rete coerente massima e
 rete di Herkin. $\square$

TEO.: T coerente massima di Herkin $\Rightarrow T$ ha un modello M .

Definendo $M = \{ \text{simboli di costanti di } L(T) \}$

DIM.: $\text{dom } M = \{ c \mid c \text{ simbolo di costante} \}$

$c^M = c$ (interpretiamo c con c)

$R \in L$ simbolo di relazione n -aria

$R^M \subseteq \text{dom}(M)^n$

$\langle \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n \rangle \in R^M \Leftrightarrow \text{Dato } R(c_1, \dots, c_n) \in T$

M e' chiama modello dei termini e delle costanti.

Verifica che M e' un modello di T $M \models T$

Se T contiene una espressione della forma $R(c_1, \dots, c_n) \vee \neg R(c_1, \dots, c_n)$

allora quella e' vera per costruzione. Basta lavorare per T chiuso (da questo segue per Target)

Lavoriamo ora per induzione sulla lunghezza di φ (dim) Mostro che: $\varphi \in T \Rightarrow M \models \varphi$

$\varphi \in T \Rightarrow M \models \varphi$

$\varphi \notin T \Rightarrow M \not\models \varphi$

(i) $\varphi = (\alpha \rightarrow \beta)$

$(\alpha \rightarrow \beta) \in T \Rightarrow \alpha \notin T \vee \beta \in T \Rightarrow M \not\models \alpha \vee M \models \beta$

$\Rightarrow M \models \alpha \rightarrow \beta$

$(\alpha \rightarrow \beta) \notin T \Rightarrow \alpha \in T \wedge \beta \notin T \Rightarrow M \models \alpha \wedge M \not\models \beta \Rightarrow M \not\models (\alpha \rightarrow \beta)$

① L e' $\alpha \in T$ e $\neg \beta \in T$ $\alpha \rightarrow \beta \in T \Rightarrow M \models \beta \in T$ assurdo

② Analogo a ①.

(ii) $\varphi = \neg \alpha$ e' banale

(iii) $\varphi = \exists x \alpha(x)$

$\exists x \alpha(x) \in T \Rightarrow \alpha(c) \in T \Rightarrow M \models \alpha(c) \Rightarrow M \models \exists x \alpha(x)$

$\exists x \alpha(x) \notin T \Rightarrow \forall c \in L \alpha(c) \notin T$
 $\vdash \alpha(c) \rightarrow \exists x \alpha(x)$
 versione logica

$\Leftrightarrow \forall c \in L M \not\models \alpha(c) \Leftrightarrow M \models \neg \exists x \alpha(x)$
 induzione
 $\alpha(c)$ e' più corto
 semantica

Abbiamo visto che:

$$t \text{ termine} \quad t^M = a$$

$$M \models \varphi(a) \Leftrightarrow M \models \varphi(c)$$

$$(iv) \quad \forall \text{ simile a } \exists. \quad \square$$

COROLLARIO Se una teoria ha un modello M allora $|M| \in |L|$.



Löwenheim-Skolem all'indietro

TEO. COMPLETEZZA CON "=", FUNZIONI, RELAZIONI E COSTANTI

~~Relazioni, funzioni, costanti~~

$$T \text{ coerente, massimale, d. Skolem} \Rightarrow \exists M \quad M \models T$$

DIM.: ~~IP~~ = tutto come prima, tenere la costruzione di M .

$$M = \{ [t] \mid t \in L \text{ termine} \}$$

$$[t_1] = [t_2] \Leftrightarrow (t_1 = t_2) \in T$$

$$c^M = [c] \in M$$

$f \in L$ simbolo di funzione

$$f^M : M^n \rightarrow M$$

$$f^M([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$$

$$\text{LEMMA} \quad t^M = [t]$$

$$\begin{aligned} \text{Esempio lemma: } f(c, f(c, c))^M &= f^M(c^M, f^M(c^M, c^M)) \quad (\text{semantica di } f^M) \\ &= f^M([c], f^M([c], [c])) = f^M([c], [f([c], [c])]) = \\ &\quad \uparrow \text{nel nostro modello} \\ &= [f([c], [f([c], [c])])]. \end{aligned}$$

Abbiamo già da dimostrare che $[]$ è una rel. di equivalenza. Ci sono ancora altri assiomi per =

A2 ~~AB~~ $x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$

AB ~~AB~~ $x = x$

A3 ~~AB~~ $x = y \rightarrow y = x$

A10 ~~AB~~ $x_1 = y_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$

Quindi f^M è ben definita.

Che dobbiamo definire le interpretazioni della relazione.

Altro assioma:

$$\text{III } \forall x \forall y (x=y \rightarrow (\dots \rightarrow x_n=y_n \rightarrow R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(x_1, \dots, y_n)))$$

GERARUCCI 2.11.2009

~~Test~~

Esercizio

t termine

$$\vdash t=t$$

$$\text{SOL.: } \vdash \forall x \ x=x \quad A8$$

$$\vdash \forall x \ x=x \rightarrow t=t \quad A6$$

$$\vdash t=t \quad (\text{modus ponens})$$

Proseguiamo la dim. del ter. di completezza.

Interpretiamo i simboli di relazione e funzione e costante

$$c^M = [c]$$

$$f^M([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$$

$$\langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle \in R^M \Leftrightarrow T \vdash R(t_1, \dots, t_n)$$

Ossia che $M \models T$, anzi ~~anche~~ si ha $\{p \mid M \models p\} = T$.

Per induzione su t chiusa

$$p \in T \Rightarrow M \models p$$

$$p \notin T \Rightarrow M \models \neg p$$

LEMMA $e^M = [e]$

Dim.: Per induzione sulla lunghezza di t . $\square$

Caso base ① $p = (t_1 = t_2)$ ② $R(t_1, \dots, t_n)$

$$\text{① } (t_1 = t_2) \in T$$

$$t_1 \sim t_2$$

$$[t_1] = [t_2]$$

$$t_1^M = t_2^M$$

$$M \models t_1 = t_2$$

② $R(t_1, \dots, t_n) \in T$

$\langle [t_1], \dots, [t_n] \rangle \in R^m$

$\langle t_1^M, \dots, t_n^M \rangle \in R^m$

$M \models R(t_1, \dots, t_n)$

Analizzante $t_1 = t_2 \notin T \Rightarrow M \models \neg(t_1 = t_2)$

$R(t_1, \dots, t_n) \notin T \Rightarrow M \models \neg R(t_1, \dots, t_n)$

Principi: caso base α . Caso induttivo:

Se $\varphi = \neg \theta$, $\varphi = (\alpha \rightarrow \beta)$ già fatto

$\varphi = \exists x \alpha(x) \in T$

$\varphi = \exists x \alpha(x) \notin T$

$\exists x \alpha(x) \rightarrow \alpha(c) \in T$ $c = c_2$

altrimenti $\forall a \in U \alpha(a) \notin T$

$\alpha(c) \in T$

(già $\vdash \alpha(t) \rightarrow \exists x \alpha(x)$)

$M \models \alpha(c)$

$M \models \neg \alpha(c)$

$M \models \exists x \alpha(x)$

$M \models \neg \alpha([t])$

$M \models \forall x \neg \alpha(x)$ perché dom $M = \{[t] \mid t \text{ chiuso}\}$

$M \models \neg \exists x \alpha(x)$

Il $\forall$ segue dall'esiste. $\square$

~~Coroll.~~

Oss.: T ha modello $\Leftrightarrow \forall T = \{ \forall x \varphi \mid \varphi \in T \}$ ha modello

COROLL.: T coerente $\Leftrightarrow T$ ha modello.

DID.: $[T \text{ coerente} \Leftrightarrow \forall T \text{ coerente}]$

Abbiamo dimostrato che $T \vdash \forall x \alpha(x) \Leftrightarrow T \vdash \alpha(c)$ dove c non compare tra i simboli usati nelle formule di T .
Ma allora $T \vdash \alpha(x)$ ($T \vdash \alpha(c)$ e $T \vdash \alpha(x)$ hanno medesima dimostrazione).

$T \subseteq T'$ coerente minimale di Herbrand $L \subseteq L' \Rightarrow \exists M' \models T'$ (c.v.)

Ma allora $M = M' \upharpoonright L \models T$ $\square$

COROLL.: $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$ φ chiusa

DID.: $T \models \varphi \Leftrightarrow T, \neg \varphi$ non ha modelli $\Leftrightarrow T, \neg \varphi$ incoerente

$\Leftrightarrow T, \neg \varphi \vdash \perp \Leftrightarrow T \vdash (\neg \varphi \rightarrow \perp) \Leftrightarrow T \vdash \varphi$. $\square$

In particolare $T \models \varphi(x)$

$T \vdash \varphi(x)$

$T \models \forall x \varphi(x) \Rightarrow T \vdash \forall x \varphi(x)$

COROLL.: ~~Esiste~~ $\exists$ algoritmo per enumerare $\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{L} \}$. a ogni n si associa φ_n .

DIM.: Per enumerare le dimostrazioni. $\square$

$\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{L} \}$ è allora ricorsivamente enumerabile.

TEO.: Non esiste un algoritmo per stabilire se $\varphi \models \varphi$.

DIM.: Computo.

Questo significa che non è ricorsivo.

COROLLARIO: T è una $\mathcal{L}$ -teoria. T ha un modello $\Rightarrow T$ ha un modello $\leq |\mathcal{L}|$.

LSJ ~~Esiste~~ $\{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{L} \}$ dove $|\mathcal{L}| = \# \mathcal{L}$ -formule

$\varphi \models \varphi \Rightarrow |\mathcal{L}| = \# \mathcal{L}$ -formule

$\varphi \models \varphi \Rightarrow |\mathcal{L}| = \# \mathcal{L}$ -formule

DIM.: T ha modello $\Rightarrow$ (esistenza) $\Rightarrow T$ coerente $\Rightarrow \exists T' \supset T$ coerente max di elementi

con $|\mathcal{L}'| = |\mathcal{L}| \Rightarrow$ il modello dei termini (quoziente) $\leq |\mathcal{L}'\text{-termini}| = |\mathcal{L}'| = |\mathcal{L}|$.

COROLL.1: Se ZF ha un modello, ne ha uno numerabile.

COROLL.2: $Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) = \{ \varphi \mid \mathbb{R} \models \varphi \}$ ha un modello numerabile M .

$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists p \neq 0 \ p \in \mathbb{Q}[x] \ p(x) = 0 \}$.

$Th(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ non ha l'assione di completezza.

