Interpretazioni e teorie indecidibili

Alessandro Berarducci

23 Dic. 2003

Scopo di questi appunti rivolti agli studenti del corso di Istituzioni di Logica è quello di dimostrare la indecidibilità di varie teorie attraverso il metodo delle interpretazioni.

Prerequisiti: funzioni ricorsive, insiemi ricorsivi e ricorsivamente enumerabili, rappresentabilità delle funzioni ricorsive nella teoria Q di Robinson, aritmetica di Peano PA, le formule Σ_1^0 vere in $\mathbb{N}$ sono dimostrabili in Q, primo teorema di Gödel.

Notazioni. $Th(M)$ è la teoria completa della struttura M. Indichiamo con $L(T)$ il linguaggio della teoria T e con $Ax(T)$ l'insieme degli assiomi di T.

1 Insiemi ricorsivamente inseparabili

1.1 Definizione. Siano $A \subseteq \mathbb{N}$ e $B \subseteq \mathbb{N}$ due insiemi ricorsivamente enumerabili disgiunti. Diciamo che A e B sono ricorsivamente inseparabili se non esiste alcun insieme ricorsivo R che include A ed è disgiunto da B.

1.2 Teorema. *Esistono due insiemi ricorsivamente enumerabili $A \subseteq \mathbb{N}$ e $B \subseteq \mathbb{N}$ che sono ricorsivamente inseparabili.*

Proof. Sia $\varphi_e \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione ricorsiva parziale con indice e. Sia $A = \{x \mid \varphi_x(x) = 0\}$ e $B = \{x \mid \varphi_x(x) = 1\}$. Chiaramente A e B sono ricorsivamente enumerabili e disgiunti. Se per assurdo esistesse un insieme ricorsivo R che include A ed è disgiunto da B consideriamo la sua funzione caratteristica $\varphi_e \colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$. Se $e \in R$ allora siccome φ_e è la funzione caratteristica di R abbiamo $\varphi_e(e) = 1$. Per definizione di B questo implica $e \in B$, che è assurdo essendo B disgiunto da R. Analogamente se $e \notin R$ allora $\varphi_e(e) = 0$ e quindi $e \in A$, che è di nuovo assurdo perchè A è disgiunto dal complemento di R. $\square$

1.3 Teorema. *Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ ricorsivamente enumerabili. Allora esistono insiemi ricorsivamente enumerabili disgiunti $A' \subseteq A$ e $B' \subseteq B$ con $A' \cup B' = A \cup B$.*

Proof. Possiamo scrivere $A = \{x \mid \exists y \alpha(y,x)\}$ e $B = \{x \mid \exists y \beta(y,x)\}$ con α e β predicati ricorsivi. Sia $A' = \{x \mid \exists y(\alpha(y,x) \wedge \forall z < y \neg\beta(z,x))\}$ e $B' = \{x \mid \exists y(\beta(y,x) \wedge \forall z \leq y \neg\alpha(z,x))\}$. Allora A' e B' sono come desiderato. $\square$

Si noti che se A, B sono già disgiunti, $A' = A$ e $B' = B$.

2 Indecidibilità essenziale della teoria Q^*

2.1 Definizione. Una teoria T è essenzialmente indecidibile se ogni estensione coerente di T nello stesso linguaggio è indecidibile.

2.2 Definizione. Sia Q^* la teoria che estende la teoria Q di Robinson con l'assioma

$$\forall x, y(x \leq y \vee y \leq x)$$

dove $x \leq y$ è definito come $\exists z(z + x = y)$.

