Teoria dei modelli

Alessandro Berarducci

7 Dicembre 2019

Indice

1 Linguaggi e strutture

L'anello $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un esempio di "struttura". L'anello $M_{2,2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali è un altro esempio di struttura. Entrambe le strutture posseggono un'operazione denotata con il simbolo "$+$" (addizione) e un'operazione denotata dal simbolo "$\cdot$" (moltiplicazione), che nel caso dei numeri reali denota la moltiplicazione tra numeri reali, e nel caso delle matrici denota la moltiplicazione righe per colonne di matrici. Diremo che $\mathbb{R}$ e $M_{2,2}(\mathbb{R})$ sono due strutture nel linguaggio $L = \{+, \cdot\}$. Diamo ora le definioni precise.

Definizione 1.1. Un **linguaggio** (per la logica del primo ordine) è un insieme di simboli (possibilmente anche vuoto) divisi in tre categorie: simboli di costante, simboli di funzione, simboli di relazione. Ad ogni simbolo è associato un numero naturale detto "arietà" che serve ad indicare il numero degli argomenti a cui va applicato il simbolo. L'arietà di un simbolo di costante è zero.

Definizione 1.2. Sia L un linguaggio del primo ordine. Una **L-struttura** consiste di un insieme non vuoto $dom(M)$ detto **dominio** della struttura e di una funzione interpretazione che associa:

1. ad ogni simbolo di costante c di L (se ve ne sono) un elemento $c_M \in dom(M)$, detto interpretazione del simbolo c in M,
2. ad ogni simbolo di funzione f di L di arietà n, una funzione $f_M : dom(M)^n \to dom(M)$, detta interpretazione del simbolo f in M.
3. ad ogni simbolo di relazione R di L di arietà n, una relazione $R_M \subseteq dom(M)^n$, detta interpretazione del simbolo R in M. (Identifichiamo una relazione ad n posti con l'insieme delle n-uple che la verificano.)

Esempio 1.3. Un anello ordinato $M = (dom(M); 0_M, 1_M, +_M, \cdot_M, <_M)$ è un struttura nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$, dove $0, 1$ sono simboli di costante, $+, \cdot$ sono simboli di funzioni binarie, $<$ è un simbolo di relazione binaria, e i simboli $0, 1, +, \cdot, <$ sono intepretati in modo da soddisfare gli assiomi degli anelli ordinati.

Per semplicità indicheremo talvolta con M sia la struttura stessa che il suo dominio $dom(M)$ e scriveremo c, f, R invece di c_M, f_M, R_M quando si chiaro dal contesto se ci riferiamo al simbolo o alla sua intepretazione.

1.1 Morfismi

Le L-strutture formano una "categoria", ovvero è possibile definire il concetto di "morfismo" tra due L-strutture.

Definizione 1.4. Un **morfismo** (o **omomorfismo**) $\phi \colon A \to B$ tra due L-strutture A e B è dato da una funzione $\phi \colon dom(A) \to dom(B)$ tale che:

1. se c è un simbolo di costante, allora $\phi(c_A) = c_B$;
2. se f è un simbolo di funzione di arietà n e $a_1, \ldots, a_n \in dom(A)$, allora $\phi(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n))$;
3. se R è un simbolo di relazione di arietà n e $(a_1, \ldots, a_n) \in R_A$, allora $(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)) \in R_B$.

Un **isomorfismo** $\phi \colon A \to B$ è un morfismo biunivoco la cui funzione inversa è essa stessa un morfismo. Osserviamo che un morfismo biunivoco non è necessariamente un isomorfismo. Per essere tale deve valere la doppia implicazione nella terza clausola, quella riguardante le relazioni.

I seguenti esempi illustrano il concetto di omomorfismo e isomorfismo.

Esempio 1.5. 1. Sia $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi e sia $\mathbb{Z}/(n)$ l'anello degli interi modulo n (entrambi considerati come strutture nel linguaggio $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$). La funzione che manda un intero x nella sua classe resto modulo n costituisce un omomorfismo da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}/(n)$.

2. Sia L un linguaggio con un simbolo di relazione binario f, sia $(\mathbb{R}; +)$ la L-struttura avente come dominio i numeri reali e in cui f è interpretato come la funzione somma, e sia $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ la L-struttura avente come dominio i numeri reali positivi e in cui f è interpretato come la funzione prodotto. La funzione esponenziale $x \mapsto e^x$ è un isomorfismo da $(\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$.

3. Un omomorfismo tra due ordini totali $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ non è altro che una funzione crescente $f : A \to B$. Ricordiamo che f è crescente se $a_1 < a_2$ implica $f(a_1) < f(a_2)$.

4. Sia L un linguaggio con un simbolo R di relazione binaria. Consideriamo due L strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ entrambe aventi come con dominio $\mathbb{N}^{>0}$ (gli interi positivi). Nella struttura $\mathcal{B}$ il simbolo R è interpretato come l'usuale relazione d'ordine $\leq$ su $\mathbb{N}$ mentre in $\mathcal{A}$ è interpretato come la relazione di divisibilità. Tra gli interi positivi, se x divide y allora $x \leq y$, quindi la funzione identità da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ è un morfismo. Abbiamo così un esempio di morfismo biunivoco che non è un isomorfismo.

Definizione 1.6. Il concetto di **immersione** si ottiene da quello di isomorfismo rinunciando alla richiesta che ϕ sia suriettiva. Una immersione è dunque un isomorfismo verso la sua immagine.

1.2 Sottostrutture

Definizione 1.7. Date due L-strutture A e B diciamo che A è una **sottostruttura** di B se $dom(A) \subseteq dom(B)$ e la funzione di inclusione $i \colon dom(A) \to dom(B)$ è una immersione. Ciò significa che i simboli di costante sono intepretati nello stesso modo in A e in B, e i simboli di funzione e relazione sono interpretati in A come la restrizione agli elementi di A delle funzioni e relazioni che intepretano gli stessi simboli in B. Ad esempio l'anello degli interi $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, 0, 1, +, -, \cdot)$ è una sottostruttura dell'anello dei reali $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$. Per indicare che A è una sottostruttura di B scriviamo $A \subseteq B$.

Osservazione 1.8. In strutture relazionali (ovvero in un linguaggio senza simboli di funzione e costante) ogni sottoinsieme non vuoto determina una sottostruttura (ad esempio un sottoinsieme di un ordine lineare è un ordine lineare con l'ordine indotto). In generale, affinché un sottoinsieme non vuoto $X \subset dom(B)$ del dominio di una struttura B determini una sottostruttura di B occorre che X contenga l'interpretazione dei simboli di costante del linguaggio (se ve ne sono) e che sia chiuso rispetto alla interpretazione dei simboli di funzione. Se questa condizione è verificata vi è un'unica sottostruttura di B avente X come dominio, e possiamo quindi per abuso di linguaggio identificare il sottoinsieme con la sottostruttura.

Osservazione 1.9. Il concetto di sottostruttura, così come quello di morfismo, dipende dalla scelta del linguaggio. Ad esempio $(\mathbb{N}, +, 0)$ è una sottostruttura di $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ma non è un sottogruppo nel senso usuale dell'algebra (non è chiuso rispetto alla funzione sottrazione). Per fare in modo che le sottostrutture dei gruppi siano gruppi, dobbiamo mettere nel linguaggio anche un simbolo per l'inversa della operazione gruppale.

Consideriamo ora il linguaggio $L = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ degli anelli. Ogni sottostruttura A di un anello B è essa stessa un anello. Tuttavia se A è un campo, non è detto che B sia un campo. Per esserlo deve essere chiuso per la funzione $1/x$. Osserviamo che nel linguaggio ammettiamo solo simboi per funzioni definite sull'intero dominio ed è questo il motivo per cui non abbiamo messo un simbolo per la funzione $1/x$ che è indefinita in zero.

1.3 Termini e Formule

Fissiamo un linguaggio L e un insieme V di simboli chiamati **variabili.**

Definizione 1.10. Definiamo induttivamente l'insieme $Ter_L(V)$ degli **L-termini** (con variabili da V) come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Ogni variabile $x \in V$ è un L-termine;
2. ogni simbolo di costante di L è un L-termine;
3. se $t_1, \dots, t_n$ sono L-termini, e $f \in L$ è un simbolo di funzione di arietà n, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un L-termine.