DIM. COROLL.1: $L(ZF) = \{ \epsilon \}$

Assioni

$\forall x (x \in x \leftrightarrow x \in x) \rightarrow x = x$

uguaglianza

$\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \varphi(t))$

φ -formula

$\exists x \forall t (t \notin x)$

vuoto

$\forall a b \exists c \forall t (t \in c \leftrightarrow t = a \vee t = b)$

coppia

$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists t \in x \ u \in t)$

unione

$\forall x \exists y \forall t (t \in y \leftrightarrow t \in x)$

parti

$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow \exists s u \in s))$

infinito

$\exists z (z \in x \wedge \forall t \in z (t \in z))$

$u = \{u\}$

$\forall x \exists u \in x \forall u' \in x \ u' \notin u$

$\forall x \exists! y \varphi(x, y) \rightarrow \forall a \exists b \forall t (t \in b \leftrightarrow \exists u \in a \ \varphi(u, t))$

$\frac{\varphi}{\exists x}$

$\Rightarrow$ funzione (include insieme che appartengono a a)

riempimento

$\forall x (\forall a b \in x \ a \neq b \rightarrow a \cap b = \emptyset) \Rightarrow \exists z \forall a \in x \ |z \cap a| = 1$ scelta

ZF \ infinita ha come modello

$$M = \{\text{insiemi ereditariamente finiti}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = V_\omega$$

$$V_0 = \emptyset$$

$$V_{n+1} = \mathcal{P} V_n \quad \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots \quad (\text{come più dei naturali})$$

con l'appartenenza ereditaria

come tutto rimane l'assioma dell'infinito.

$$V_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$$

$$(N, R) \models ZF \setminus \text{inf}$$

$$r \in R \Leftrightarrow K = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i 2^i \quad \varepsilon_i \in \{0, 1\} \quad \varepsilon_0 = 1$$

$$\text{cioè } r \in 2^{\mathbb{N}} \text{ con } 1 + \dots + 2^{a_n} \text{ } \exists: a = a_n$$

Questo verifica tutti gli assiomi.

$$0 = \emptyset$$

$$r = 2^{a_1} + \dots + 2^{a_n} \cong \{a_1, \dots, a_n\}$$

$$N \xrightarrow[\cong]{\cong} V_\omega$$

$$(N, R) \cong (V_\omega, \in) \models ZF \setminus \text{inf}$$

$$\text{Quindi pure } (N, R) \models ZF \setminus \text{inf}$$

ZF $\subset$ T coerente max di Henkin

M modello dei termini

$$\exists x (\forall t (t \in x) \in ZF)$$

$$\exists x (\forall t (t \in x) \rightarrow \forall t (t \neq \emptyset) \in T) \quad \text{quindi ci } [\emptyset] \in M$$

$$\forall a, b. \exists z (t \in z \Leftrightarrow t = a \vee t = b) \in ZF$$

$$T \vdash \exists z (t \in z \Leftrightarrow t = \emptyset \vee t = \emptyset)$$

$$T \vdash t \in \{\emptyset\} \Leftrightarrow t = \emptyset$$

Quindi quantano tutti gli elementi di V_ω .

$$ZF \vdash \varphi: \forall x \exists y \forall t (t \in x \Leftrightarrow t \in y \wedge \varphi(t))$$

$$T \vdash \exists y \forall t (t \in x \Leftrightarrow t \in \bar{x} \wedge \varphi(t)) \quad \bar{x} \text{ costante di } T$$

$$T \vdash \forall t (t \in \{\bar{x} \mid \varphi(t)\} \Leftrightarrow t \in \bar{x} \wedge \varphi(t))$$

Nel caso di x $\exists \bar{x}$ sulla x $\exists \bar{x} \dots$ chiamare $\bar{x}$ sulla x .

$\{\emptyset\} \in$ sulla x ? ma T $\vdash$ coerente massimale di Henkin.

In pratica per creare il modello ho dato dei nomi alle cose definite con
 def. 3 e, per la massimalità di T , ho preso delle decisioni per
 le cose ~~esse~~ "analitiche".

Questo permette di ottenere un modello numerabile per $\mathcal{L}_F$. $\square$

Ma $P(\mathbb{N})$ non è numerabile!! Il problema è che non c'è una funzione
 surgettiva dentro $\mathcal{L}_F$, ma da fuori ~~potremmo~~ più esterni.

BERARDUCCI 5-11-2004

DIM L50 : T ha modello $\Leftrightarrow T \neq \perp \Leftrightarrow T \not\models \perp \Leftrightarrow T$ coerente

~~$\Rightarrow T$ ha il modello dei termini $M, |M|$~~

$\Rightarrow T$ ha un'estensione T' coerente massimale di Henkin

$\Rightarrow T'$ ha modello dei termini $M \Rightarrow |M| \leq |\text{termini } L'| = |L'|$.

Oss.: $|L'| = |L|$

DIM.: Ricordiamo come è fatto L' :

$$L_0 = L$$

$$L_{n+1} = L_n \cup \{c_p \mid \exists x, y (x \in L_n \text{ formula})\}$$

$$L' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$$

$$\text{tra } \mathbb{Q} \mid L_{n+1} \mid = |L_n| + |L_n| = |L_n|$$

$$\Rightarrow |L'| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |L_n| \leq \aleph_0 \cdot \sup |L_n| = \aleph_0 \cdot |L_0| = |L|. \quad \square$$

Quindi M , che è anche modello di L , è tale che $|M| \leq |L|$. $\square$

In realtà è vero che M può essere proprio scelto come un sottomodello
 del modello di partenza. Questa è detta forma forte di L50.

$\mathbb{Z} \models$ ha un modello numerabile. Come può essere?

$$M \models \exists x \text{ (x non numerabile)}$$

$$M \models |\mathcal{P}(w)| > w$$

$$M \models \neg \exists f \text{ qualsiasi } w \rightarrow \mathcal{P}(w)$$

Sketch non esiste $f \in M$ $M \models f: w \rightarrow \mathcal{P}(w)$ qualsiasi

$$M \models \mathcal{P}w = \{x \mid x \subseteq w\}$$

$$M \models \forall x \ x \in \mathcal{P}w \iff x \subseteq w$$

$$\forall x \in M \ M \models x \in \mathcal{P}w \iff x \subseteq w$$

$$(\mathcal{P}w)^M = (\mathcal{P}w) \cap M$$

Per noi (che ci illudiamo di stare nel vero modello, ma forse ci è un altro che ci guarda da fuori) $\exists g: N \rightarrow \mathcal{P}w \cap M$ l'unica $g \notin M$.
Ma in M non c'è questa funzione (il modello di $\mathbb{Z} \models$).

2.2.1 ACF_0 (corpi algebricamente chiusi di caratteristica 0) è completa.

$$L = \{0, 1, +, \cdot\}$$

Azioni:

• Azioni dei corpi

- $\forall a_0, \dots, a_d \ \exists x \ a_d x^d + \dots + a_0 = 0$ (infiniti assiomi, uno per grado)
- $1 + 1 + \dots + 1 \neq 0$ (altre infiniti assiomi)

~~Teorema~~ $\mathbb{C} \models ACF_0$ ed è completa, ma non ha un unico modello

C'è una teoria analoga per i reali: RCF . Anche questa è completa, ma non categorica (ha tanti modelli per LS^T e LS^B).

Oss.: Le uniche Teorie categoriche sono finite (LS^T ha una ipotesi che c'è un modello finito).

Oss.: T categorica $\Rightarrow T$ completa

Oss.: T completa $\Leftrightarrow \forall A, B \models T \quad A \equiv B$ (elementarmente equivalenti)

Def.: T completa. Dato $\varphi \quad T \vdash \varphi \Rightarrow A, B \models \varphi$ e $T \vdash \neg \varphi \Rightarrow A, B \models \neg \varphi$

$\Leftrightarrow$ Se T non fosse completa $\exists \varphi \quad T \nvdash \varphi$ e $T \nvdash \neg \varphi \Rightarrow$ esistono modelli non equivalenti. $\square$

Già del

Intuitivamente $f: A \rightarrow B$ è calcolabile se esiste un algoritmo che data ~~un input~~ ^{una rappresentazione di} $a \in A$ dopo un numero finito di passi fornisce ~~l'output~~ ^{una rappresentazione di} $b = f(a)$.
Il concetto di calcolabile potrebbe dipendere dalle rappresentazioni.

Esempio 1

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se tu non giochi più} \\ 1 & \text{se no} \end{cases}$$

Non è calcolabile perché su un computer volere il doppio, che lo stesso tempo.

Esempio 2

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

È costante $\Rightarrow$ è calcolabile (anche se non si conosce l'algoritmo).

Funzioni $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$

Funzioni primitive ricorsive $\subset$ intuitivamente calcolabili

OEP: Primitive ricorsive: ~~$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$~~ ~~$f(x) = x+1$~~

• $z(x) = 0$

• $s(x) = x+1$

• $\cup_i^n (x_1, \dots, x_n) = x_i$

• composizione

• ricorrenza primitiva cioè $f(0) = a$, $f(n+1) = h(n, f(n))$, h primitiva ric.

Si dice che f è ottenuta per ricorrenza da h e da a .

• ricorrenza con parametri ~~$f(0, \vec{z})$~~ $f(n+1, \vec{z}) = h(n, \vec{z}, f(n, \vec{z}))$

$$f(0, \vec{z}) = a(\vec{z}) \quad f \in REC(h; a)$$

Primitive ricorsive $\subset$ μ -ricorsive

Altre alla con di prima fanno μ -ricorrenza

$$f(n) = \mu x \ h(n, x) = 0 \quad (\text{intuitivamente min } x)$$

$$f(n, \vec{z}) = \mu x \ h(n, x, \vec{z}) = 0 \quad \text{versione def. precisa}$$

Oss.: f è una funzione parziale: $f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, cioè $\text{dom } f \subseteq \mathbb{N}^k$

Ma a questo punto anche la h potrebbe essere parziale.

DEF.: $f(n) = a$

DEF.: $f(n) = a \wedge h(n, x) = 0$

$f(n) = a \wedge \forall b \leq n \quad h(n, b) \downarrow \neq 0 \quad \wedge \quad h(n, a) \downarrow = 0$

$\wedge \text{ se } f(n) \uparrow$

9-11-2004

Esempio

$f: \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \{0, 1\}$

$f(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in \mathbb{Z} \quad p(\bar{x}) = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

È intuitivamente calcolabile perché.

Teorema:

funzioni primitive ricorsive $\subseteq$ intuitivamente calcolabili totali

Esempio ~~non~~ per l'induzione stretta: funzione di Ackermann.