2.3 Teorema. *La teoria Q^* è essenzialmente indecidibile.*

Proof. Siano A, B due insiemi ricorsivamente enumerabili e ricorsivamente inseparabili. Possiamo scrivere $A = \{x \mid \mathbb{N} \models \exists y \alpha(y, x)\}$ e $B = \{x \mid \mathbb{N} \models \exists y \beta(y, x)\}$ con α e β formule binumerabili in Q (usando il fatto che tutti i predicati ricorsivi sono binumerabili in Q). Definiamo A', B' come nel teorema precedente, e osserviamo che essendo A, B disgiunti si ha $A' = A$ e $B' = B$. Sia "$x \in A'$" una abbreviazione per la Σ_1^0-formula $\exists y(\alpha(y, x) \wedge \forall z < y \neg \beta(z, x))$ e "$x \in B'$" una abbreviazione per la Σ_1^0-formula $\exists y(\beta(y, x) \wedge \forall z \leq y \neg \alpha(z, x))$. Siccome Q^* dimostra che l'ordine $<$ è totale, ne segue facilmente che Q^* dimostra che non esiste alcun x che verifica sia $x \in A'$ che $x \in B'$ (altrimenti presi i testimoni dei quantificatori esistenziali delle corrispondenti formule si ottiene un assurdo confrontantandoli tra di loro nell'ordine $<$). Daltra parte poiché la formule Σ_1^0 vere sono dimostrabili in Q, se $n \in A = A'$ allora $Q^* \vdash \underline{n} \in A'$ e se $n \in B = B'$ allora $Q^* \vdash \underline{n} \in B'$, dove $\underline{n} = s^n(0)$ è il termine che rappresenta il numero n. Sia ora $R = \{n \mid Q^* \vdash \underline{n} \in A'\}$. Per quanto detto R contiene A ed è disgiunto da B. Se Q^* fosse decidibile R sarebbe ricorsivo, contraddicendo la ricorsiva inseparabilità di A e B. □

Diamo ora una dimostrazione del teorema di Rosser del 1936.

2.4 Corollario. *Sia T una estensione coerente e ricorsivamente assiomatizzata di Q^*. Allora T è incompleta.*

Proof. Se T fosse completa, essendo ricorsivamente assiomatizzata e coerente, sarebbe decidibile, contraddicendo la essenziale indecidibilità di Q^*. □

Si noti che non abbiamo assunto che T abbia $\mathbb{N}$ come modello.

3 Interpretazioni tra strutture

3.1 Definizione. Sia A una L-struttura e sia B una L'-struttura. Diciamo che A è interpretabile in B se esiste una famiglia I di L'-formule

$\Delta(x)$ (detta dominio dell'interpretazione)
$\varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$, per ogni simbolo di funzione n-ario f in L ($n \geq 0$),
$\varphi_P(x_1, \ldots, x_n)$, per ogni simbolo di relazione n-ario P in L

tali che se definiamo $B_I := \{b \in B \mid B \models \Delta(b)\}$ allora l'insieme $\{(b_1, \dots, b_n, b) \in {B_I}^{n+1} \mid B \models \varphi_f(b_1, \dots, b_n, b)\}$ definisce il grafico di una funzione $f_I\colon {B_I}^n \to B_I$ e l'insieme $\{(b_1, \dots, b_n) \mid B \models \varphi_P(b_1, \dots, b_n)\}$ definisce una relazione n-aria P_I su B_I in modo tale che A è isomorfa alla struttura B^I che ha come dominio B_I e che interpreta f con f_I e P con P_I (per ogni f, P in L). La famiglia I è detta una interpretazione della L-struttura $A \cong B^I$ in B.

3.2 Esempio. Usando il fatto che un numero intero è maggiore o uguale a zero se e solo se è la somma di quattro quadrati (teorema di Lagrange) osserviamo che la struttura $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ è interpretabile nella struttura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ tramite la seguente interpretazione I:

$$
\begin{array}{lcl}
\Delta(x) & \equiv & \exists y_1, y_2, y_3, y_4 (x = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + {y_4}^2) \\
\varphi_+(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 + x_2 = y, \\
\varphi_\cdot(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 \cdot x_2 = y \\
\varphi_\leq(x_1, x_2) & \equiv & \exists y (\Delta(y) \wedge x_1 + y = x_2)
\end{array}
$$

3.3 Osservazione. La relazione di interpretazione tra strutture è transitiva: se A è interpretabile in B che è interpretabile in C, allora A è interpretabile in C.