Un termine in cui non occorrano variabili viene detto **termine chiuso**. Chiaramente i termini chiusi possono esistere solo se il linguaggio contiene almeno un simbolo di costante.

Esempio 1.11. I simboli di funzione binaria verranno normalmente scritti in notazione infissa, ad esempio nella forma $x + y$ anziché $+(x, y)$, e verranno seguite le usuali convenzioni sull'omissione delle parentesi superflue. Le usuali espressioni polinomiali dell'algebra, come $x^2 + 2xy - z$ possono essere viste come termini in un linguaggio che comprende i simboli di addizione, sottrazione e moltiplicazione e, se necessario, dei simboli per i coefficienti (se i coefficienti sono interi bastano i simboli per 0 e 1 perché gli altri si ottengono per somme e sottrazioni).

Passiamo ora a definire l'insieme delle L-formule. Fissiamo a tal fine un insieme infinito V di variabili (in genere si prende V numerabile).

Definizione 1.12. Una **L-formula atomica** è una espressione della forma $t_1 = t_2$, dove t_1, t_2 sono L-termini (con variabili da V), oppure della forma $R(t_1, \dots, t_n)$, dove R è un simbolo di relazione n-aria di L (se ve ne sono) e $t_1, \dots, t_n$ sono L-termini.

Per definire l'insieme delle formule (non atomiche), oltre ai simboli fino ad ora introdotti faremo uso dei simboli $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ per i connettivi proposizionali, i simboli $\exists$ e $\forall$ per i quantificatori esistenziali e universali, il simbolo $=$ per l'uguaglianza, e le parentesi.

Definizione 1.13. L'insieme delle **L-formule** è definito induttivamente come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

1. Ogni L-formula atomica è una L-formula.
2. Se α e β sono L-formule, allora $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \to \beta)$ sono L-formule.
3. Se α è una L-formula e x è una variabile, allora $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ sono L-formule.

Nel dare esempi di L-formule ometteremo le parentesi ridondanti quando non sussista ambiguità di lettura.

Definizione 1.14. Le **sottoformule** di una formula ϕ sono per definizione quelle formule che intervengono nella formazione induttiva di ϕ (inclusa la ϕ stessa). Quindi ad esempio le sottoformule di $(\alpha \to \beta)$ sono la formula stessa $(\alpha \to \beta)$ e tutte le sottoformule di α e di β (incluse α e β stesse).

Un'occorrenza di una variabile x in una formula α si dice **legata** se occorre in una sottoformula β di α immediatamente preceduta da un quantificatore $\forall x$ o $\exists x$. Un'occorrenza non legata si dice **libera**. Le variabili libere di una formula sono le variabili che hanno almeno una occorrenza libera nella formula. Se le variabili libere di φ sono incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ scriveremo anche $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ invece di φ.

Una formula senza variabili libere viene detta **formula chiusa** o **enunciato**.

Esempio 1.15. Le variabili libere di $x = y \wedge \forall u \exists x (x = u)$ sono la x e la y (sebbene la x abbia anche un'occorrenza legata).

1.4 Semantica di Tarski

I termini e le formule di per sé non hanno alcun significato fino a quando si specifichi una struttura in cui interpretarle. Data una L-struttura M ed una L-formula chiusa φ vogliamo definire cosa significhi che φ è vera in M. A livello intuitivo φ è vera in M se si ottiene un enunciato vero quando si interpretino i simboli del linguaggio L come prescrive la L-struttura M, i connettivi booleani tramite le usuali tavole di verità, e si leggano $\forall x\varphi$ e $\exists x\varphi$ rispettivamente come "per ogni x appartenente ad M vale φ" ed "esiste almeno un x in M tale che vale φ". Il simbolo $=$ viene interpretato come la relazione di uguaglianza.

Esempio 1.16. Sia $L = \{0, 1, +, \cdot\}$. La formula $\forall x \exists y (x \cdot y = 1)$ è vera nell'anello $\mathbb{R}$ dei numeri reali (con l'usuale interpretazione dei simboli di L) e falsa in $\mathbb{Z}$ (l'anello degli interi), in quanto nei reali ogni elemento ha un inverso moltiplicativo mentre in $\mathbb{Z}$ ciò non è vero.

Passiamo ora alle definizioni formali. La definizione che daremo di "φ è vera in M" sarà per induzione sulla complessità di φ. La definizione è non costruttiva in quanto non fornisce un algoritmo per stabilire se una formula sia vera, ma stabilisce solo le condizioni che debbono essere soddisfatte affinchè sia vera. Se però il dominio della struttura è finito, tali condizioni si possono tradurre in un algoritmo. Siccome le formule possono contenere al loro interno dei termini, dobbiamo prima dare la semantica dei termini.

Definizione 1.17. Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme di variabili e sia M una L-struttura. Una **valutazione** in M delle variabili $x_1, \ldots, x_n$ è una funzione $v : \{x_1, \ldots, x_n\} \to dom(M)$ che assegna a ciascuna delle variabili x_i un valore $a_i = v(a_i)$ nel dominio della L-struttura M. Scriveremo anche $v = (a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$ per indicare tale valutazione.

Definizione 1.18. Data una L-struttura M e un L-termine t le cui variabili sono incluse nel dominio della valutazione v in M definiamo induttivamente $t(v)^M \in dom(M)$ nel modo seguente:

1. Se x è una variabile e v è una valutazione che associa a x il valore $a \in M$, allora $x(v)^M = a$;
2. Se c è un simbolo di costante di L, allora $c(v)^M = c_M$;
3. Se t è della forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, allora $t(v)^M = f_M(t_1(v)^M, \ldots, t_n(v)^M)$.

Ad esempio nella struttura $(\mathbb{R}; +, \cdot, 0, 1)$ il valore del termine $x + 1$ rispetto alla valutazione $(3/x)$ è 4.

Definizione 1.19 (Semantica di Tarski)**.** Sia M una L-struttura, sia ϕ una L-formula le cui variabili libere siano incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e sia v una valutazione delle variabili con $v(x_i) = a_i \in M$, ovvero $v = (a_1/x_1, \ldots, a_n/x_n)$. Diciamo che $\phi(v)$ è vera in M, e scriviamo $M \models \phi(v)$, se ciò segue dalle seguenti clausole induttive. L'induzione viene fatta sul numero dei connettivi della formula.

1. $M \models \neg\phi(v)$ se e solo se $M \not\models \phi(v)$ (cioè non vale $M \models \phi(v)$);
2. $M \models (\phi \wedge \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ e $M \models \psi(v)$;
3. $M \models (\phi \vee \psi)(v)$ se e solo se $M \models \phi(v)$ o $M \models \psi(v)$;
4. $M \models (\phi \to \psi)(v)$ se e solo se $M \not\models \phi(v)$ o $M \models \psi(v)$.

Stiamo naturalmente assumendo che il lettore conosca il significato delle congiunzioni "e", "o", "non", altrimenti avremmo dovuto richiamare le "tavole di verità" dei connettivi booleani e dire che il valore di verità (ovvero il valore "vero" o "falso") di una formula ottenuta tramite $\neg, \wedge, \vee, \to$ da altre formule si ottiene applicando le tavole di verità ai valori delle sue sottoformule.

Veniamo ora ai quantificatori:

1. $M \models (\forall x\phi)(v)$ se e solo se per ogni $a \in dom(M)$, $M \models \phi(a/x, v)$; dove indichiamo con $(a/x, v)$ la valutazione che coincide con v sulle variabili diverse da x ed assegna ad x il valore a.
2. $M \models (\exists x\phi)(v)$ se esiste $a \in dom(M)$ tale che $M \models \phi(a/x, v)$.

Restano da trattare le formule atomiche, che costituiscono la base dell'induzione:

1. $M \models R(t_1, \dots, t_n)(v)$ se e solo se $(t_1(v)^M, \dots, t_n(v)^M) \in R_M$;

2. $M \models t_1 = t_2$ se e solo se $t_1(v)^M$ e $t_2(v)^M$ sono lo stesso elemento.