$A: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{cases} A(x+1, y+1) = A(x, A(x+1, y)) \\ A(x+1, 0) = A(x, 0) \\ A(0, y) = y+1 \end{cases}$$

Si dimostra che è ben definita e totale ma non primitiva ricorsiva, ~~però~~ è calcolabile.

Teorema di Church: $\text{primitiva ricorsiva} \equiv \text{intuitivamente calcolabile parziale}$

LEMMA $f(x, y) = g(y, x) \quad g: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ primitiva ricorsiva $\Rightarrow f$ primitiva ricorsiva

Dim.: Una funzione definita per composizione è del tipo $f(x_1, \dots, x_n) = h(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$
 $f(x, y) = g(u_1^2(x, y), u_1^2(x, y))$ è ~~total~~ primitiva ricorsiva. $\square$

LEMMA: $+$ $: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ è primitiva ricorsiva

Dim.: $0 + x = x$

$$s \cdot x + x = s(\cdot + x)$$

$$+ (sx, y) = h(x, + (y, x)) \quad \text{dove } h(a, b) = sb = s u_2^2(a, b)$$

Quindi OK. $\square$

Analogamente:

LEMMA: $\cdot : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ è primitiva ricorsiva

$\div : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ è primitiva ricorsiva dove $x \div y = \begin{cases} x-y & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

DEF.: $P \subset \mathbb{N}^k$ primitiva ricorsiva $\Leftrightarrow \chi_P : \mathbb{N}^k \rightarrow \{0,1\}$ è primitiva ricorsiva

TEO.: $P(\vec{x}), Q(\vec{x})$ primitivi ricorsivi $\Rightarrow P(\vec{x}) \wedge Q(\vec{x}), P(\vec{x}) \vee Q(\vec{x}), \neg P(\vec{x})$ sono primitivi ricorsivi.

Varianti notevoli. Equivalentemente:

TEO.: $P \subset \mathbb{N}^k, Q \subset \mathbb{N}^k$ PR. $P \cap Q, P \cup Q, \mathbb{N}^k - P$ PR

DIM.: $\chi_{P \cap Q}(\vec{x}) = \chi_P(\vec{x}) \cdot \chi_Q(\vec{x})$

$$\chi_{\mathbb{N}^k - P}(\vec{x}) = 1 - \chi_P(\vec{x})$$

$$\chi_{P \cup Q}(\vec{x}) = \chi_{(P \cap Q)^c} \quad \square$$

TEO.: Definizioni per cui sono primitivi ricorsivi h_1, h_2 sono PR e $f(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{se } P(x) \\ h_2(x) & \text{se } \neg P(x) \end{cases}$

DIM.: $f(x) = \chi_P(x) h_1(x) + \chi_{\neg P}(x) h_2(x)$ $\square$

Esempio $\max(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y \\ y & \text{se } x < y \end{cases}$

TEO.: $f(\vec{x}, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} h(k, \vec{x})$ è PR se $h \in \text{PR}$

DIM. Triv. $\square$

Oss.: $P(x,y) \Leftrightarrow \exists k < y \quad Q(k, \vec{x})$

$$\chi_P(\vec{x}, y) = \text{sg} \sum_{k < y} \chi_Q(k, \vec{x})$$

Quindi:

TEO.: 2 quantificatori limitati sono primitivi ricorsivi.

Infine:

TEO.: $P(x) \Leftrightarrow \forall u, v \leq x \quad (uv = x \rightarrow u=1 \vee v=1)$ è PR

DIM.: $\Rightarrow$ si fa con $\neg, \vee, \wedge$

$$= \text{si fa con } \geq, \leq \quad \square$$

{formule} = {espressioni finite di simboli} $\simeq$ {espressioni finite di numeri} $= \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N}^3 \cup \dots$

Vogliamo definire una funzione di codifica da $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$.

$$\text{cod}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{cod}(\langle \rangle) = 0$$

$$\text{cod}(\langle a_0, \dots, a_n \rangle) = \prod_{i=0}^n p_i^{a_i+1} \quad p_i = i\text{-esimo numero primo}$$

cod è iniettiva per il teorema di unicità della scomposizione in fattori primi.

cod non è PR perché non è ~~definita~~ definita su $\mathbb{N}^*$.

$$\text{Def: } \text{Estrai}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ PR tale che } \text{Estrai}(\text{cod}(\langle a_0, \dots, a_n \rangle), i) = a_i$$

$$\text{D.M.: } \text{Estrai}(s, i) = \mu a \leq s \quad p_i^{a+1} \nmid s$$

$$x|y \Leftrightarrow \exists d < y \quad (xd=y) \quad \text{è PR}$$

$i \mapsto p_i$ è PR perché $p_0 = 2$ e $p_{n+1} = h(p_n)$ dove $h(z) = \mu x \leq z!+1 \quad (\text{primo}(x) \wedge x > z)$ è il minimo numero primo.

Resta da dimostrare che μ limitata è PR. Poi avremo completato la dim. $\square$

BERAROUCCI 12-11-2004

$$\text{LEMMA} \quad f(\vec{x}, y) = \mu x \leq z \quad P(\vec{x}, y) = \begin{cases} \min x \leq z \quad P(\vec{x}, y) & \text{se } \exists x \leq z \quad P(\vec{x}, y) \\ z & \text{se } \nexists x \leq z \quad P(\vec{x}, y) \end{cases}$$

Se P è primitiva ricorsiva $\Rightarrow f$ è primitiva ricorsiva

$$\text{D.M.: } f(\vec{x}, 0) = 0$$

$$f(\vec{x}, y+1) = \begin{cases} f(\vec{x}, z) & \text{se } \exists x \leq z \quad P(\vec{x}, y) \\ z+1 & \text{se } \nexists x \leq z \quad P(\vec{x}, y) \end{cases} \quad \square$$

COROL.: Idem per $\mu x \leq h(z) \quad P(x, y)$ se h è PR

Questo completa la dim. dell'ultima osservazione della lezione precedente.

Alfingiamo un po' di funzioni utili:

$$\text{Def. } \text{lh}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{lh}(s) = \mu i \leq s \quad p(i) \nmid s$$

è tale che $\text{lh}(\text{cod}(\langle a_0, \dots, a_n \rangle)) = n+1$

$$\text{Def. } \text{cat}: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{cat}(\langle a_0, \dots, a_n \rangle, \langle b_0, \dots, b_n \rangle) = \langle a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \rangle$$

$$\text{cat}(s, s') = \mu t \leq p(s) \cdot p(s') \quad (\forall i < \text{lh}(s) \quad \text{Estrai}(t, i) = \text{Estrai}(s, i)$$

$$\forall j < \text{lh}(s') \quad \text{Estrai}(t, \text{lh}(s)+j) = \text{Estrai}(s', j))$$

Il limite è giusto perché $\langle a_0, \dots, a_n \rangle = p(0)^{a_0+1} \dots p(n)^{a_n+1} \leq p(n)^T \dots p(n)^T = p(n)^{nT}$
 quindi ci riesce a dare un bound.

Esercizio Fibonacci è PR.

L'idea è quella di usare una codifica delle coppie e vedere se $\langle f(n), f(n+1) \rangle \mapsto \langle f(n+1), f(n+2) \rangle$

Dim.: $H(x) = \langle f(x), f(x+1) \rangle = 2^{f(x)+1} \cdot 3^{f(x+1)+1}$

$$H(0) = \langle 0, 1 \rangle = 2^1 \cdot 3^2 = 18$$

$$H(n+1) = \langle \text{Estrai}(1, H(n)), \text{Estrai}(0, H(n)) + \text{Estrai}(1, H(n)) \rangle$$

$$f(n) = \text{Estrai}(0, H(n)) \quad \text{Dimando } f \text{ è PR. } \square$$

~~TEO. di ricorrenza: se $f(n)$ è funzione dei valori precedenti, allora $f(n)$ è PR.~~

Dim. Analogia a Fibonacci. $\square$

Esercizio (simile a Fibonacci)

$$f(0) = a \quad g(0) = b$$

$$f(n+1) = h(f(n), g(n)) \quad g(n+1) = h'(f(n), g(n))$$

$$h, h' \text{ PR} \Rightarrow f, g \text{ PR.}$$

TEO.: $h: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ PR

$$f(x) = h(x, \langle f(0), \dots, f(x-1) \rangle)$$

$$f(0) = h(0, \langle \rangle) = h(0, 0)$$

Allora f è PR.

di ricorrenza sul decimo dei valori.

Dim.: $f^*(x) = \langle f(0), \dots, f(x) \rangle = \prod_{i=0}^{f(x)+1}$

$$f^*(0) = \langle f(0) \rangle = \langle h(0, 0) \rangle$$

$$f^*(n+1) = \text{cat}(f^*(n), h(n, f^*(n)))$$

$$\Rightarrow f^* \text{ è PR} \Rightarrow f \text{ è PR} \quad f(n) = \text{Estrai}(lh f^*(n) - 1, f^*(n))$$

$$L_{PA} = \{0, s, +, \cdot\}$$

$$\text{cod} : (L_{PA}\text{-formula}) \xrightarrow{\text{iniettiva}} \mathbb{N}$$

Scelgo numeri naturali distinti: $\#(0), \#(s), \#(+), \#(\cdot), \#(=), \#(\neg), \#(\wedge), \#(\vee),$
 $\#(\Rightarrow), \#(\forall), \#(\exists), \#(v), \#(t_1), \#(t_2)$ (necodifica dei simboli)

$$\text{Idem per } L_{ZF} = \{\epsilon\}$$

Codifica dei termini

$$\ulcorner v_i \urcorner = \langle \#(v), i \rangle$$

$$\ulcorner 0 \urcorner = \#(0)$$

$$\ulcorner s(t) \urcorner = \langle \#(s), \ulcorner t \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner t_1 + t_2 \urcorner = \langle \#(+), \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner t_1 \cdot t_2 \urcorner = \langle \#(\cdot), \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$$

Codifica delle formule

$$\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner = \langle \#(=), \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner = \langle \#(\wedge), \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \neg \varphi \urcorner = \langle \#(\neg), \ulcorner \varphi \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner = \langle \#(\vee), \ulcorner \varphi \urcorner, \ulcorner \psi \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \forall v_i. \varphi \urcorner = \langle \#(\forall), \ulcorner v_i \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner \rangle \text{ etc.}$$

$$\text{TEO.: } \{n \mid \exists \text{ termine } n = \ulcorner t \urcorner\}$$

$$\{n \mid \exists \text{ formula } n = \ulcorner \varphi \urcorner\}$$

$$\text{TEO.: } \varphi \mapsto \ulcorner \varphi \urcorner \text{ iniettivo}$$

$$\text{DIP.: Per induzione. (1)}$$

$$\text{DIP.: } \text{term} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\text{term}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ codifica un termine} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{term}(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = \ulcorner 0 \urcorner \vee \exists i < n \left(\text{term}(i) \wedge n = \langle \#(s), i \rangle \right) \\ \vee \exists i, j < n \left(\text{term}(i) \cdot \text{term}(j) = 1 \wedge n = \langle \#(+), i, j \rangle \right) \\ \vee \exists i, j < n \left(\dots \dots \dots n = \langle \#(\cdot), i, j \rangle \right) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{Analogo per le formule. (2)}$$