3.4 Definizione. Sia $I = \langle \Delta(x), \varphi_f(\vec{x}, y), \varphi_P(\vec{x}) \mid f, P \in L \rangle$ una interpretazione della L-struttura A nella L'-struttura B. Per ogni L-formula $\theta(\vec{x})$ definiremo una L'-formula $\theta^I(\vec{x})$ in modo tale che per ogni $b_1, \dots, b_n \in B_I$ si abbia $B^I \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$ se e solo se $B \models \theta^I(b_1, \dots, b_n)$. La definizione di θ^I si basa sulle seguenti clausole induttive:

$$
\begin{array}{lcl}
(\theta_1(\vec{x}) \vee \theta_2(\vec{x}))^I & \equiv & {\theta_1}^I(\vec{x}) \vee {\theta_2}^I(\vec{x}) \\
(\theta_1(\vec{x}) \wedge \theta_2(\vec{x}))^I & \equiv & {\theta_1}^I(\vec{x}) \wedge {\theta_2}^I(\vec{x}) \\
(\neg\theta(\vec{x}))^I & \equiv & \neg\theta^I(\vec{x}) \\
(\forall y \theta(y, \vec{x}))^I & \equiv & \forall y (\Delta(y) \to \theta^I(y, \vec{x})) \\
(\exists y \theta(y, \vec{x}))^I & \equiv & \exists y (\Delta(y) \wedge \theta^I(y, \vec{x})) \\
P(\vec{x})^I & \equiv & \varphi_P(\vec{x}) \\
(f(\vec{x}) = y)^I & \equiv & \varphi_f(\vec{x}, y)
\end{array}
$$

Rimane da definire θ^I nel caso in cui θ sia una formula della forma $t_1 = t_2$ dove t_1 e t_2 sono L-termini qualsiasi. L'ultima clausola sopra data tratta un caso particolare di questo tipo di formule. Il caso generale si riduce al caso particolare introducendo dei quantificatori esistenziali per eliminare le composizioni di simboli di funzione. Ad esempio per definire $(f(g(x)) = y)^I$ usiamo l'equivalena $f(g(x)) = y \leftrightarrow \exists z (g(x) = z \wedge f(z) = y)$ e definiamo $(f(g(x)) = y)^I$ come $(\exists z (g(x) = z \wedge f(z) = y))^I$, dove ques'ultima è definita dalle clausole sopra date.

3.5 Osservazione. Se ci restringiamo a linguaggi finiti, la funzione che manda θ in θ^I è calcolabile.

Il seguente risultato è fondamentale e sarà ripetutamente usato nel seguito anche senza esplicita menzione.

3.6 Proposizione. *Per ogni L-formula θ e parametri $b_1, \dots, b_n \in B_I$ si ha $B^I \models \theta(b_1, \dots, b_n)$ se e solo se $B \models \theta^I(b_1, \dots, b_n)$.*

Proof. Quando θ è una formula atomica della forma $f(\vec{x}) = y$ o della forma $P(\vec{x})$ la tesi segue direttamente dalle definizioni. Se θ è ottenuta applicando dei quantificatori o dei connettivi booleani ad altre formule, il risultato segue facilmente per induzione. Se infine θ è una formula atomica della forma $t_1 = t_2$ il risultato segue dalla definizione di $(t_1 = t_2)^I$ riconducendosi ai casi già trattati. □

4 Interpretazioni tra teorie

Fin qui abbiamo considerato la relazione di interpretazione tra strutture. Ora definiamo la relazione di interpretazione tra teorie.

4.1 Definizione. Una interpretazione di una L-teoria T in una L'-teoria T' è una famiglia $I = \langle \Delta(x), \varphi_f(\vec{x}, y), \varphi_P(\vec{x}) \mid f, P \in L \rangle$ di L'-formule come sopra, tali che T' dimostra:

1. tutte le formule della forma θ^I dove θ è un assioma di T,
2. $\exists x \Delta(x)$,
3. tutte le formule della forma $(\forall x \exists! y f(\vec{x}) = y)^I$, dove f è un simbolo di funzione di L.

Ricordiamo che $\forall x \exists! y f(\vec{x}) = y$ è una abbreviazione per $\forall x \exists y \forall z (f(\vec{x}) = z \leftrightarrow z = y)$. I punti (2) e (3) garantiscono che, in ogni modello B di T', la formula $\Delta(x)$ definisce un insieme non vuoto B_I chiuso rispetto alla interpretazione dei simboli di funzione di L. Risulta quindi ben definita una L-struttura B^I come nella Definizione 3.1, e I risulta una interpretazione di B^I in B. Il punto (3) garantisce, grazie alla Proposizione 3.6, che B^I é un modello di T. Quindi una interpretazione I di T in T' fornisce un modo uniforme per definire per ogni modello di T' un modello di T. Più precisamente abbiamo:

4.2 Proposizione. *Se I è una interpretazione della L-teoria T nella L'-teoria T', allora per ogni modello B di T risulta ben definita la L-struttura B^I e questa risulta un modello di T.*

4.3 Esempio. L'aritmetica di Peano PA è interpretabile nella teoria degli insiemi ZF tramite la seguente interpretazione I:

1. 0 è interpretato come l'insieme vuoto $\emptyset$, ovvero $(x = 0)^I$ è la formula $(x = \emptyset)$.
2. $S(x)$ è interpretato come $x \cup \{x\}$, ovvero $(S(x) = y)^I$ è la formula $y = x \cup \{x\}$.

3. Il dominio $\Delta(x)$ dell'interpretazione è la fomula di ZF che dice che x appartiene a tutti gli insiemi che contengono $\emptyset$ e sono chiusi per la funzione "successore" $S_{ZF}(x) = x \cup \{x\}$.

4. $(x + y = z)^I$ è la formula di ZF che dice che esiste una funzione f tale che $f(\emptyset) = x$, $f(y) = z$, e tale che $\forall u \in \operatorname{dom} f$ si ha $S_{ZF}(u) \in \operatorname{dom} f$ e $f(S_{ZF} u) = S_{ZF}(fu)$. Indichiamo con $x +_{ZF} y = z$ la formula $(x+y=z)^I$ così definita.

5. $(x \cdot y = z)^I$ è la formula di ZF che dice che esiste una funzione f tale che $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(y) = z$, e tale che $\forall u \in \operatorname{dom} f$ si ha $S_{ZF}(u) \in \operatorname{dom} f$ e $f(S_{ZF}(u)) = fu +_{ZF} x$.

Si può verificare che ZF dimostra l'interpretazione θ^I di tutti gli assiomi θ di PA.

Cambiando la definizione di I si può dimostrare che è sufficiente ZF privato dell'assioma dell'infinito per interpretare PA. Si dimosta inoltre che PA interpreta ZF meno l'assioma dell'infinito, e quindi queste due teorie sono bi-interpretabili.

4.4 Esempio. Per ogni modello M di ZF risulta ben definito un modello M^I di PA tramite l'interpretazione sopra data. Non tutti i modelli di PA però si ottengono in questo modo: ad esempio ogni modello di PA della forma M^I (con $M \models ZF$) soddisfa la formula $Con(PA)$ che esprime la coerenza di PA. Ciò dipende dal fatto che ZF dimostra l'interpretazione della formula che esprime la coerenza di PA. Questo suggerisce di rafforzare PA nel seguente modo. Definiamo T come la teoria nel linguaggio di PA che ha come assiomi tutte le formule θ tali che $ZF \vdash \theta^I$. Allora T è una teoria coerente con un insieme di assiomi ricorsivamente enumerabile che include gli assiomi di PA e tale che $T \vdash Con(PA)$ (ma per i teoremi di Gödel $T \nvdash Con(T)$).

4.5 Osservazione. La relazione di interpretazione tra teorie è transitiva.

Il seguente teorema sarà applicato per mostrare la essenziale indecidibilità di varie teorie.

4.6 Teorema. *Supponiamo che la L-teoria T sia interpretabile nella L'-teoria T'.*

1. *Se T' è coerente lo è anche T.*

2. *Supponiamo che T sia essenzialmente indecidibile. Allora T', se coerente, è essenzialmente indecidibile.*

Proof. Sia I l'interpretazione di T in T'.

Per il punto (1) basta osservare che se M è un modello di T', allora M^I è un modello di T.

Supponiamo ora che T' sia coerente e dimostriamo che è indecidibile. Definiamo a tal fine $S \supseteq T$ come la teoria nel linguaggio di T i cui assiomi sono gli enunciati θ tali che $T' \vdash \theta^I$. Abbiamo dunque $\theta \in Ax(S)$ se e solo se $T' \vdash \theta^I$. È facile vedere che la teoria S è deduttivamente chiusa, cioè i suoi assiomi coincidono con i suoi teoremi (posponiamo la verifica). Quindi $S \vdash \theta$ se e solo se $T' \vdash \theta^I$. Ne deduciamo che se T' fosse decidibile lo sarebbe anche S. D'altra parte S è coerente (in quanto T' lo è e $S \vdash \perp$ sse $T' \vdash \perp^I$), e quindi non è decidibile (poiché è coerente ed estende la teoria essenzialmente indecidibile T). Quindi nemmeno T' è decidibile.