Una formula φ con variabili libere incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ verrà spesso indicata con la notazione $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. In questo caso, data una valutazione $v = (a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$ con $a_i = v(x_i) \in dom(M)$, scriveremo $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ anzichè $M \models \varphi(v)$ qualora l'ordine delle variabili sia sottointeso (ovvero è chiaro che a_i va in x_i). Con simili convenzioni la clausola del $\forall$ prende la forma seguente: $M \models \forall x \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ se e solo se, per ogni $a \in M$, $M \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$, dove si intende che le variabili libere di $\forall x \varphi$ siano incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ e che la notazione $M \models \forall x \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$ stia per $M \models (\forall x \varphi)(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)$. Analogamente $M \models \exists x \phi(x, a_1, \dots, a_n)$ se e solo se esiste $a \in M$ tale che $M \models \phi(a, a_1, \dots, a_n)$.

Esercizio 1.20. Il valore di verità di $\phi(v)$ in M dipende solo dalla restrizione di v allle variabili libere di ϕ. In altre parole se v e v' coincidono sulle variabili libere di ϕ, allora $M \models \phi(v)$ se e solo se $M \models \phi(v')$. In particolare se ϕ è un L-enunciato (ovvero una L-formula senza variabili libere) allora il suo valore di verità in M non dipende da v. Diciamo in tal caso che ϕ è vero in M, e scriviamo $M \models \phi$, se $M \models \phi(v)$ per ogni v (o equivalentemente per qualche v).

Esercizio 1.21. Una funzione $f : M \to N$ è un'immersione se e solo se per ogni L-formula atomica $\varphi(\overline{x})$ (o equivalentemente per ogni formula senza quantificatori) e per ogni n-tupla $\overline{a}$ di elementi di M, si ha $M \models \varphi(\overline{a})$ se e solo se $N \models \varphi(f\overline{a})$.

1.5 Insiemi definibili

Definizione 1.22. Sia M una L-struttura. Un sottoinsieme X di M^n è $\emptyset$-definibile se esiste una L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ tale che X è l'insieme delle n-uple $\bar{a}$ da M tali che $M \models \phi(\bar{a})$. Diciamo che X è **definibile** se esiste una L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$ e dei parametri $b_1, \dots, b_k \in M$ tale che X è l'insieme delle n-uple $\bar{a}$ da M tali che $M \models \phi(\bar{a}, \bar{b})$. Diremo che X è definibile con parametri da $B \subseteq dom(M)$ se i b_i possono essere presi in B.

Esempio 1.23. La circonverenza di raggio r nel piano cartesiano, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ è definibile nella struttura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ con parametro $r \in \mathbb{R}$. Tuttavia se r è razionale, o più in generale reale algebrico, la stessa circonferenza è definibile senza parametri. Infatti in entrambi i casi è possibile trovare una formula senza parametri $\varphi(z)$ che equivale a $z = r$ (ad esempio $z = 2/3$ equivale a $z + z + z = 1 + 1$), dimodoché, al posto di $x^2 + y^2 = r^2$, possiamo scrivere la formula equivalente $\exists z(\varphi(z) \wedge x^2 + y^2 = z^2)$.

2 Teorie e modelli

Definizione 2.1. Una **teoria** T è una coppia consistente di un linguaggio L e di un insieme di L-enunciati chiamati assiomi di T. Quando L sia sottointeso identifichiamo T con l'insieme dei suoi assiomi, e penseremo quindi a T come ad un insieme di L-enunciati.

Esempio 2.2. La teoria dei gruppi può essere formulata in un linguaggio con un simbolo di costante 1 per l'elemento neutro, un simbolo di funzione binaria $\cdot$ per l'operazione di gruppo, e un simbolo di funzione unaria per l'inverso moltiplicativo x^{-1}. Gli assiomi sono:

1. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
2. $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
3. $x \cdot x^{-1} = 1 = x^{-1} \cdot x$

implicitamente preceduti da $\forall xyz$.

Definizione 2.3. Un **modello** di una L-teoria T è una L-struttura in cui risultano veri tutti gli assiomi di T. Ad esempio un gruppo è, per definizione, un modello della teoria dei gruppi. Se M è un modello di T scriviamo $M \models T$. Quindi $M \models T$ se per ogni assioma ϕ di T, si ha $M \models \phi$. Indichiamo con $Mod_L(T)$ la classe di tutti i modelli di T.

Una L-teoria T si dice **soddisfacibile**, o **coerente** (semanticamente), se ha almeno un modello, e si dice **insoddisfacibile** o **incoerente** (semanticamente) se non ha modelli.

2.1 Conseguenza logica

Definizione 2.4 (Conseguenza logica)**.** Sia ϕ una L-formula chiusa e T una L-teoria. Diciamo che ϕ **segue logicamente** da T, e scriviamo $T \models \phi$, se ϕ è vera in tutti i modelli di T, ovvero non esiste alcuna L-struttura che renda veri tutti gli assiomi di T e non renda vera ϕ. In altre parole: $T \models \phi$ se e solo se $Mod_L(T) \subseteq Mod_L(\phi)$. In particolare se T è insoddisfacibile, cioè se $Mod_L(T) = \emptyset$, allora vale sempre $T \models \phi$ (in quanto l'insieme vuoto è contenuto in ogni altro insieme).

Definizione 2.5 (Formule logicamente valide)**.** Sia L un dato linguaggio e sia ϕ una L-formula chiusa. Diciamo che ϕ è **logicamente valida**, e scriviamo $\models \phi$, se ϕ è vera in ogni L-struttura. Osserviamo che se T è la L-teoria con un insieme vuoto di assiomi, allora ogni L-struttura è modello di T, e pertanto si ha $\models \phi$ se e solo se $T \models \phi$.

Il seguente esercizio mostra quanto possa essere non banale riconoscere se una formula è logicamente valida. In effetti si può mostrare che non c'è un algoritmo generale per farlo (l'insieme delle formule valide è semidecidibile ma non decidibile).

Esercizio 2.6. Le formule $\exists x(P(x) \to \forall y P(y))$ e $\forall xyz(h(x, h(y, z)) = y) \to \forall x, y(x = y)$ sono logicamente valide.

Suggerimento: per la prima è necessario usare la "legge del terzo escluso" distinguendo i due casi in cui valga $\forall y P(y)$ o esista almeno un x per cui non valga $P(x)$. Per la seconda si rifletta sul fatto che, affinché possa valere $h(x, h(y, z)) = y$, la prima occorrenza di h deve selezionare informazione presente nel suo secondo argomento, mentre la seconda occorrenza di h deve selezionare informazione presente nel suo primo argomento. Per una dimostrazione formale si sostituiscano termini opportuni al posto di x, y, z.

2.2 Teorie deduttivamente chiuse

Definizione 2.7. Una L-teoria T si dice **deduttivamente chiusa** (da un punto di vista semantico) se l'insieme $\{\phi \mid T \models \phi\}$ delle sue conseguenze, coincide con l'insieme dei suoi assiomi.

Definizione 2.8. Due teorie nello stesso linguaggio si dicono **equivalenti** se hanno hanno le stesse conseguenze logiche, o equivalentemente gli stessi modelli.

Osservazione 2.9. Ogni teoria T equivale ad una teoria deduttivamente chiusa: basta considerare la teoria che ha come assiomi le conseguenze logiche di T.

2.3 Teorie complete

Definizione 2.10. Una L-teoria T è **completa** se è coerente e per ogni L-formula chiusa ϕ, si ha $T \models \phi$ o $T \models \neg\phi$.

Esempio 2.11. La teoria T dei gruppi non è completa. Sia infatti ϕ l'enunciato $\forall x, y(x \cdot y = y \cdot x)$, che esprime la legge commutativa. Poiché esistono sia gruppi commutativi che non commutativi, non si ha né $T \models \neg\phi$ né $T \models \phi$.

Definizione 2.12. Data una L-struttura M sia $Th(M)$ la teoria che ha come assiomi tutti gli L-enunciati veri in M. Allora $Th(M)$ è una L-teoria completa chiamata **teoria completa della struttura** M. Tutte le teorie complete sono di questa forma.