PROP.: $\exists \text{ sub}: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$ P.R.

$$\text{sub}(\ulcorner \varphi \urcorner, i, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner \varphi(t/v_i) \urcorner$$

90.: Quelle che è importante è che:

~~$$\text{sub}(\ulcorner \forall v_i \varphi \urcorner, i, \ulcorner t \urcorner) = \ulcorner \forall v_i \varphi \urcorner$$~~

$$\text{sub}(\ulcorner \forall v_i \varphi \urcorner, i, \ulcorner t \urcorner) = \begin{cases} \langle \#(v_i), \ulcorner \varphi \urcorner, \text{sub}(\ulcorner \varphi \urcorner, i, \ulcorner t \urcorner) \rangle & \text{se } i \neq i \\ \ulcorner \varphi \urcorner & \text{se } i = i \end{cases}$$

Gli altri casi sono ovvi. I dettagli sono un esercizio. 172

Da un punto di vista semantico non ha anche un'altra def. di sostituzione:

$$\models \varphi(t/v) \iff \forall v (v=t \rightarrow \models \varphi)$$

E la verifica che la sostituzione è PR è più facile.

Esercizio

$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \text{ formula logica} \}$ P.R.

Ad esempio si codifica la formula $\forall x \varphi \rightarrow \varphi(t/x)$ $\langle \#(v_i), i \rangle$ (bisogna dire chi è v_i perché i nomi finiscono a priori)

$$\exists l (\exists i, \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \langle \#(-), \langle \#(v_i), i \rangle, \text{sub}(\ulcorner \varphi \urcorner, i, n) \rangle \in l)$$

$$\text{Form}(l) = 1, \text{Term}(n) = 1 \text{ e } "n \text{ è sostituibile per } i \text{ in } l"$$

dove "n sostituibile" si dice con un turchetto.

Oss.: x è sostituibile al posto di x in φ

$$\varphi(x/x) = \varphi(x/x)$$

Un termine è sostituibile se non tutte le sue variabili lo sono.

Esercizio

~~Formula~~

$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \text{ formula di PA} \}$ è PR

$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \text{ formula di ZF} \}$ è PR

d è una dimostrazione di φ da PA è PR

Ma $\exists d$ (d è una dimostrazione di φ da PA) non è PR

~~Ma PA non è~~

Quindi:

$\{ \vdash \varphi \mid \text{PA} \vdash \varphi \}$ non è PR

Esercizio

Definisco $h(n) = \mu d$ (formula(n) $\wedge$ dimostrazione(d, n)) è calcolabile
PR

Definisco $teo(n) \leftrightarrow \text{formula}(n) \wedge \exists d \text{ dim}(d, n)$

$\leftrightarrow \text{formula}(n) \wedge \exists d < h(n) \text{ dim}(d, n)$

Ma questo non significa che $teo(n)$ è calcolabile? Il problema è che h non è totale.

Concludiamo che $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è parziale calcolabile e non è estendibile a una totale calcolabile.

DEF.: $(d, n) \in \text{Dim}_{PA} \subset \mathbb{N}^2$

$\downarrow$ per

d codifica una dim in PA della formula codificata da n

TEO.: $\text{Dim}_{PA} \in PR$

DIT.: ~~(R, d) $\in$ PR~~ 1) d codifica una successione $\Leftrightarrow \forall i < p(d) \mid d \mapsto \forall j < i \mid p(j) \mid d \in PR$.

$\wedge$ 2) d codifica una successione di codifiche di formule:

$\Leftrightarrow d$ codifica una successione e $\forall i < lh(d)$ Formula (Estrai(i, d))

$\wedge$ 3) $Estrai(lh(d), d) = \ulcorner$

$\wedge$ 4) $\forall i < lh(d)$ ~~che~~ $\{ \text{Assione}_{PA}(Estrai(i, d))$

$\vee \dots$

$\vee \exists j, k < i \mid \exists k \mid Estrai(j, d) = a ; Estrai(k, d) = \langle \#(\ulcorner), a, b \rangle$
 $Estrai(i, d) = b$

$\vee$ altre regole

VIII

tes $\varphi_A \in \mathcal{N}$

$\text{tes}_{\varphi_A} = \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid \text{PA} \vdash \varphi \}$ è ricorsivamente enumerabile $= \exists \text{ ric} = \exists \text{ PR}$

$$\{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid \exists d \langle d, n \rangle \in \text{Dom}_{\varphi_A} \}$$

Def.

PA } è in grado di "parlare" degli insiemi PR , RIC , $\mathcal{N}$.

$\mathbb{ZF}$ }
in $\mathbb{ZF}$:

~~TEO. Come definire i numeri di Zermelo in $\mathbb{ZF}$~~

$$x = 0 \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall y (y \notin x)$$

$$y = sx \iff \forall u \in x \forall v \in x \forall u (u \in y \iff u \in x \vee u = x)$$

$$\text{Quindi } y = \underline{2} \iff y = ss0 \iff \exists a, b \ a = 0 \ b = sa \ y = sb$$

$$\text{in } \mathbb{ZF} \quad \varphi(\underline{2}) \iff \exists x (x = \underline{2} \wedge \varphi(x)) \iff \forall x (x = \underline{2} \rightarrow \varphi(x))$$

$$\text{in } \mathbb{ZF} \text{ posso dire } 3^{100} = 4$$

TEO.: Esiste una formula $\varphi(x, y, z) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{N}$
 $a^b = c \implies \mathbb{ZF} \vdash \varphi(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$
 $a^b \neq c \implies \mathbb{ZF} \vdash \neg \varphi(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$
 cioè x^y è rappresentabile in $\mathbb{ZF}$ enumerabile in $\mathbb{ZF}$

$$1^a \text{ D.M.: } \varphi(x, y, z) \iff |x^y| = |z| \iff |\{ f \mid f: y \rightarrow x \}| = |z|$$

$$\iff \exists H: \{ f \mid f: y \rightarrow x \} \rightarrow z \text{ suriettiva (funzione perché } z \text{ ha } n \text{ elementi)}$$

$$2^a \text{ D.M.: } \text{Zermelo: } x^y = z \iff \exists \langle a_0, \dots, a_y \rangle \ (a_0 = 1 \wedge a_y = z \wedge \forall i < y \ a_{i+1} = a_i \cdot x)$$

$$\iff \exists f \ (f \text{ funzione} \wedge \text{dom } f = y+1 \wedge \forall i < y \ f(i+1) = f(i) \cdot x)$$

$\uparrow$ iterazioni di moltiplicazione
 $\uparrow$ $\forall a, b \ (a, b) \in f \rightarrow a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N}$
 $\uparrow$ $\{ \{a\} \cup \{a, 1\} \}$

$$\textcircled{\varphi_{exp}(x, y, z)}$$

si dice anche $f(i+1)$

il pr. supposto di averlo già fatto

Per indurre su x si dimostra che la formula è giusta

cioè valgono le proprietà richieste. $\square$

In modo simile si definiscono tutte le funzioni primitive ricorsive.

in PA ~~non~~ non può quantificare sulle funzioni. Come sono le successioni e le codifiche delle successioni, ma per fare le codifiche delle successioni non già l'essenziale.

L'idea è di fare codifiche usando il teorema cinese dei resti.

$$\text{Con}(\mathbb{Z}F) = "\mathbb{Z}F \nvdash 1"$$

Comunque minimo:

$$\mathbb{Z}F \vdash^? \text{Con}(\mathbb{Z}F)$$

$$\text{giacché } \text{Con}(\mathbb{Z}F) \Leftrightarrow \neg \exists d (d, \ulcorner 1 \urcorner) \in \text{Dim}_{\mathbb{Z}F}$$

$$\text{Dim}_{\mathbb{Z}F} \subset \mathbb{N}^2 \text{ è PR cioè } \chi_m: \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0,1\} \quad \chi_m(d,n) = \begin{cases} 1 & \text{se } (d,n) \in \text{Dim}_{\mathbb{Z}F} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è primitiva ricorsiva.

Quindi possiamo per quanto detto prima $\exists$ formula di 3 argomenti:

$$\varphi(x,y,z) \text{ tale che } \begin{cases} (d,n) \in \text{Dim}_{\mathbb{Z}F} \Rightarrow \mathbb{Z}F \vdash \varphi(\underline{d}, \underline{n}, \underline{1}) \\ (d,n) \notin \text{Dim}_{\mathbb{Z}F} \Rightarrow \mathbb{Z}F \vdash \varphi(\underline{d}, \underline{n}, \underline{0}) \end{cases}$$

$\uparrow$
 $\neg \varphi(\underline{d}, \underline{n}, \underline{1})$

Partendo possiamo chiederci se

$$\mathbb{Z}F \vdash^? \neg \exists d \varphi(\underline{d}, \underline{1}, \underline{1})$$

$$\mathbb{Z}F \vdash^? \neg \exists d \varphi(\underline{d}, \underline{1}, \underline{1}) \quad \text{cioè } \mathbb{Z}F \vdash^? \text{Con}(\mathbb{Z}F)$$

~~Quindi se $\mathbb{Z}F$ è coerente~~

Il teorema che dimostriamo è:

$$\text{Se } \mathbb{Z}F \text{ è coerente} \Rightarrow \mathbb{Z}F \nvdash \neg \text{Con}(\mathbb{Z}F)$$

Il problema è come fare la stessa cosa in PA.