Rimane da verificare che S è deduttivamente chiusa. Supponiamo pertanto che $S \vdash \theta$ e mostriamo che $\theta \in Ax(S)$, cioè $T' \vdash \theta^I$. Da $S \vdash \theta$ segue che esiste un insieme finito $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ di assiomi di S tale che $\sigma_1 \wedge \ldots \sigma_n \to \theta$ è logicamente valida. Poiché $\sigma_i \in Ax(S)$ abbiamo $T' \vdash {\sigma_i}^I$ per ogni i. D'altra parte $T' \vdash {\sigma_1}^I \wedge \ldots \wedge {\sigma_n}^I \to \theta^I$, in quanto altrimenti esisterebbe un modello M di T' che non soddisfa ${\sigma_1}^I \wedge \ldots \wedge {\sigma_n}^I \to \theta^I$ e questo è assurdo in quanto in tal caso il modello M^I di T non verificherebbe la formula logicamente valida $\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_n \to \theta$.

Questo completa la dimostrazione che T' è indecidibile. L'essenziale indecidibilità segue dal fatto che se T è interpretabile in T' allora è anche interpretabile in qualsiasi estensione di T'. $\square$

4.7 Proposizione. *Se T è una L-teoria decidibile e $T + \theta$ è la L-teoria che ha come assiomi tutti gli assiomi di T e l'enunciato θ, allora $T + \theta$ è decidibile.*

Proof. Abbiamo $T + \theta \vdash \varphi$ sse $T \vdash \theta \to \varphi$. Ne deduciamo che se T è decidibile lo è anche $T + \theta$. $\square$

Si noti che nella proposizione precedente è importante che θ sia un enunciato nello stesso linguaggio di T.

4.8 Definizione. Una teoria T' si dice estensione finita di una teoria T se T e T' hanno lo stesso linguaggio e se l'insieme degli assiomi di T' si ottiene aggiungendo un numero finito di assiomi a quelli di T.

Dalla proposizione precedente otteniamo:

4.9 Corollario. *Se una estensione finita di una teoria T è indecidibile, allora T è indecidibile.*

Il seguente teorema risulterà utile per mostrare la indecidibilità di varie teorie anche in casi in cui esse non siano essenzialmente indecidibili.

4.10 Teorema. *Sia T una teoria essenzialmente indecidibile e finitamente assiomatizzata (ad esempio la teoria Q^*). Se T è interpretabile in una estensione coerente S di una teoria T', con $L(S) = L(T)$, allora T' è indecidibile.*

Proof. Sia I l'interpretazione di T in S. Per definizione questo significa che S dimostra θ^I per ogni assioma θ di T e inoltre S dimostra che il dominio $\Delta(x)$ dell'interpretazione definisce un insieme non-vuoto chiuso rispetto alla interpretazione delle funzioni di $L(T)$. Siccome T è finitamente assiomatizzata, l'insieme di queste formule è finito, e pertanto per compattezza basta un sottoinsieme finito degli assiomi di S a dimostrarle. Ne segue che T è in effetti interpretabile in una sottoteoria finita S' di S, e quindi a maggior ragione è interpretabile in $T' + S'$. Quest'ultima essendo contenuta in S è coerente, ed interpretando T è indecidibile (anche essenzialmente). Essendo $T' + S'$ una teoria indecidibile che è una estensione finita della teoria T' possiamo concludere che T' è indecidibile. $\square$

5 Indecidibilità di varie teorie

5.1 Teorema. *PA e ZF sono essenzialmente indecidibili.*

Proof. Q^* è interpretabile in PA (essendo addirittura contenuta in PA) che a sua volta è interpretabile in ZF. Concludiamo con una applicazione del Teorema 4.10. $\square$

5.2 Corollario. *PA e ZF sono incomplete (ammesso che siano coerenti).*

Proof. Poiché PA e ZF hanno un insieme ricorsivo di assiomi, se fossero complete, sarebbero decidibili. $\square$