Esempio 2.13. Consideriamo la congettura di Goldbach: ogni numero pari > 2 è la somma di due numeri primi. Si trovi un enunciato φ nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ che è vero in $\mathbb{N}$ (con l'usuale interpretazione dei simboli di L) se e solo se vale la congettura di Goldbach. La teoria completa$Th(\mathbb{N})$ contiene φ oppure $\neg\varphi$, ma ad oggi non sappiamo quale delle due! A differenza della sua sottoteoria incompleta PA (aritmetica di Peano del primo ordine), la teoria completa $Th(\mathbb{N})$ non è "ricorsivamente assiomatizzata", ovvero non abbiamo un algoritmo per riconoscerne gli assiomi.

2.4 Elementare equivalenza

Esercizio 2.14. Sia T una L-teoria soddisfacibile e deduttivamente chiusa. Allora T è completa se e solo se è massimale tra le teorie soddisfacibili, cioè non è possibile ampliare l'insieme dei suoi assiomi in modo da ottenere una L-teoria che continua ad essere soddisfacibile.

Definizione 2.15. Due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si dicono **elementarmente equivalenti**, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se e solo se hanno la stessa teoria completa: $Th(\mathcal{A}) = Th(\mathcal{B})$.

Esercizio 2.16. Una L-teoria T è completa se e solo se, comunque si prendano due modelli di T, essi sono elementarmente equivalenti.

2.5 Espansioni e restrizioni del linguaggio

Definizione 2.17. Data una L-struttura A e una L'-struttura B con $L' \supseteq L$, diciamo B è una **espansione** di A (o che A è una **restrizione** di B), se A e B hanno lo stesso dominio e interpretano nello stesso modo i simboli di L, l'unica differenza consistendo nel fatto che B fornisce una interpretazione anche ai simboli di $L' \setminus L$. Scriviamo $B_{|L}$ per la restrizione di B ad L.

Ad esempio il gruppo $(\mathbb{R}, +, 0)$ è una restrizione del campo $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Osservazione 2.18. Se B è una espansione della L-struttura A, allora A e B forniscono lo stesso valore di verità alle formule di L.

Dato un insieme T di L-enunciati e un linguaggio espanso $L' \supseteq L$, possiamo pensare a T come ad una L-teoria o ad una L'-teoria. Il prossimo esercizio mostra che ciò non influenza la definizione di $T \models \varphi$.

Proposizione 2.19. *Sia T un insieme di L-enunciati, sia ϕ un L-enunciato, e sia $L' \supseteq L$. Allora $Mod_L(T) \subseteq Mod_L(\phi)$ se e solo se $Mod_{L'}(T) \subseteq Mod_{L'}(\phi)$. Possiamo quindi scrivere senza ambiguità $T \models \phi$ senza specificare se lavoriamo in L o in L'.*

Dimostrazione. Supponiamo $Mod_L(T) \subseteq Mod_L(\phi)$ e sia $A \in Mod_{L'}(T)$. Per l' Osservazione 2.18 abbiamo $A_{|L} \in Mod_L(T)$, onde $A_{|L} \in Mod_L(\phi)$, e quindi anche $A \in Mod_{L'}(\phi)$, ottenendo l'inclusione $Mod_{L'}(T) \subseteq Mod_{L'}(\phi)$. La direzione opposta è analoga. □

Lemma 2.20. *Sia T un insieme di L-enunciati, sia $\phi(x)$ una L-formula e sia c un simbolo di costante non in L. Sono equivalenti:*

1. *$T \models \phi(c)$ (nel linguaggio $L \cup \{c\}$).*
2. *$T \models \forall x \phi(x)$ (nel linguaggio L).*

Dimostrazione. Se $T \not\models \forall x \phi(x)$, allora esiste un modello A di T ed un elemento $a \in A$ con $A \models \neg\phi(a)$. La struttura (A, a) che espande A interpretando c con a è allora un modello di $T \cup \{\neg\phi(c)\}$ e dunque $T \not\models \phi(c)$. Viceversa se $T \models \forall x \phi(x)$ allora ovviamente $T \models \phi(c)$ (tenendo conto del Lemma 2.19). □

2.6 Immersioni elementari

Definizione 2.21. Un morfismo $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tra due L-strutture si dice una **immersione elementare** se per ogni n e per ogni L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ con variabili libere incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$, si ha:

$\mathcal{A} \models \phi(a_1, \dots, a_n)$, se e solo se $\mathcal{B} \models \phi(f(a_1), \dots, f(a_n))$

Una sottostruttura $\mathcal{B}$ di $\mathcal{A}$ si dice **sottostruttura elementare**, e scriviamo $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, se e solo se la inclusione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ è una immersione elementare.

Esempio 2.22. Sia $L = (<)$ e consideriamo la L-struttura costituita dall'insieme ordinato dei numeri interi $\mathbb{Z}$, e la sua sottostruttura $2\mathbb{Z}$ costituita dai numeri pari. Allora $2\mathbb{Z}$ è elementarmente equivalente a $\mathbb{Z}$ (in quanto è isomorfa), ma non è una sua sottostruttura elementare perchè la formula $\exists x(2 < x \wedge x < 4)$ è vera in $\mathbb{Z}$ ma non in $2\mathbb{Z}$.

2.7 Diagrammi

Definizione 2.23. Sia M una L-struttura e sia A un sottoinsieme del dominio di M. Sia L_A il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di nuovi simboli di costante c_a corrispondenti agli elementi a di A. Espandiamo M ad una L_A struttura interpretando c_a con a, e denotiamo $(M, a)_{a \in A}$ la struttura espansa. Osserviamo che per ogni L-formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in A$ si ha

$M \models \phi(a_1, \dots, a_n)$ se e solo se $(M, a)_{a \in A} \models \phi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n})$.

Indichiamo con $Th((M, a)_{a \in A})$ la teoria completa della L_A-struttura $(M, a)_{a \in A}$.

In particolare, prendendo $A = M$, otteniamo il **diagramma elementare** di M, definito come la L_M-teoria completa $ED(M) := Th((M, m)_{m \in M})$.

Lemma 2.24. *Siano M, N L-strutture. Allora M può essere immersa elementarmente in N se e solo se N può essere espansa ad un modello di $ED(M)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f\colon M \to N$ sia una immersione elementare. Espandiamo N ad una L_M-struttura $N' = (N, f(m))_{m \in M}$ interpretando c_m con $f(m)$. È immediato verificare che $N' \models ED(M)$.

Viceversa se N ammette una espansione N' modello di $ED(M)$, allora la funzione $f\colon M \to N$ che manda m nell'interpretazione di c_m in N' è una immersione elementare di M in N. $\square$

Corollario 2.25. *Sia M una L-struttura e sia T una L_M-teoria. Una condizione necessaria e sufficiente affinché esista $N \succ M$ tale che $N \models T$ è che $ED(M) \cup T$ sia soddisfacibile.*

2.8 Amalgamazione di immersioni elementari

Lemma 2.26. *Siano M, N due L-strutture elementarmente equivalenti. Allora esiste una L-struttura C ed immersioni elementari $f\colon M \to C$ ed $g\colon N \to C$. (Inoltre possiamo fare in modo che una delle due immersioni sia l'inclusione.)*

Dimostrazione. Dimostriamo la prima parte. Sia $ED(M)$ il diagramma elementare di M formulato nel linguaggio $L \cup \{c_m \mid m \in dom(M)\}$ dove c_m sono nuovi simboli di costante distinti tra loro, e sia $ED(N)$ il diagramma elementare di N formulato nel linguaggio $L \cup \{d_n \mid n \in dom(N)\}$ dove d_n sono simboli di costante distinti tra loro e da tutti i c_m (quindi anche se M ed N avessero elementi in comune, le corripondenti costanti sarebbero diverse). È sufficiente mostrare che la teoria $T = ED(M) \cup ED(N)$ è coerente, perché poi basta prendere come C un modello di questa teoria (e come immersioni elementari le funzioni che mandano $m \in M$ nell'interpretazione di c_m in C, ed $n \in N$ nell'interpretazione di d_n in C). Se T fosse incoerente, per compattezza lo sarebbe una sua sottoteoria finita. In altre parole ci sarebbero due L-formule $\varphi(\bar{x})$ e $\theta(\bar{x})$ tali che $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \in ED(M)$, $\theta(d_{n_1}, \dots, d_{n_l}) \in ED(N)$ e $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \models \neg\theta(d_{n_1}, \dots, d_{n_l})$. Siccome le costanti sono distinte, ne segue che $\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k}) \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$. Poiché $(M, m_1, \dots, m_k)$ è modello dell'antecendente, ne segue che $M \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$, e essendo $N \equiv M$ anche $N \models \forall x_1, \dots, x_l \neg\theta(x_1, \dots, x_l)$, contraddicendo il fatto che $N \models \theta(n_1, \dots, n_l)$. □