È vedesi che:

$$\mathbb{Z}F \vdash \text{Con}(\text{PA})$$

$$\text{PA} \nvdash \text{Con}(\text{PA})$$

$$L(Q) = \{0, s, +, \cdot\}$$

$$\text{ASSIOMI} \left\{ \begin{array}{l} sx = sy \rightarrow x = y \\ 0 \neq sx \\ x \neq 0 \rightarrow \exists y \, s(y) = x \\ x + 0 = x \\ x + sy = s(x+y) \\ x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot sy = x \cdot y + x \end{array} \right.$$

~~Non esiste un modello di L in cui elementi~~

$\{\text{numeri standard}\} := \{t^M \mid L\text{-termini chiusi } t\}$ dove $L' = \{0, s\}$

$+$ e $\cdot$ ristretti ai numeri standard sono definiti in modo unico

$$\text{bss.} : \mathbb{Z}[x]^+ \models Q$$

$$\downarrow$$

$$p(x) = \sum a_i x^i \quad a_i \in \mathbb{Z}, \quad a_n > 0 \quad \text{oppure} \quad p(x) < 0$$

$$PA = Q + \left[p(0, ?) \wedge \forall x (p(x, ?) \rightarrow p(sx, ?)) \rightarrow \forall x \, e(x, ?) \right]$$

$$PA \vdash \forall x \exists y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$$

$$\mathbb{Z}[x]^+ \not\models \forall x \exists y (x = 2y \vee x = 2y + 1)$$

$$\text{Data } n \in \mathbb{N} \quad n = s^n(0) = s \dots s(0)$$

$\mathbb{N}$ è l'unico modello dell'aritmetica di Peano del secondo ordine.

$$\text{PROP.} : a, b \in \mathbb{N} \quad Q \vdash s^a(0) + s^b(0) = s^{a+b}(0)$$

$$\text{D.I.N.} : \text{Per induzione su } b \quad s^a(0) + 0 = s^a(0)$$

$$s^a(0) + s^{b+1}(0) = s(s^a(0) + s^b(0)) = s(s^{a+b}(0)) = s^{a+b+1}(0) \quad \square$$

$$\text{Analogamente} : \forall a, b \in \mathbb{N} \quad Q \vdash s^a(s^b(0)) = s^{a+b}(0)$$

$$\text{Data } t \text{ L-termini chiuso } \exists n \in \mathbb{N} \quad Q \vdash t = s^n(0)$$

D.I.N. : Per induzione sulla lunghezza del termine

$$t = t_1 + t_2 \quad \exists a, b \in \mathbb{N} \quad Q \vdash t_1 = s^a(0) \quad Q \vdash t_2 = s^b(0)$$

$$\Rightarrow Q \vdash t_1 + t_2 = s^{a+b}(0). \text{ Lo stesso si fa per } t = t_1 \cdot t_2 \text{ e } t = st_1. \quad \square$$

Unicità: $\mathcal{Q} \vdash s^a 0 = s^b 0 \Rightarrow a = b$

D/N.: ~~Induzione su a~~ In $a < b$ $b = a + k$. Induzione su a.

$s^a(0) = s^{a+k}(0)$ per induzione $\bullet 0 = s^k(0)$ $k \neq 0$, assurdo. $\square$

DEF.: $x \leq y \Leftrightarrow \exists z (z + x = y)$

PROP. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{Q} \vdash \forall x (x \leq s^n 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = s0 \vee \dots \vee x = s^n 0)$

D/N.: Induzione su n $\mathcal{Q} \vdash \forall x (x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0)$

$M \models \mathcal{Q} \quad x \in M \quad x \leq 0 \Leftrightarrow x = 0$ ~~per D/N.~~

$\Downarrow$
 $\exists z (z + x = 0) \Leftrightarrow x = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ ovvio

$\boxed{\Rightarrow}$ $z + x = 0 \xrightarrow{?} x = 0$

se $x \neq 0$ $\exists y \quad x = sy$ ~~per D/N.~~ $z + sy = s(z + y) \neq 0$. $\times$

Caso induttivo.: Per un modello $x \leq s^{n+1} 0 \Leftrightarrow x \leq s^n 0 \vee x = s^{n+1} 0$

$x \leq s^{n+1} 0 \quad \exists z \quad z + x = s^{n+1} 0$

Caso 1: $x = 0$ OK

Caso 2: $x \neq 0 \quad x = sy \quad z + sy = s^{n+1} 0$

$s(z + y) = s^{n+1} 0$

$z + y = s^n 0$

$y \leq s^n 0$

OK per ipotesi induttiva $\square$

Quindi i numeri standard come tutti.

COROLL.: $\forall a \in \mathbb{N} \quad \mathcal{Q} \vdash \varphi(s^a 0)$

$\mathcal{Q} \vdash \forall x \in s^n(0) \quad \varphi(x)$

lavora con $\exists$.

(cioè i quantificatori limitati si possono portare dentro)

~~TEOREMA~~

DEF.: $\mathcal{D}_0$ formule limitate:

atomiche $\in \mathcal{D}_0$

$\alpha, \beta \in \mathcal{D}_0 \Rightarrow \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta, \neg \alpha$ ~~OK~~, $\alpha \rightarrow \beta \in \mathcal{D}_0$

$\varphi \in \mathcal{D}_0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{N} \quad \varphi(x), \exists x \in \mathbb{N} \quad \varphi(x)$ e termine

Quindi:

Def.: $A = \{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{N}^n \mid \mathcal{M} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \}$ con $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}_0$
 $\Rightarrow A$ è PR.

Esempio: numeri primi.

Def.: $\varphi \in \mathcal{L}_0$ chiusa $\mathcal{M} \models \varphi \iff Q \vdash \varphi$

Def.: $\varphi \in \mathcal{L}_0$ chiusa $\Rightarrow Q \vdash \varphi$ o $Q \vdash \neg \varphi$

Def.: φ è determinata se $Q \vdash \varphi$ o $Q \vdash \neg \varphi$

Induzione su $\varphi \in \mathcal{L}_0$ φ è determinata
 $\#(\neg \vee \rightarrow \forall \exists) \vdash \varphi$

Base $t_1 = t_2$ $\exists a, b$ $Q \vdash t_1 = s^a 0$ $Q \vdash t_2 = s^b 0$

Se $a = b$ $Q \vdash t_1 = t_2$

Se $a \neq b$ $Q \vdash t_1 \neq t_2$

Caso $\vee$ α, β determinati $\Rightarrow \alpha \vee \beta$ è determinata

$Q \vdash \alpha$ $Q \vdash \beta \Rightarrow Q \vdash \alpha \vee \beta$

$Q \vdash \alpha$ $Q \vdash \neg \beta \Rightarrow Q \vdash \alpha \vee \beta$

$Q \vdash \neg \alpha$ $Q \vdash \beta \Rightarrow Q \vdash \alpha \vee \beta$

$Q \vdash \neg \alpha$ $Q \vdash \neg \beta \Rightarrow Q \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

ovviamente!

Caso $\forall$

$\forall x \in t$ α chiusa $\Rightarrow t$ chiusa $t = s^a 0$

In induzione $\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(n)$ sono determinati

Se $Q \vdash \neg \alpha(i) \Rightarrow Q \vdash \neg \forall x \in t \alpha(x)$ (vedere p.p. precedentemente dimostrata.)

Se $Q \vdash \alpha(0) \wedge \dots \wedge \alpha(n) \Rightarrow Q \vdash \forall x \in t \alpha(x)$

Analizziamo gli altri p.p. e concluderemo facilmente

Coroll.: $\Sigma_1 := \exists \mathcal{L}_0$ $\varphi \in \Sigma_1$ chiusa $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow Q \vdash \varphi$

Dim.: $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \exists n \in \mathcal{N}$ $\mathcal{M} \models \alpha(n) \Rightarrow Q \vdash \alpha(n) \Rightarrow Q \vdash \exists x \alpha(x)$

$\Pi_1 := \forall \mathcal{L}_0$

$\Sigma_1 \subset \Sigma_2 := \exists \forall \mathcal{L}_0 \subset \Sigma_3 \subset \dots$

$\mathcal{L}_0 \subset \Pi_1 \subset \Pi_2 := \forall \exists \mathcal{L}_0 \subset \Pi_3 \subset \dots$

Una formula vera e non dimostrabile per lo meno è 17.

Def: "teoria ricorsiva" è Π_1 : $\forall d$ (d non dimostra un'inesistenza)

2 teoremi di Tarski, di Gödel sono Π_1 .

$$Q_0 \subset PR \subset RIC$$

$$\exists Q_0 \supset \exists PR = \exists RIC \text{ e si chiamano ricorsivamente enumerabili}$$

Una proiezione di quelli altri: $B = \{y \mid \exists x (x, y) \in A\}$ dove $A \in Q_0, PR, RIC$.

BERARDUCCI 23-11-2004

DEF: ~~$\varphi \in Q_0$ è una formula quantificata su φ con limiti~~

$$\text{oss.: } \mathbb{N} \models \forall x, y (x+y = y+x)$$

$$\mathbb{Q} \not\models \forall x, y (x+y = y+x)$$

$\varphi \in \Pi_1$ vera in $\mathbb{N}$

$PA \not\models \varphi$ è più complicato

$$\mathbb{N} \models \forall x (\exists y \leq x (2y = x \vee 2y+1 = x))$$

$$\mathbb{Q} \not\models \forall x (\exists y \leq x (2y = x' \vee 2y+1 = x))$$

TEO.: A, B modelli di Q con $A \leq B$ ($\leq$ ^{iniziale} $\rightarrow$ A è una $\leq$ -struttura iniziale: è una $\leq$ -struttura cioè $f_A = f_B|_A$, $\cdot_A = \cdot_B|_A$, ecc.; è iniziale, cioè $a \in A, b \in B$ $b \leq a \Rightarrow b \in A$) e data $\varphi \in Q_0$ ^{con quantificatori in A} , allora $A \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$.

È intuitivo, comunque non lo dimostreremo.

$$\text{oss.: } A \models Q \Rightarrow \mathbb{N} \subset A \text{ iniziale}$$

$$\text{dm.:} \text{ Averemo visto che } \mathbb{Q} \vdash \forall x (x \leq 5^{\circ} 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee \dots \vee x = 5^{\circ} 0)$$

$$\text{COROLL.: } \varphi \in Q_0 \quad \mathbb{N} \models \varphi \rightarrow \mathbb{Q} \vdash \varphi$$

È una recente dimostrazione di una cosa che avevamo già dimostrata in altre occasioni.

DEF.: $A \subseteq \mathbb{N}^k$ è limitabile in Q se esiste una formula in k variabili $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ tale che $(n_1, \dots, n_k) \in A \Rightarrow \mathbb{Q} \vdash \varphi(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k)$ $\underline{n} = 5^{\circ} 0$ e se $(n_1, \dots, n_k) \notin A \Rightarrow \mathbb{Q} \vdash \neg \varphi(\underline{n}_1, \dots, \underline{n}_k)$

Lemma

$$A \subseteq Q_0^{\mathbb{N}} \Rightarrow A \text{ è limitabile}$$

Teo

$$A \text{ è limitabile in } Q \Leftrightarrow A \text{ è ricorsivo}$$

DEF.: $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ è numerabile in $\mathcal{Q} \Leftrightarrow G(f) \in \mathbb{N}^{***}$ è numerabile.