Possiamo ora dare una dimostrazione della indecidibilità del calcolo dei predicati (Teorema di Church):

5.3 Corollario. *Sia L un linguaggio con un simbolo di relazione binaria. L'insieme degli L-enunciati logicamente validi è indecidibile.*

Proof. Poiché il linguaggio di ZF contiene solamente il simbolo di appartenenza. possiamo assumere che il linguaggio L dell'ipotesi sia il linguaggio di ZF. Sia $T(L)$ la L-teoria con l'insieme vuoto di assiomi. I teoremi di $T(L)$ sono dunque gli L-enunciati logicamente validi. La teoria Q^* è interpretabile in ZF, che è una estensione coerente di $T(L)$ nello stesso linguaggio. Ne segue che $T(L)$ è indecidibile per il Teorema 4.10. $\square$

Analogamente, considerando Q^* o PA invece di ZF, si dimostra che se L è un linguaggio con almeno due simboli di funzione binaria e due simboli di costante (come il linguaggio di PA), allora l'insieme degli L-enunciati logicamente validi è indecidibile. In effetti si può dimostrare che per ogni linguaggio con almeno un simbolo di funzione binaria l'insieme degli enunciati logicamente validi è indecidibile. Se il linguaggio L contiene solo simboli di relazioni unarie e simboli di costante, allora l'insieme degli L-enunciati validi è decidibile.

5.4 Osservazione. Sia L un linguaggio con un numero finito di simboli. L'insieme degli L-enunciati logicamente validi non è essenzialmente indecidibile.

Proof. Sia M una L-struttura finita. La L-teoria completa $Th(M)$ è decidibile e contiene tra i suoi teoremi gli L-enunciati logicamente validi. $\square$

5.5 Teorema. *La teoria completa* $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ *è essenzialmente indecidibile.*

Proof. Poichè Q^* si interpreta in $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ basta mostrare che quest'ultima teoria si interpreta in $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ (e concludere con una applicazione del Teorema 4.6). In $\mathbb{Z}$ possiamo definire i numeri naturali come quei numeri interi che sono somma di quattro quadrati. Questo mostra che $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ è interpretabile in $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ tramite l'interpretazione I data dalle seguenti formule:

$$\begin{array}{lcl} \Delta(x) & \equiv & \exists y_1, y_2, y_3, y_4 (x = {y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + {y_4}^2) \\ \varphi_+(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 + x_2 = y, \\ \varphi_\cdot(x_1, x_2, y) & \equiv & x_1 \cdot x_2 = y \end{array}$$

□

5.6 Teorema. *La teoria degli anelli commutativi è indecidibile.*

Proof. Poiché $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ è un anello commutativo, la teoria degli anelli commutativi è contenuta nella teoria di $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$. Siccome Q^* è interpretabile in quest'ultima, possiamo concludere con una applicazione del Teorema 4.10. □

5.7 Teorema. *La teoria completa* $Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ *è essenzialmente indecidibile.*

Proof. (Cenno) Si dimostra che $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ è interpretabile in $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ usando un risultato di Julia Robinson che mostra che l'insieme $\mathbb{N}$ è definibile in $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. □

5.8 Teorema. *La teoria dei campi è indecidibile.*

Proof. Q^* è interpretabile in $Th(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ che è interpretabile in $Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$. Quest'ultima è una estensione coerente della teoria dei campi nello stesso linguaggio. Ne segue che in base al Teorema 4.10 che la teoria dei campi è indecidibile. □

Tarski ha dimostrato che le teorie complete del campo $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ e del campo $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ sono decidibili. Quindi la teoria dei campi non è essenzialmente indecidibile. La presenza di $0, 1$ nel linguaggio è irrilevante in quanto $0, 1$ sono definibili a partire da $+, \cdot$. È un problema aperto, posto da Tarski, se la teoria della struttura $(\mathbb{R}, +, \cdot, \exp)$ è decidibile, dove $\exp(x) = e^x$. Si osservi che, dalla decidibilità di $Th(\mathbb{R}, +, \cdot)$ segue che l'insieme $\mathbb{N}$ non è definibile in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ (mentre lo è in $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$). Più in generale si può dimostrare che ogni insieme definibile in $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha un numero finito di componenti connesse.