Analogamente si dimostra:

Lemma 2.27. *Siano $i \colon P \to M$ e $j \colon P \to N$ immersioni elementari di L-strutture. Allora esiste C ed immersioni elementari $f \colon M \to C$ ed $g \colon N \to C$ tali che $f \circ i = g \circ j$.*

Dimostrazione. Basta aggiungere al comune linguaggio di M ed N costanti per ciascun elemento di P e applicare il Lemma 2.26. □

3 Eliminazione dei quantificatori

Definizione 3.1. Una L-teoria T ammette eliminazione dei quantificatori (EQ) se e solo se ogni L-formula $\varphi(\bar{x})$ equivale ad una formula senza quantificatori, ovvero esiste una $\psi(\bar{x})$ senza quantificatori tale che $T \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \psi(\bar{x}))$.

Esempio 3.2. Vedremo che la teoria completa del campo ordinato $\mathbb{R}$ ammette EQ. Ad esempio la formula $\exists x(x^2 + bx + c = 0)$ equivale in $\mathbb{R}$ alla formula senza quantificatori $4c < b^2$. Un altro esempio è dato dalla formula $\exists xy((x \neq 0 \vee y \neq 0) \wedge ax + by = 0 \wedge cx + dy = 0)$, la quale asserisce l'esistenza di una soluzione non nulla (x, y) del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale formula equivale in $\mathbb{R}$ alla formula senza quantificatori $ad = bc$, ovvero al fatto che il determinante della matrice è nullo. La presenza del simbolo $<$ nella segnatura è necessario per avere l'eliminazione dei quantificatori. La formula $\exists x(x^2 = y)$ equivale alla formula senza quantificatori $0 < y \vee 0 = y$ ma non equivale a nessuna formula senza quantificatori che non usi il $<$.

3.1 Forma normale disgiuntiva, formule primitive

Abbiamo bisogno di richiamare la nozione di "forma normale disgiuntiva". Facciamo prima un esempio:

Esempio 3.3. Sia $F = \{A, B, C\}$ un insieme di formule. Sono equivalenti:

1. $(A \to B) \wedge (\neg A \to C)$ (Se A, allora B, altrimenti C);
2. $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (Forma normale congiuntiva);
3. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$ (Forma normale disgiuntiva).

Lemma 3.4 (Forma normale disgiuntiva)**.** *Sia $F = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ un insieme di formule e sia ψ una loro combinazione booleana. Allora ψ può essere messa in **forma normale disgiuntiva**, ovvero equivale ad una disgiunzione di congiunzioni di formule in F o negazioni di formule in F.*

Dimostrazione. Chiamiamo "clausola congiuntiva" una formula della forma $\pm\phi_1 \wedge \dots \wedge \pm\phi_n$ dove $\pm\phi_i$ è ϕ_i oppure $\neg\phi_i$ [1] . Ci sono in tutto 2^n clausole. Ciascuna clausola congiuntiva implica ψ oppure implica $\neg\psi$ (in quanto il valore di verità di una clausola congiuntiva determina il valore delle combinazioni booleane delle ϕ_i). La ψ equivale alla disgiunzione della clausole congiuntive che la implicano. □

Definizione 3.5. Una **formula primitiva** è una formula della forma $\exists x\phi$ dove ϕ è una congiunzione di formule atomiche e di negazioni di formule atomiche.

Theorem 3.6. *Una teoria T ammette EQ se e solo se ogni formula primitiva equivale ad una formula senza quantificatori.*

Dimostrazione. Per avere EQ è sufficiente che ogni formula della forma $\exists x\phi$, con ϕ senza quantificatori, equivalga ad una formula senza quantificatori (in quanto poi possiamo induttivamente eliminare tutti i quantificatori procedendo da quelli più interni a quelli più esterni). Mettendo ϕ in forma normale disgiuntiva ed osservando che $\exists x(\alpha \vee \beta)$ equivale a $\exists x\alpha \vee \exists x\beta$, possiamo ulteriormente supporre che ϕ sia una congiunzione di formule atomiche o negazioni di formule atomiche, e ci riduciamo così alle formule primitive. □

3.2 Model completezza

Definizione 3.7. Una teoria T si dice **model-completa** se ogni immersione di modelli di T è una immersione elementare.

Proposizione 3.8. *Se T ammette eliminazione dei quantificatori allora è model completa.*

Dimostrazione. Segue dal fatto che le formule senza quantificatori sono vere in una struttura se e solo se lo sono in una soprastruttura. □

[1] Esiste anche una nozione duale di clausola disgiuntiva ottenuta scambiando i ruoli di $\wedge$ e $\vee$.

4 Ultraprodotti e teorema di compattezza

4.1 Prodotti diretti

Dati due gruppi $\mathcal{A} = (A, \cdot, 1)$ e $\mathcal{B} = (B, \cdot, 1)$ possiamo formare il loro prodotto diretto $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ prendendo come dominio l'insieme delle coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$ e definendo l'operazione di gruppo termine a termine: $(a, b) \cdot (a', b') = (a \cdot a', b \cdot b')$. Il prodotto di due gruppi risulta allora un gruppo con elemento neutro $(1, 1)$.

Altrettanto non avviene per i campi. Se facciamo il prodotto diretto di due campi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ definendo le operazioni $+$ e $\cdot$ termine a termine, allora la struttura risultante $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ è un anello ma non un campo: infatti $(0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 0)$, e quindi $(0, 1)$ non può essere invertibile.

Definiremo nel seguito degli opportuni quozienti dei prodotti diretti, gli ultraprodotti, in cui sono preservate tutte le proprietà esprimibili al primo ordine: quindi un ultraprodotto di campi sarà un campo.

Diamo prima la definizione di prodotto diretto per un insieme possibilmente infinito di strutture.

Definizione 4.1. Siano $\mathcal{A}_i$, per $i \in I$, L-strutture. Il **prodotto diretto** $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$ è la L-struttura il cui dominio è formato dall'insieme di tutte le "I-uple" $a = \langle a(i) : i \in I \rangle$ tali che per ogni $i \in I$, la i-esima coordinata $a(i)$ appartiene ad A_i. Le operazioni e le relazioni sono definite termine a termine: ad esempio se il liguaggio comprende una operazione binaria $+$ e una relazione binaria $<$, allora $a + b = c$ se e solo se $\forall i \in I, a(i) + b(i) = c(i)$, e $a < b$ se e solo se $\forall i \in I, a(i) < b(i)$.

4.2 Filtri e ultrafiltri

L'ultraprodotto è un quoziente $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i / U$ che dipende da una misura finitamente additiva $m_U \colon I \to \{0, 1\}$ a due valori. La misura m_U determina univocamente la collezione U degli insiemi di misura uno e viceversa. L'idea della definizione di ultraprodotto è di identificare due I-uple che differiscono su un insieme di indici di misura 0. Trovare tali misure non è semplice. Ad esempio se $I = \mathbb{N}$ allora m_U deve dare misura 0 ai pari e 1 ai dispari o viceversa, e tale scelta è ovviamente arbitraria in quanto non c'è ragione di preferire i pari o i dispari. Se decidiamo di dare misura 1 ai pari, lo stesso problema si ripresenta per i multipli di 4 e così via. A causa di tale successione di scelte arbitrarie, la esistenza di misure additive non banali a valori $\{0, 1\}$ richiede l'assioma della scelta (se l'insieme I è infinito).

La seguente definizione enumera alcune proprietà di U (la collezione degli insiemi di misura uno).