DEF.: $f: \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ è numerabile funzionalmente in $\mathcal{Q}$ da f se è numerabile e $\forall n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N} \quad \mathcal{Q} \vdash \exists! x \varphi(n_1, \dots, n_k, x)$

oss.: secondo la prima def. potrebbe esserci un x standard e uno (o più) non standard.

La nostra definizione esclude questa possibilità.

TEO.: f primitiva ricorsiva $\Rightarrow f$ numerabile funzionalmente in $\mathcal{Q}$

DID.: Richiedi vari lemmi.

LEMMA: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ numerabili funzionalmente $\Rightarrow h = f \circ g$ lo è. Analogamente in più variabili.

DID.: f derivata da f_f e g da f_g .

$$f_h(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \exists z [f_g(x, z) \wedge f_f(z, y)]$$

Dimostriamo che f_h numerica b.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad h(n) = n \quad \mathcal{Q} \models f_g(n, n) \wedge \exists! x \varphi(n, x)$$

$M \models \mathcal{Q}$ in M : supponiamo che $g_n = a$ e $f_a = n$.

$$\begin{aligned} & f_g(n, n) \quad f_f(a, n) \\ \Rightarrow & \exists x [f_g(n, x) \wedge f_f(x, n)] \\ \Rightarrow & f_h(n, n) \end{aligned}$$

Quindi numerica. Dimostriamo che h è funzionalmente.

$$L \text{ in } M \quad z \in M \quad f_h(n, z)$$

$$\exists x f_g(n, x) \wedge f_f(x, z)$$

$$\text{Esiste } x \text{ tale che } x = g_n = a \quad f_f(a, z) \quad z = f_a = n$$

Quindi h è unica. 

La funzione successore è parte del linguaggio ($f_3(a, y) \equiv (y = a+1)$);
o $f_2(x, y) \equiv (y = 0)$ funzione zero; $f_{42}(x_1, \dots, x_6, y) \equiv (y = a_{42})$.

Quindi per ottenere tutte le primitive ricorsive, nasce la ricorsione.

TEO. CINESE: $\exists$ una $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ $\forall i \neq j \quad (a_i, a_j) = 1$

$\exists$ una $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \exists x \quad x \equiv b_i \pmod{a_i} \quad \forall i.$$

LEMMA: $\forall n, x \quad \exists d > x : d+1, 2d+1, 3d+1, \dots, nd+1$ sono primi tra loro.

DIM.: $d = x!$ dove $x > \max\{n, x\}$

$$p \mid (i-j)d \Rightarrow p \mid i-j \text{ o } p \mid d \Rightarrow p \mid x!$$

$$\text{Ma } p \mid x! \Rightarrow p \mid d, \text{ ma } p \mid id+1 \Rightarrow p \mid 1, \text{ assurdo.}$$

$re(x, y)$ = resto divisione di x per y .

$$re(x, y) = x \Leftrightarrow \exists q \leq x \text{ s.t. } (x = qy \wedge re(x, y) = 0) \Rightarrow re(x, y) \in \mathbb{D}_0$$

$\Rightarrow$ è numerabile.

Definiamo la funzione B di Gödel.

$$\text{DEF.: } B: \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \quad B(c, d, i) = re(c, (i+1)d+1)$$

osservazioni da fare

Oss.: $B \in \mathbb{D}_0$ perché pro numerare

$$B(c, d, i) = x \Leftrightarrow \exists z \leq (i+1)d+1 \quad (z = (i+1)d+1 \wedge re(c, z) = x)$$

TEO.: $\forall n \quad \forall b_0, \dots, b_n \in \mathbb{N} \quad \exists c, d \quad \forall i \leq n, B(c, d, i) = b_i$

DIM.: $\exists$ d tale che $d+1, 2d+1, \dots, nd+1$ sono primi tra loro e $\exists b_i$.

$$c \equiv b_i \pmod{(i+1)d+1} \quad \forall i. \quad (\text{ben def. } \mathbb{D} \text{ grazie a cinese}).$$

$$\Rightarrow re(c, (i+1)d+1) = b_i \Rightarrow B(c, d, i) = b_i.$$

Oss.: B è numerabile ($\in \mathbb{D}_1$).

LEMMA: $f(\vec{z}, 0) = g(\vec{z})$

$$f(\vec{z}, y+1) = h(\vec{z}, y, f(\vec{z}, y))$$

g, h numerabili funzionate in $\mathbb{Q} \Rightarrow$ anche f lo è.

DIM.: g numerabile g , h numerabile h . Definisco

$$f(\vec{z}, y, z) \equiv \text{esiste successione } \langle f(\vec{z}, 0), \dots, f(\vec{z}, y) \rangle \text{ di cui } z \text{ è l'ultimo elemento}$$

$$\equiv \exists c, d \quad (B(c, d, 0) = g(\vec{z}) \wedge \dots)$$

$$\equiv \exists c, d \quad (B(c, d, 0) = g(\vec{z}) \wedge \dots)$$

Verifichiamo che una formula è Δ_1 se ammettiamo $\forall$ limitati ed $\exists$ qualsiasi.

Secondo questa definizione la formula che abbiamo scritto è Σ_1 .

Verifichiamo che φ_f rappresenta f .

$$f(\vec{a}, b) = z \Rightarrow \exists a_0, \dots, a_b \in \mathbb{N} \text{ tale che } a_0 = g(\vec{a}), a_b = c \text{ e } \forall i < b \text{ } a_{i+1} = h(\vec{a}, i, a_i)$$

$$\Rightarrow \exists c, d \quad B(c, d, 0) = g\vec{a} \wedge B(c, d, b) = z \wedge \dots$$

$$\Rightarrow \models \varphi_f(\vec{a}, b, z)$$

Esisto c, d che vanno bene. Vale $B(c, d, 0) = g\vec{a}$. Quindi: $Q \vdash \varphi_g(\vec{a}, B(c, d, 0))$

φ_g rappresenta g in Q

$$Q \vdash \varphi_h(c, d, b, v)$$

$$\text{Diciamo } i < b \text{ vale } B(c, d, i+1) = h(\vec{a}, i, B(c, d, i))$$

$$\forall i < b \quad Q \vdash \varphi_h(\vec{a}, i, B(c, d, i), B(c, d, i+1))$$

$$Q \vdash \forall i < b = s_b \quad \varphi_h(\vec{a}, i, B(c, d, i), B(c, d, i+1))$$

Quindi: $Q \vdash \varphi_f$ che era la congiunzione delle tre.

Pero ancora dimostrare un po' di cose. ~~Ma non è necessario~~

Unicità di ε in un modello.

$$M \models Q$$

$$M \models \varphi_f(\vec{a}, b, \varepsilon) \quad M \models \exists c, d \text{ come sopra.} \quad \varepsilon \text{ è l'unico } \text{perché } g, h \text{ sono funzionali}$$

(ci lavora usando l'induzione sui naturali veri). $\square$

Quindi tutte le funzioni primitive ricorsive sono rappresentabili.

Anche le n -ricorse totali sono limitabili

Diagonalizzazione

Dato $\varphi(x)$ esiste θ chiusa tale che $Q \vdash \theta \leftrightarrow \varphi[\theta]$

coroll.: $N \models \theta \leftrightarrow \varphi(N)$

" θ dice se φ di $\varphi(x)$ "

COROLL.: $\{n \mid N \models \varphi(n)\} \neq \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid N \models \varphi \}$ TARSKY

Def.: Diagonalizzazione a α $\forall \alpha \ Q \vdash \theta \leftrightarrow \neg \alpha(\ulcorner \theta \urcorner)$

Se θ è vera sta in uno e non nell'altro, o è falsa viceversa.

cioè la verità di una formula aritmetica non è definibile da una formula aritmetica.

Per la codifica serve che $\gamma: N^2 \rightarrow N$ è PR $\forall \ulcorner \varphi(x) \urcorner, \ulcorner t \urcorner = \ulcorner \varphi(t/x) \urcorner$.

Metto $\gamma_{\text{num}}: N \rightarrow N$ $n \mapsto \ulcorner \gamma(n, 0) \urcorner$ dove γ è PR

A noi in realtà serve una funzione che ci ottiene componendo queste due.

$s: \ulcorner \varphi(x) \urcorner, n \mapsto \ulcorner \varphi(\gamma(n, 0)) \urcorner$

A questo punto possiamo dimostrare il teo. di diagonalizzazione.

Def.: Esiste $s(\ulcorner \varphi(x) \urcorner, n) = \ulcorner \varphi(\gamma(n, 0)) \urcorner$ $s: N^2 \rightarrow N$ PR

$\Rightarrow \exists \varphi_s(x, y, z)$ che definisce s in Q .

① $s(a, b) = c \Rightarrow Q \vdash \varphi_s(a, b, c)$ ② $s(a, b) \neq c \Rightarrow Q \vdash \neg \varphi_s(a, b, c)$

Assumi: ③ $Q \vdash \forall x \ \varphi_s(\underline{a}, \underline{b}, x) \leftrightarrow x = c$

Questa si chiama limitabilità funzionale.

Oss.: Se $\varphi(x, y)$ limitava $\ell: N \rightarrow N$ in Q
 $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) \wedge \forall y' < y \ \neg \varphi(x, y')$ limitava funzionalmente
 (i numeri standard sono più grandi di tutti quelli standard).

