

Cognome e nome:.....  
Numero di matricola:.....  
Corso e Aula: .....  
Firma:.....  
E-mail (per eventuali comunicazioni): .....

**Esercizio 1.** Sia  $A = \{1, 2, \dots, 80\}$  l'insieme dei numeri interi positivi minori o uguali a 80. Determinare le cardinalità degli insiemi seguenti:

1.  $A \times A$  ;
2.  $\{(x, y) \in A \times A \mid x \neq y\}$  ;
3.  $\{(x, y) \in A \times A \mid x < y\}$  ;
4.  $\{X \subset A \mid |X| = 3\}$  ;
5.  $\{(x, y, z) \in A \times A \times A \mid x < y < z\}$ .

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{N}$ .

- Quali delle seguenti formule formalizza la proprietà: “ $\min A \leq \max B$ ” ?

1.  $\exists x \in A \forall y \in B (x \leq y)$  ;
2.  $\forall y \in B \exists x \in A (x \leq y)$  ;
3.  $\forall x \in A \exists y \in B (x \leq y)$  ;
4.  $\exists x \in A \exists y \in B (x \leq y)$  ;
5.  $\forall x \in A \forall y \in B (x \leq y)$  ;
6.  $\exists y \in B \forall x \in A (x \leq y)$  .

- Scrivi una formula che formalizza la proprietà: “ $\min A \leq \min B$ ”.

**Esercizio 3.** Siano  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $B = \{a, b, c, d\}$ , e sia  $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$  definita da  $F(X) = X \cap B$ . Stabilire (giustificando) se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

1.  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) (X \subseteq Y \rightarrow F(X) \subseteq F(Y))$
2.  $\forall x \in B \forall X \subseteq A (x \in X \rightarrow x \in F(X))$
3.  $\forall x \in A \forall X \subseteq A (x \in X \rightarrow x \in F(X))$

**Esercizio 4.** Sia  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 2$ . Definiamo per induzione la successione  $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ponendo  $g_0 = b$ ,  $g_{n+1} = g_n^2 - 2$ . Dimostrare che:

1.  $\forall n g_n > 2$ ;
2. la successione  $g_n$  è crescente.

**Esercizio 5.** Determinare i valori di  $n$  per cui l'equazione

$$9x \equiv n \pmod{n^2}$$

ammette soluzioni. Determinare inoltre le soluzioni per  $n = 11$ .

Cognome e nome:.....  
Numero di matricola:.....  
Corso e Aula: .....  
Firma:.....  
E-mail (per eventuali comunicazioni): .....

**Esercizio 1.** Sia  $B = \{1, 2, \dots, 90\}$  l'insieme dei numeri interi positivi minori o uguali a 90. Determinare le cardinalità degli insiemi seguenti:

1.  $B \times B$  ;
2.  $\{(x, y) \in B \times B \mid x \neq y\}$  ;
3.  $\{(x, y) \in B \times B \mid x < y\}$  ;
4.  $\{Y \subset B \mid |Y| = 4\}$  ;
5.  $\{(x, y, z) \in B \times B \times B \mid x < y < z\}$ .

**Esercizio 2.** Siano  $A$  e  $B$  sottoinsiemi non vuoti di  $\mathbb{N}$ .

- Quali delle seguenti formule formalizza la proprietà: “ $\max A \leq \min B$ ” ?

1.  $\exists x \in A \forall y \in B (x \leq y)$  ;
2.  $\forall y \in B \exists x \in A (x \leq y)$  ;
3.  $\forall x \in A \exists y \in B (x \leq y)$  ;
4.  $\exists x \in A \exists y \in B (x \leq y)$  ;
5.  $\forall x \in A \forall y \in B (x \leq y)$  ;
6.  $\exists y \in B \forall x \in A (x \leq y)$  .

- Scrivi una formula che formalizza la proprietà: “ $\max A \geq \min B$ ”.

**Esercizio 3.** Determinare i valori di  $k$  per cui l'equazione

$$9x \equiv k \pmod{k^2}$$

ammette soluzioni. Determinare inoltre le soluzioni per  $k = 11$ .

**Esercizio 4.** Siano  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , e sia  $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$  definita da  $F(X) = X \cap B$ . Stabilire (giustificando) se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

1.  $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) (X \subseteq Y \rightarrow F(X) \subseteq F(Y))$
2.  $\forall x \in A \forall X \subseteq A (x \in X \rightarrow x \in F(X))$
3.  $\forall x \in B \forall X \subseteq A (x \in X \rightarrow x \in F(X))$

**Esercizio 5.** Sia  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 2$ . Definiamo per induzione la successione  $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  ponendo  $f_0 = a$ ,  $f_{n+1} = f_n^2 - 2$ . Dimostrare che

1.  $\forall n f_n > 2$ ;
2. la successione  $f_n$  è crescente.