Definizione 4.2. Sia U un insieme non vuoto di sottoinsiemi di I. Diciamo che U è un **filtro** se soddisfa le proprietà:

1. $\emptyset \notin U$ e $I \in U$;

2. $A \in U$ e $B \supseteq A$, implica $B \in U$.

3. $A \in U$ e $B \in U$, implica $A \cap B \in U$.

   Diciamo inoltre che U è un **ultrafiltro** se vale anche la:

4. Per ogni $A \subseteq I$ esattamente uno dei due insiemi A ed $I \setminus A$ appartiene ad U.

   allora

Definizione 4.3. (Misura associata ad un ultrafiltro) Dato un ultrafiltro U su I, definiamo $m_U \colon I \to \{0,1\}$ ponendo $m_U(X) = 1$ se e solo se $X \in U$.

Proposizione 4.4. *m_U è finitamente additiva, cioè se X, Y sono disgiunti $m_U(X \cup Y) = m_U(X) + m_U(Y)$.*

Dimostrazione. Intanto osserviamo che la somma non può essere uguale a due, perchè due insiemi di misura 1 non possono essere disgiunti (la loro intersezione ha ancora misura 1). Ci sono quindi solo tre casi da verificare a seconda che X, Y abbiano misure $(0,0)$ o $(0,1)$ o $(1,0)$.

Se X ha misura 1 (cioè $X \in U$) anche $X \cup Y$ ha misura uno perchè se U contiene un insieme contiene tutti gli insiemi che lo includono.

Resta da verificare che se X, Y hanno misura zero, anche la loro unione $X \cup Y$ ha misura zero, cioè $I \setminus (X \cup Y) \in U$. Poiché U è un ultrafiltro, il complemento di X e quello di Y sono in U, e quindi anche la loro intersezione $(I \setminus X) \cap (I \setminus Y)$ è in U, ovvero $I \setminus (X \cup Y) \in U$ come desiderato. □

Un filtro U si dice **principale** se e solo se esso consiste di tutti e soli gli insiemi che contengono un dato insieme $A \subseteq I$, e diciamo i tal caso che A genera U. Se U è un ultrafiltro principale generato da $A \subseteq I$, è facile vedere che A deve consistere di un unico elemento (se no potrei scrivere A come unione di due sottoinsiemi non vuoti disgiunti e uno dei due dovrebbe appartenere ad U). Quindi gli ultrafiltri principali sono tutti e soli quelli della forma $\{A \subseteq I : x \in A\}$ dove x è un elemento di I. La misura m_U associata ad un ultrafiltro principale $U = \{A \subseteq I : x \in A\}$ dà misura 1 agli insiemi che contengono x e misura 0 agli altri. Noi siamo interessati agli ultrafiltri non principali, quelli cioè che assegnano misura 0 agli insiemi con un solo elemento, e quindi a tutti gli insiemi finiti (per la finita additività di m_U).

Definizione 4.5. Una collezione U di sottoinsiemi di I è una **prebase** o ha la **proprietà dell'intersezione finita (fip)** se l'intersezione di un numero finito di elementi di U è sempre non vuota.

Proposizione 4.6. *Ogni prebase si estende a un filtro.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una prebase. Se $\mathcal{F}$ è un filtro che contiene $\mathcal{B}$, allora $\mathcal{F}$ deve contenere tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$, e tutti gli insiemi che includono queste intersezioni finite. È ragionevole quindi definire:

$$\mathcal{F} = \{Y \subseteq I : \exists n \in \omega \exists X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{B} \text{ con } Y \supseteq X_1 \cap \ldots \cap X_n\}$$

Se $\mathcal{F}$ è un filtro, è sicuramente il più piccolo filtro che contiene $\mathcal{B}$. Verifichiamo che è un filtro. Se $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}$, allora Y_1 include una intersezione finita $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ di elementi di $\mathcal{B}$ e Y_2 include una intersezione finita $X'_1 \cap \ldots \cap X'_m$ di elementi di $\mathcal{B}$. Ma allora $Y_1 \cap Y_2$ include $X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap X'_1 \cap \ldots \cap X'_m$ e quindi $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}$. Abbiamo così mostrato che $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezioni finite e ne segue facilmente che $\mathcal{F}$ è un filtro. $\square$

Prima di mostrare che ogni filtro si estende ad un ultrafiltro osserviamo che:

Proposizione 4.7. *Se $\mathcal{F}$ è un filtro, e $I \setminus A \notin \mathcal{F}$, allora $\mathcal{F} \cup \{A\}$ è una prebase.*

Dimostrazione. Se non lo fosse, esisterebbero $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{F}$ tali che $X_1 \cap \ldots \cap X_n \cap A = \emptyset$. Ne segue $X_1 \cap \ldots \cap X_n \subseteq I \setminus A$ e quindi $I \setminus A \in \mathcal{F}$, contraddizione. $\square$

Proposizione 4.8. *$\mathcal{F}$ è un ultrafiltro se e solo se è un filtro massimale (cioè non esiste alcun filtro che lo include propriamente)*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un filtro massimale. Se non è un ultrafiltro, esiste $A \subseteq I$ tale che $A \notin \mathcal{F}$ e $I \setminus A \notin \mathcal{F}$. Da $I \setminus A \notin \mathcal{F}$ segue che $\mathcal{F} \cup \{A\}$ è una prebase, e quindi si estende a un filtro $\mathcal{F}_1$, che deve includere propriamente $\mathcal{F}$ perchè $A \notin \mathcal{F}$. Questo è assurdo perchè $\mathcal{F}$ è massimale.

Viceversa se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro, allora è un filtro massimale, altrimenti si estenderebbe ad un filtro $\mathcal{F}_1$ che contiene almeno un insieme $A \notin \mathcal{F}$. Otteniamo un assurdo mostrando che nè A nè il suo complemento possono essere in $\mathcal{F}$: infatti se $I \setminus A$ è in $\mathcal{F}$, allora è anche in $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_1$ conterrebbe sia A che il suo complemento, che è una contraddizione. $\square$

Per applicare il lemma di Zorn, abbiamo bisogno di:

Proposizione 4.9. *Per ogni catena di filtri $\mathcal{F}_j : j \in J\}$ (cioè un insieme di filtri su uno stesso insieme di indici I, a due a due contenuti l'uno nell'altro) esiste un filtro $\mathcal{F}$ che include tutti gli $\mathcal{F}_j$. Inoltre possiamo prendere come $\mathcal{F}$ l'unione degli $\mathcal{F}_j$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ l'unione degli $\mathcal{F}_j$, cioè $X \in \mathcal{F}$ se e solo se esiste $j \in J$ con $X \in \mathcal{F}_j$. Se $X, Y \in \mathcal{F}$, allora $X \in \mathcal{F}_{j_1}$ e $Y \in \mathcal{F}_{j_2}$. Poiché gli $\mathcal{F}_j$ formano una catena, scegliendo il più grande tra $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ troviamo un $j \in J$ tale che $X, Y \in \mathcal{F}_j$ e quindi $X \cap Y \in \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}$. Quindi $\mathcal{F}$ è chiuso per intersezioni finite, e le altre proprietà da verificare sono ovvie. $\square$

Lemma 4.10. *Ogni filtro $\mathcal{F}$ si estende ad un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Applico il lemma di Zorn all'insieme dei filtri contenenti $\mathcal{F}$ ordinati per inclusione. Le ipotesi del lemma di Zorn sono verificate per il lemma precedente e otteniamo così un filtro massimale contenente $\mathcal{F}$. $\square$

Ogni prebase si estende dunque ad un ultrafiltro.

Definizione 4.11. (Filtro dei cofiniti) Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli $X \subseteq I$ tali che il complemento di X in I è finito. $\mathcal{F}$ è un filtro, detto **filtro dei co-finiti**, o **filtro di Fréchet**.

Un ultrafiltro su un insieme di indici infinito I è non principlale se e solo se contiene il filtro dei cofiniti. Visto che ogni filtro si estende ad un ultrafiltro, ne segue che su un insieme di indici infinito esiste almeno un ultrafiltro non principale. Su un insieme finito I tutti gli ultrafiltri sono principali, e tutto si banalizza.