2da $\theta := \gamma(\ulcorner \tilde{\varphi} \urcorner)$

Voglio $Q \vdash \gamma(\ulcorner \tilde{\varphi} \urcorner) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \gamma(\ulcorner \tilde{\varphi} \urcorner) \urcorner) = \varphi(\ulcorner \gamma(\ulcorner \tilde{\varphi} \urcorner) \urcorner)$

$= \varphi(s(\ulcorner \gamma(\ulcorner \tilde{\varphi} \urcorner) \urcorner, 0))$

$\ulcorner \gamma(\ulcorner \tilde{\varphi} \urcorner) \urcorner = s(\ulcorner \tilde{\varphi} \urcorner, \ulcorner 0 \urcorner)$

$$\text{Foglio } \sigma(\ulcorner \varphi \urcorner) \leftrightarrow \varphi(s(\ulcorner \sigma \urcorner, \ulcorner \sigma \urcorner))$$

Definiamo ora $\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \varphi(s(x, x))$ quasi (devo mettere dentro una formula)

In realtà scriviamo

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{\leftrightarrow} \exists y (y \leq s(x, x) \wedge \varphi(y)) \quad \text{e, per essere ancora più precisi:}$$

$$\sigma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \exists y (\varphi_s(x, x, y) \wedge \varphi(y))$$

$\Theta = \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$. Verifichiamo che va bene, cioè che $\mathcal{Q} \models \Theta \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \Theta \urcorner)$

$$\bullet \Theta \equiv \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner) \equiv \exists y (\varphi_s(\ulcorner \sigma \urcorner, \ulcorner \sigma \urcorner, y) \wedge \varphi(y))$$

• D'altra parte:

$$\mathcal{Q} \models \forall y \varphi_s(\ulcorner \sigma \urcorner, \ulcorner \sigma \urcorner, y) \leftrightarrow y = \ulcorner \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner) \urcorner$$

Anziché

$$\mathcal{Q} \models \Theta \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \Theta \urcorner) \quad \square$$

$$\text{Dim } \mathcal{P}_A \subset \mathbb{N}^2$$

$$\{(\ulcorner \sigma \urcorner, \ulcorner \varphi \urcorner) \mid \mathcal{P}_A \vdash \varphi\} \text{ è PR, cioè } = \{(a, b) \mid \mathcal{N} \models \varphi_{\text{PA}}(a, b)\}$$

È un il fatto che i numeri di Gödel degli assiomi di $\mathcal{Q}$ sono PR.
(È facile vedere che non intuitivamente decidibili).

A questo punto

$$\mathcal{N}_{\mathcal{P}_A} \subset \mathbb{N}$$

"

$$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathcal{P}_A \vdash \varphi\} = \{b \mid \exists a \mathcal{N} \models \varphi_{\text{PA}}(a, b)\} = \{b \mid \mathcal{N} \models \exists x \varphi_{\text{PA}}(x, b)\}$$

Quindi l'insieme dei teoremi è definibile con il linguaggio dell'aritmetica.

Viceversa le cose vere non sono definibili con formule di $\mathcal{Q}$.

Quindi:

TEO. Gödel: Esistono cose vere che non sono teoremi

$$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathcal{P}_A \vdash \varphi\} \subsetneq \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathcal{N} \models \varphi\}$$

Dim.: Vale il contenimento. Il contenimento è stretto per quanto detto sopra. $\square$

T L-teoria $\supset Q$ $\{\Gamma\alpha \mid \alpha \in T\}$ ricorsiva / PR / linum. in Q

$\Downarrow$
 Dint_T $\hat{=}$ ricorsiva / PR / linum. in Q

$f: N^k \rightarrow N$ linum. funzionalmente

1) $f(a) = b \quad Q \vdash \varphi(a, b)$

2) $f(a) \neq b \quad Q \vdash \neg \varphi(a, b)$

3) $Q \vdash \forall x \varphi(a, x) \Leftrightarrow x = b$

$A \subseteq N^k$ linum. $\forall a_1, \dots, a_k \in N$

$(a_1, \dots, a_k) \in A \quad Q \vdash \varphi(a_1, \dots, a_k)$

$(a_1, \dots, a_k) \notin A \quad Q \vdash \neg \varphi(a_1, \dots, a_k)$

$f \text{ PR / RIC TOT} \Rightarrow$ linum. funz.

OSS.: $A \text{ PR / RIC} \Rightarrow A$ linum.

$A \subseteq N^k \quad \chi_A$ linum da $\varphi(x_1, \dots, x_k, z) \Rightarrow A$ linum da $\varphi(x_1, \dots, x_k, 1)$

COROLL.: Esiste $\theta \quad N \models \theta$ ma $PA \nvdash \theta$

dim. i $\left\{ \begin{array}{l} \{\Gamma\theta \mid N \models \theta\} \neq_{\text{pragmatic}}^* \{n \mid N \models \alpha(n)\} \\ \cup \\ \{\Gamma\theta \mid PA \vdash \theta\} = \{n \mid N \models \exists x \text{form}(x, z) = \{n \mid N \models \alpha(n)\} \end{array} \right.$

* La per arredo vale l'uguaglianza per un auto α .

Es. θ tale che $Q \vdash \theta \Leftrightarrow \neg \alpha(\Gamma\theta)$

Quindi $N \models \theta \Leftrightarrow \neg \alpha(\Gamma\theta)$

Se θ è vero $\neg \alpha$ non verifica α , o θ è falso $\neg \alpha$ verifica $\neg \alpha$.

In entrambi i casi non abbiamo l'uguaglianza. $\square$

Def.: $T \supset Q$ coerente e ricorsivamente assiomatica.

1° TED. di GÖDEL

TED.: La $T \supset Q$ coerente e ricorsivamente assiomatica (quindi $\text{Dom } T$ è numerabile in Q).

Esiste θ tale che $Q \vdash \theta \leftrightarrow \neg \Box \theta$

dove $\Box \theta = \exists x \text{ p}_{\text{Dom } T}(x, \ulcorner \theta \urcorner) \rightarrow \theta$

① Allora $T \nvdash \theta$.

② [L'altra T è w-coerente $T \nvdash \neg \theta$]

DEF.: T è w-coerente se non esiste $\alpha(x)$ tale che

1) $T \vdash \neg \alpha(0), T \vdash \neg \alpha(1), \text{ etc. } \forall n \in \mathbb{N} \quad T \vdash \neg \alpha(n)$

2) $T \vdash \exists x \alpha(x)$

Oss.: $\text{INF } T \Rightarrow T$ è w-coerente

Oss.: T w-coerente $\Rightarrow T$ coerente (Essa una teoria inconsistente dimostra tutto, anche le (1) e la (2) della def. di sopra).

Esiste anche $T \supset PA$ coerente e non w-coerente.

~~oss.: $T \supset PA$ coerente, $\text{INF } T \nvdash \exists$~~

DIM. TED. ① Se $T \vdash \theta \Rightarrow$ esiste $\ulcorner \theta \urcorner \in \text{Dom } T \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \vdash \text{p}_{\text{Dom } T}(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner)$

$\Rightarrow Q \vdash \exists x \text{ p}_{\text{Dom } T}(x, \ulcorner \theta \urcorner)$

$\Rightarrow Q \vdash \Box \theta$

$\Rightarrow Q \vdash \neg \theta$

$\Rightarrow T \vdash \neg \theta$

$\Rightarrow T$ è inconsistente. Assurdo. Quindi $T \nvdash \theta$.

② $T \nvdash \theta \Rightarrow \forall d \quad T \nvdash_d \theta \Rightarrow \forall d \quad (\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner) \notin \text{Dom } T$

$\Rightarrow \forall d \quad Q \vdash \neg \text{p}_{\text{Dom } T}(\ulcorner \theta \urcorner, \ulcorner \theta \urcorner)$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad Q \vdash \neg \text{p}_{\text{Dom } T}(n, \ulcorner \theta \urcorner)$

$\Rightarrow$ (w-coerente) $T \nvdash \exists x \text{ p}_{\text{Dom } T}(x, \ulcorner \theta \urcorner)$

$\Rightarrow T \nvdash \Box \theta \Rightarrow T \nvdash \neg \theta$. $\square$

COROLL.: T ω -coerente ricorsivamente assiomatizzata $?Q \Rightarrow T$ è incompleta.

TEO. (Rosen 1936): T coerente, ricorsivamente assiomatizzata, $?Q \Rightarrow T$ incompleta.

DIO.: La $\emptyset$ dice: "io non sono dimostrabile prima delle mie operazioni" (con aiuto di Gödel della dimostrazione più piccola).

$$\emptyset \leftrightarrow \forall x (form(x, \ulcorner \emptyset \urcorner) \rightarrow \exists y < x \text{ form}(y, \ulcorner \neg \emptyset \urcorner))$$

$\emptyset$ fatta così esiste per il lemma di diagonalizzazione, ma c'è un $\ulcorner \neg \emptyset \urcorner$ che ha un $\emptyset$ di falsità.

$$form(x, \ulcorner \neg \emptyset \urcorner) = \exists u (form(\ulcorner \neg \emptyset \urcorner, u) \wedge form(x, u))$$

$$\text{dove } neg: \ulcorner \emptyset \urcorner \mapsto \ulcorner \neg \emptyset \urcorner.$$

$$\textcircled{1} T \nvdash \emptyset \quad \& \quad T \vdash \emptyset \Rightarrow \exists d \ T \vdash \emptyset \Rightarrow \exists d \ (\ulcorner \neg \emptyset \urcorner)_{d \text{ dim}} \\ \Rightarrow \exists d \ T \vdash form(\ulcorner \neg \emptyset \urcorner, d) \Rightarrow \text{ma } \ulcorner \neg \emptyset \urcorner \text{ (con } \emptyset \text{)} \Rightarrow T \vdash \neg \emptyset$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow T \vdash \forall x (form(x, \ulcorner \emptyset \urcorner) \rightarrow \exists y < x \text{ form}(y, \ulcorner \neg \emptyset \urcorner)) \quad (T \vdash \emptyset) \\ \Rightarrow T \vdash \exists y < d \ \square_y \neg \emptyset \quad (\text{in } Q \text{ si possono portare fuori gli } \exists \text{ limitati}) \\ \Rightarrow \exists n < d \ T \vdash \square_n \neg \emptyset$$

$$\textcircled{3} \text{ claim } T \vdash \neg \emptyset \quad \& \quad T \nvdash \neg \emptyset \quad T \nvdash \neg \emptyset, \dots, T \nvdash \neg \emptyset \\ \Rightarrow T \vdash \neg \square_0 \neg \emptyset, \dots, T \vdash \neg \square_d \neg \emptyset \\ \text{e contraddice } T \vdash \square_n \neg \emptyset \Rightarrow \text{claim OK}$$

ma $T \vdash \emptyset$ è quindi contraddittorio il fatto che T è coerente.

$$\textcircled{4} \text{ OSS.: } T \vdash \square \neg \emptyset \not\Rightarrow INT \vdash \square \neg \emptyset$$

C'è un esistenziale, potrebbe intendersi una dimostrazione non standard, che non è una vera dimostrazione quindi $T \vdash \square \neg \emptyset \not\Rightarrow T \vdash \neg \emptyset$.

$$② \quad T \nvdash \neg \theta$$

$$\text{L. } T \vdash \neg \theta \Rightarrow \exists d \mid T \vdash \neg \theta \Rightarrow Q \vdash \text{form}(\underline{d}, \neg \theta)$$

$$\Rightarrow Q \vdash \Box_d \neg \theta \Rightarrow T \vdash \Box_d \neg \theta$$

$$T \vdash \neg \theta \Rightarrow \exists x \leq d \Box_x \theta$$

$$\Rightarrow T \vdash \exists x \leq d \Box_x \theta$$

$$\Rightarrow \exists x \leq d \mid T \vdash \Box_x \theta$$

$$\Rightarrow (\text{come in 1}) \quad T \vdash \theta$$

Q.E.D. $\square$

COROLL.: $T \text{ coerente} \supset Q \Rightarrow T \text{ indecidibile}$ cioè $\{ \neg \theta \mid T \vdash \theta \}$ non A.K.