4.3 Ultraprodotti

Definizione 4.12. L'**ultraprodotto** $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U$ delle L-strutture $\mathcal{A}_i$ rispetto all'ultrafiltro U è definito come segue. Gli elementi di $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U$ sono classi di equivalenza a/U di elementi $\langle a(i) : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i$, dove $a/U = b/U$ se e solo se $\{i \in I : a(i) = b(i)\} \in U$, ovvero a e b coincidono su un insieme di indici in U. Poiché U è chiuso per intersezioni finite, questa è una relazione di equivalenza.

Per ora abbiamo definito un insieme, non ancora una struttura. Per definire una struttura dobbiamo mostrare come interpretare i simboli di L in $\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i/U$. Supponiamo per semplicità che L abbia un simbolo di costante c, un simbolo di funzione binaria f e un simbolo di relazione binaria R. Definiamo la loro interpretazione nel modo seguente:

1. $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models R(a/U, b/U)$ se e solo se $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models R(a(i), b(i))\} \in U$.
2. $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models f(a/U, b/U) = c/U$ se e solo se $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models f(a(i), b(i)) = c(i)\} \in U$.
3. $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models a/U = c$ se e solo se $\{i \in I : \mathcal{A}_i \models a(i) = c\} \in U$.

La (1) definisce l'interpretazione di R.

A priori la (2) definisce solo una relazione ternaria, ma è facile verificare che si tratta in effetti di una funzione, ovvero esiste una e una sola classe c/U tale che $f(a/U, b/U) = c/U$. Volendo ci si può risparmiare questa verifica, trasformando le $\mathcal{A}_i$ in strutture relazionali (identificando le funzioni con i loro grafi), e usare poi il teorema di Łos, che vedremo in seguito, per mostrare che se un simbolo di relazione viene intepretato in tutte le $\mathcal{A}_i$ come il grafico di una funzione, lo stesso avverrà nell'ultraprodotto (per applicare il teorema Łos basta osservare che essere il grafo di una funzione è una proprietà del primo ordine).

La (3) definisce l'interpretazione della costante c come la classe di equivalenza modulo U della funzione costante $c = \langle c^{\mathcal{A}_i} : i \in I \rangle \in \prod_i \mathcal{A}_i$.

Il seguente teorema dice che l'ultraprodotto è una sorta di *media* di modelli per quanto concerne le proprietà del primo ordine: se la maggior parte dei modelli (rispetto alla misura m_U) soddisfa una certa proprietà del primo ordine, anche l'ultraprodotto soddisfa la data proprietà. Questo vale anche per proprietà che contengono parametri, e i parametri sono in effetti importanti per far funzionare la dimostrazione induttiva.

Theorem 4.13. *(Teorema di Łos) Per ogni formula $\phi(x_1, x_2, \ldots)$ e ogni scelta dei parametri $a/U, b/U, \ldots$ si ha*

$$\prod_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$$

se e solo se

$$\{i \in I : \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$$

Dimostrazione. L'equivalenza vale per definizione per formule del tipo $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, $y = c$, o $R(x_1, \ldots, x_n)$, dove f, c, R sono rispettivamente simboli di relazione, costante, funzione. Il caso generale si dimostra per induzione sulla complessità di ϕ. A tal fine dobbiamo distinguere vari casi.

Supponiamo che l'equivalenza valga per ϕ e mostriamola per $\neg\phi$. Abbiamo:
$\prod_i \mathcal{A}_i \models \neg\phi(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff$ non è vero che $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff$ (per induzione) non è vero che $\{i : \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$
$\iff$ (essendo U un ultrafiltro) $I \setminus \{i : \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$
$\iff$ $\{i : \mathcal{A}_i \models \neg\phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$.

Supponiamo ora che l'equivalenza valga per ϕ e ψ e mostriamola per $\phi \wedge \psi$.
$\prod_i \mathcal{A}_i \models \phi(a/U, b/U, \ldots) \wedge \psi(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff$ $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$ e $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models \psi(a/U, b/U, \ldots)$
$\iff$ (per induzione) $X = \{i : \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$ e $Y = \{i : \mathcal{A}_i \models \psi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$
$\iff$ $X \cap Y \in U$
$\iff$ $\{i : \mathcal{A}_i \models (\phi \wedge \psi)(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$

Consideriamo ora il caso del $\exists$ e trattiamo le due implicazioni da dimostrare separatamente. Supponiamo che $X = \{i : \mathcal{A}_i \models \exists x\phi(x, b(i), \ldots)\} \in U$ e definiamo $a \in \prod_i \mathcal{A}_i$ in modo che, per $i \in X$, si abbia $\mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)$ (in generale sarà necessario l'assioma della scelta per scegliere gli elementi $a(i)$ tra i vari possibili candidati), e per $i \notin X$, $a(i)$ è arbitrario. Poiché $X \in U$, a/U non dipende da come è stato definito $a(i)$ per $i \notin X$. Per costruzione $\{i : \mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)\} \in U$ e per ipotesi induttiva (visto che ϕ ha un connettivo in meno di $\exists x\phi$) possiamo suppore che $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models \phi(a/U, b/U, \ldots)$, e quindi a maggior ragione $\prod_i \mathcal{A}_i/U \models \exists x\phi(x, b/U, \ldots)$.

Viceversa, supponendo che $\exists x\phi(x, b/U, \ldots)$ valga in $\prod_i \mathcal{A}_i/U$, troviamo a/U che testimoni l'esistenziale, e per l'ipotesi induttiva ne deduciamo che $\mathcal{A}_i \models \phi(a(i), b(i), \ldots)$ vale per un insieme di indici X in U. Ne segue che $\mathcal{A}_i \models \exists x\phi(x, a(i), \ldots)$ vale per un insieme di indici che include X e che quindi appartiene ad U.

Gli altri casi si riconducono ai casi già trattati tramite opportune equivalenze logiche. Ad esempio per il connettivo $\vee$ usiamo le formule di De Morgan $\phi \vee \psi \iff \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$ e per il quantificatore $\forall$ usiamo l'equivalenza $\forall x\phi \iff \neg\exists x\neg\phi$.

Resta da trattare il caso delle formule atomiche che contengono composizioni di simboli di funzione, come ad esampio $f(g(x)) = y$. Si può trattare questo caso per induzione sul numero delle composizioni oppure aggirare il problema eliminando le composizioni al costo di quantificatori esistenziali: $f(g(x)) = y \leftrightarrow \exists z(z = g(x) \wedge f(z) = y)$, riconducendosi così ai casi già trattati. $\square$

Esempio 4.14. Se U un ultrafiltro non principale sull'insieme P dei numeri primi, $\prod_{p \in P}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/U$ è campo di caratteristica zero (dato $n \in \mathbb{N}$, si applichi il teorema di Łos alla proprietà del primo ordine "$1 + 1 + \ldots + 1 \neq 0$", dove $+1$ è ripetuto n volte).

4.4 Teorema di compattezza

Diamo ora per mezzo degli ultraprodotti, una dimostrazione puramente algebrica del teorema di compattezza (un'altra dimostrazione passa per il teorema di completezza della logica del primo ordine rispetto ad un opportuno sistema dimostrativo).

Theorem 4.15. *(Teorema di compattezza) Sia T una L-teoria. Supponiamo che T sia finitamente soddisfacibile, ovvero per ogni sottoteoria finita T' di T esista un modello $M_{T'}$ di T'. Allora T ha un modello M.*

Dimostrazione. L'idea è di definire $M = \prod_{T'} M_{T'}/U$ per un opportuno ultrafiltro U. L'insieme degli indici è dunque costituito da $I = \{T' : T' \text{ è una sottoteoria finita di } T\}$. Affinchè M sia modello di T occorre che per ogni assioma $\phi \in T$ si abbia $M \models \phi$ (possiamo assumere che gli assiomi siano formule chiuse). Per il teorema di Łos questo accade se l'insieme degli indici T' tali che $M_{T'} \models \phi$ appartiene all'ultrafiltro U. Basta quindi scegliere U in modo che per ogni $\phi \in T$, $X_\phi = \{T' \in I : \phi \in T'\} \in U$. Per verificare che un tale U esista, occorre verificare che gli insiemi X_ϕ, al variare di ϕ tra gli assiomi di T, costituiscono una prebase, ovvero l'intersezione di un numero finito di essi è non vuota. A tal fine basta osservare che l'intersezione $X_{\phi_1} \cap \ldots \cap X_{\phi_n}$ coincide con l'insieme $\{T' \in I : \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq T'\}$, che è ovviamente non vuoto in quanto contiene $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. $\square$

Definizione 4.16. Un ultraprodotto $\prod_{i \in I} M_i/U$ con tutti i fattori uguali $M_i = M$ viene detto **ultrapotenza**, e indicato con $\prod_{i \in I} M/U$.