~~Q.E.D.~~

TEO.: $T \text{ coerente e completa} \Rightarrow T \text{ è decidibile}$

IDEA: Data θ voglio decidere se è un teorema o no.

Enumero le dimostrazioni e mi fermo quando incontro una
che dimostra θ o $\neg \theta$. È completa $\Rightarrow$ mi fermo sicuramente.

~~osservazione:~~ Se T ~~è~~ decidibile

~~Assiomi di T' = assiomi di T~~

~~T' è ricorsivamente enumerabile,~~

~~teoremi $T' = \text{teoremi } T \Rightarrow T \text{ coerente} \Leftrightarrow T' \text{ coerente}$~~

DEF.: $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ricorsivo $\Leftrightarrow \chi_A: \mathbb{N}^n \rightarrow \{0,1\}$ è calcolabile (= μ ricorsiva)

DEF.: $A \subseteq \mathbb{N}^n$ ricorsivamente enumerabile (R.E.) $\Leftrightarrow$ è della forma
 $A = \{x \mid \exists y (x,y) \in B \text{ con } B \text{ ricorsivo}\}$
 cioè $RE = \exists RIC$

DEF.: $A \subseteq$ formule ricorsivo $\Leftrightarrow \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in A \}$ è ricorsivo
 $RE \Leftrightarrow \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in A \} \in RE$

OSS.: È indipendente dalla codifica (e questa è ragionevole)

DEF.: T è ricorsivamente aritmetizzabile in n dimensioni se gli assiomi
 è ricorsivo.

TEO. (Rt): $A \subseteq \mathbb{N}^n$ RE $\wedge \mathbb{N}^n \setminus A$ RE $\Leftrightarrow A$ RIC

cioè $RE \cap coRE = RIC$

DIM.: $\Rightarrow$ Cioè perché $RIC \subseteq RE$.

$\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow \exists y R(x,y) \quad R \text{ RIC}$

$x \notin A \Leftrightarrow \exists y Q(x,y) \quad Q \text{ RIC}$

Dato $x \in \mathbb{N}^n$ $f(x) := \mu y R(x,y) \vee Q(x,y)$ è RIC. totale

$x \in A \Leftrightarrow R(x, f(x))$ è RIC.

A è ricorsivo. $\square$

TGO.: T teoria RIC AX $\Rightarrow \{ \varphi \mid T \rightarrow \varphi \} \in RE$

DIN.: $n \in Teo \Leftrightarrow \exists x \Phi_{n,T}(x,n)$ e $\Phi_{n,T}$ è RIC. $\square$

TEO.: T RIC AX completa $\Rightarrow \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi \} \text{ RIC}$

DIN.: $n \notin Teo \Leftrightarrow \exists x [\Phi_{n,T}(x, \neg(n)) \vee \exists \text{ formula } (y)]$

dove $\neg: \ulcorner \varphi \urcorner \mapsto \ulcorner \neg \varphi \urcorner$ è RIC.

ma anche formule è RIC.

Quindi non esiste un Teorema in RE.

La tesi segue allora dal Teorema di Rt. $\square$

Questo significa che la teoria è decidibile.

DEF.: La Teoria $coRE$ è ricorsiva, T si dice decidibile.

TEO: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}^k$ RE $\Leftrightarrow$ A si può scrivere nella forma $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $n \mapsto a_n$ RICEGG

DIN: $\Rightarrow x \in A \Leftrightarrow \exists y Q(x, y)$ con Q RIC

Siamo $a \in A$

$$A = \text{Immagine}(G) \quad G(x, y) = \begin{cases} x & \text{se } Q(x, y) \\ a & \text{se } \neg Q(x, y) \end{cases}$$

Cioè $G: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ è surgettiva



$$g(x, y) = 2^x (2y + 1) - 1 \quad \text{nel caso } k=1 \text{ (in generale è più complicato)}$$

L'immagine di una funzione calcolabile è calcolabile.

$n \mapsto g^{-1}(n) \mapsto G(g^{-1}(n))$ è calcolabile ed immagine A

$$\Leftrightarrow A = \{y \mid \exists n \ y = a(n)\}$$

LEMMA: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ calcolabile $\checkmark$ surgettiva $\Rightarrow f^{-1}$ calcolabile

DIN: $f^{-1}(x) = \mu x (f(x) = y)$

$f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ è più complicato.

$$\text{Def: } \mu(x, y) \ f(x, y) = n \Leftrightarrow \mu k \ \exists x, y \leq k \ k = \langle x, y \rangle \ f(x, y) = n$$

Ci si estraggono le due componenti e si conclude anche in questo caso.

Esercizio

$$\text{Ass}(T) \text{ RE} \Rightarrow \{ \varphi \mid T \vdash \varphi \} \text{ RE}$$

$$\text{CONVOCIN: } a_n(t) = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad a: A \rightarrow a(n) \text{ RIC}$$

$$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \exists n (T_n \vdash \varphi)$$

Esercizio

$$\exists f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ non calcolabile: } \forall a \ n \mapsto f(n, a) \text{ e } n \mapsto f(a, n)$$

sono entrambe calcolabili.

Ad esempio fissiamo $K \subset \mathbb{N}$ non calcolabile (dimostriamo che esiste)

$$A = \{ (n, n) \mid n \in \mathbb{N} \} \in \mathbb{N}^2 \text{ non } \bar{\sigma} \text{ calcolabile}$$

$\chi_n : \mathbb{N}^2 \rightarrow \{0,1\}$ non è calcolabile, ma è separatamente calcolabile nelle due coordinate.

TEO.: T teoria decidibile coerente $\Rightarrow \exists T' \supset T$ coerente completa e decidibile
(lemma di Lindenbaum).

Def.: $\{ \varphi_n \mid n \in \mathbb{N} \} = \text{L-formulae (in countable)} \quad n \mapsto \varphi_n \text{ ric}$

Tact

[illegible]
$$T_{n+1} = T_n \cup \{\psi_n\} \quad \psi_n = \begin{cases} t_n & \text{se } T_0 \cup \{t_n\} \text{ è consistente} \\ \neg t_n & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$T' = UT$, è completa (è la costruzione del lemma di Lindemann)

~~Can be divisible?~~

Archival Transcription

Obs.: $\forall n$ T_n é coerente (indutiva) $\Rightarrow T'$ é coerente (compacta)

Oss.: S teoria decidibile, φ formula chiusa $\Rightarrow S \cup \{\varphi\}$ è decidibile

bin: $\text{Def } \theta \quad S, p \vdash \theta \Leftrightarrow S \vdash (p \rightarrow \theta)$ □

Quindi tutte le T_n sono decidibili.

To i ricorsivamente asintotizzabili (basta prendere come assiomi i teoremi).

Théorème: $n \mapsto \psi_n$ est calculable

$$\psi_0 = \begin{cases} \psi_0 & \text{in } T_0 \setminus \gamma_0 \\ \gamma_0 & \text{in } T_0 \cap \gamma_0 \end{cases}$$
$$\psi_{n+1} = \begin{cases} \varphi_n & \text{on } T_0, V_0, \dots, \varphi_{n-1} \text{ et } T_{\varphi_n} \\ \varphi_n & \text{on } T_0, \varphi_{n-1}, \dots, \varphi_{n-1} \text{ et } T_{\varphi_n} \end{cases}$$
$$A_X(T') = T_0 \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{is RE.}$$

Essendo T' completa (per un teorema precedente) possiamo concludere. $\square$

TEO.: $T \supset Q$ coerente RIC. AX. $\Rightarrow T$ è incompleta

Dimostrato la volta scorsa.

TEO.: $T \supset Q$ coerente ~~PA~~ $\Rightarrow T$ è indecidibile

DIP.: $\nexists T' \supset T$ completa decidibile e quindi RIC. AX. Assunto.

DEF.: Una teoria T è essenzialmente indecidibile se tutte le sue estensioni sono indecidibili.

COROLL.: Q è essenzialmente indecidibile.

COROLL.: $\{p \mid \vdash p\}$ è indecidibile in $L \supset \{+, \cdot, 0, 1, s\}$

TEO. DI CHURCH

DIP.: $\{p \mid \vdash p\} = \{p \mid \vdash^* p\}$

La form. ricorsiva Q sarebbe decidibile in quanto

$$Q \vdash p \Leftrightarrow \vdash (Q \rightarrow p).$$

Funziona perché Q ha finiti assioni. Non funziona con PA.

$L = \{f^{\text{numeri}}, \text{costanti}\}$ decidibile

Diventa ~~ind~~ indecidibile se ci mette cose ricorsive.

IDEA: $ZF \supset$ traduzione di PA

DEF.: ~~Def.~~ Interpretazioni:

Una interpretazione di $L \supset \{+, \cdot, 0, s\}$ in $L' = \{E\}$ consiste di

6 L' formule $(f_+(x, y, z), f_-(x, y, z), f_0(x), f_s(x, y), \Delta(x))$

$\Delta(x)$ intuitivamente dice che x è un naturale

~~Def. interpretazione~~ I induce una funzione $p \mapsto p^I$
 L -formula L' -formula

$$(x + y = z)^I = f_+(x, y, z) \quad (\text{per fare le cose con lingua naturale le composizioni})$$

$$(p \vee q)^I = p^I \vee q^I$$

$$(\forall x p(x))^I = \forall x (\Delta(x) \rightarrow p^I(x))$$

$$(\exists x p(x))^I = \exists x (\Delta(x) \wedge p^I(x))$$

ecc.

I interpreta PA in ZF $\approx \uparrow ZF \models (PA)^I$

$$\uparrow ZF \vdash \exists x \Delta(x)$$

$$3) \quad \mathbb{Z}F \vdash \forall x, y \quad (0x \wedge 0y \rightarrow \exists! z \ (0z \wedge f_+(x, y, z)))$$

et simila per f_-, f_3

$$\mathbb{Z}F \vdash \exists! z \ (0z \wedge \varphi_0(x))$$

Théorème de $PA \triangleleft \mathbb{Z}F$

~~2.2.2~~

Il suffit voir $T \supset Q \Rightarrow T$ indécidable.