Se ϕ è un L-enunciato senza parametri, per il teorema di Łos $\prod_i M/U \models \phi$ se e solo se $M \models \phi$. Quindi l'ultrapotenza è elementarmente equivalente al modello: $\prod_i M/U \equiv M$.

In generale l'ultrapotenza $\prod_i M/U$ non è isomorfa ad M (però lo è se U è principale). Se invece M è finito, la proprietà "essere isomorfo ad M" è esprimibile al primo ordine (verificate!) e quindi l'ultrapotenza $\prod_i M/U$ è sempre isomorfa ad M per il teorema di Łos.

Corollario 4.17. *Se $T \models \varphi$, allora esiste un sottoinsieme finito T_0 di T tale che $T_0 \models \varphi$.*

Dimostrazione. Basta usare il fatto che $T \models \phi$ se e solo se $T, \neg\phi$ non è soddisfacibile e applicare il Teorema 4.15. $\square$

4.5 Immersione diagonale

Tra M e una sua ultrapotenza $\prod_i M_i/U$ c'è una relazione ancora più stretta che l'essere elementarmente equivalenti. Vale cioè la seguente:

Proposizione 4.18. *Sia* $\delta\colon M \to \prod_i M/U$ *la mappa diagonale che manda* $a \in M$ *nella classe di equivalenza della funzione costante* a, *cioè* $\delta(a) = \langle a : i \in I\rangle/U$. *Allora* δ *immerge elementarmente* M *in* $\prod_i M/U$.

Dimostrazione. Immediato dal teorema di Łos: $M \models \phi(a, b, \dots)$ se e solo se $\prod_i M/U \models \phi(\delta(a), \delta(b), \dots)$. □

L'isomorfismo δ è detto **isomorfismo diagonale**. Se identifichiamo $\delta(a)$ con a un ultraprodotto è una estensione elementare del modello.

4.6 Numeri reali non-standard

Consideriamo un'ultrapotenza non principale del campo dei numeri reali $\mathbb{R}^* = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}/U$, dove abbiamo preso per semplicità $\mathbb{N}$ come insieme degli indici.

$\mathbb{R}^*$ è un campo ordinato come $\mathbb{R}$ perché la proprietà di essere un campo ordinato è del primo ordine e quindi si conserva. Non è in generale completo, cioè un suo sottoinsieme limitato superiormente non ha necessariamente un sup (però è facile verificare, usando il teorema di Łos, che ogni sottoinsieme definibile e limitato superiormente ha un sup). $\mathbb{R}^*$ contiene un sottocampo isomorfo ad $\mathbb{R}$, costituito dagli elementi della forma $\delta(a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^*$ non è **archimedeo**, ovvero contiene degli elementi α tali che per ogni intero positivo n, $0 < \alpha < \frac{1}{n}$, dove abbiamo scritto per semplicità $\frac{1}{n}$ anzichè $\delta(\frac{1}{n})$. Tali elementi vengono detti **infinitesimi** e non possono ovviamente essere nella immagine di δ. Un tipico elemento infinitesimo α è $\langle \frac{1}{i} : i \in \mathbb{N}\rangle/U$. Per ogni fissato n, l'insieme degli indici $i \in \mathbb{N}$ tali che $\frac{1}{i} < \frac{1}{n}$ è co-finito (contiene tutti gli i tranne un numero finito), e quindi appartiene all'ultrafiltro U (se U non è principale). Segue dal teorema di Łos che $\alpha < \frac{1}{n}$ e Poiché n è arbitrario abbiamo che α è infinitesimo (è maggiore di zero perché lo è su tutti gli indici).

La costruzione di $\mathbb{R}^*$ è la base della analisi non-standard di Abraham Robinson. Lavorando in $\mathbb{R}^*$, $\frac{dy}{dx}$ puó essere interpretato come rapporto di due infinitesimi - come lo pensavano Leibniz e Newton - senza per questo perdere di rigore. Questo uso rigoroso degli infinitesimi può essere poi usato per dimostrare risultati su $\mathbb{R}$ via il teorema di Łos che ci permette di trasferire risultati da $\mathbb{R}^*$ ad $\mathbb{R}$. Per arricchire la classe di proprietà a cui poter applicare il *transfer* (trasferimento da $\mathbb{R}^*$ a $\mathbb{R}$) è conveniente fare un ultraprodotto non solo di $\mathbb{R}$ con la sua struttura di campo, ma di una intera **soprastruttura** che comprende sia $\mathbb{R}$, l'insieme delle parti di $\mathbb{R}$, l'insieme delle parti dell'insieme delle parti di $\mathbb{R}$ ecc. (si veda ad esempio l'articolo sull'handbook of mathematical logic, o la monografia di A.Robinson edita da Boringhieri).

La possibilità di impiego della analisi non standard sta non tanto nel fatto di aver costruito un campo reale non archimedeo che estende $\mathbb{R}$ (tali campi si possono costruire facilmente senza ricorrere agli ultraprodotti, basta ad esempio ordinare il campo delle frazioni $\mathbb{R}(x)$ in modo che la x risulti infinitesima), quanto nella possibilità di applicare il principio del trasferimento, che è garantito dal teorema di Łos.

Esercizio 4.19. Si mostri che l'insieme degli infinitesimi è limitato superiormente e non ha un sup e se ne deduca che l'insieme degli infinitesimi è un sottoinsieme non definibile di $\mathbb{R}^*$.

4.7 Spazi topologici compatti

Sia X uno spazio topologico e sia F un filtro di sottoinsiemi di X. Diciamo che F **converge** ad $x \in X$, e scriviamo $F \to x$, se per ogni intorno aperto $\mathcal{O}_x$ di x, esiste $B \in F$ con $B \subseteq \mathcal{O}_x$.

Esempio 4.20. Abbiamo:

1. Il filtro di tutti gli intorni di x converge a x.
2. L'ultrafiltro di tutti gli insiemi che contengono x converge ad x.
3. In $\mathbb{R}$ il filtro di tutte le semirette sinistre $(a, +\infty)$, $a \in \mathbb{R}$, non converge a nessun punto di $\mathbb{R}$ (in un certo senso converge a $+\infty$).

Theorem 4.21. *Sono equivalenti:*

1. *X è compatto (ogni ricoprimento di aperti ha un sottoricoprimento finito).*
2. *Ogni collezione di insiemi chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*
3. *Ogni ultrafiltro converge.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (2) si ottiene immediatamente considerando i complementi. Assumiamo (2) e sia U un ultrafiltro. In particolare U ha la proprietà dell'intersezione finita, e quindi esiste $x \in \bigcap_{B \in U} \overline{B}$. Ogni intorno aperto $\mathcal{O}_x$ di x ha intersezione non vuota con ogni $B \in U$, e quindi $U \cup \{\mathcal{O}_x\}$ ha la proprietà dell'interezione finita. Poiché U è un filtro massimale, ne segue $\mathcal{O}_x \in U$, e quindi U converge ad x.

Ora assumiamo (3) e sia F una collezione di insiemi chiusi con la proprietà dell'intersezione finita. Estendiamo F ad un ultrafiltro U (di insiemi non necessariamente chiusi) e sia x tale che $U \to x$. Ne segue che $x \in \bigcap_{B \in F} B$ e otteniamo così la (2). $\square$

5 Algebre di Boole: teorema di rappresentazione di Stone

Definizione 5.1. Un'**algebra di Boole** è una struttura $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$, dove $\vee, \wedge$ sono operazioni binarie su B, $\neg$ è un'operazione unaria, e $0, 1$ sono due costanti in B, che verifica i seguenti assiomi:

1. (leggi commutative) $x \wedge y = y \wedge x$; $\quad x \vee y = y \vee x$;
2. (leggi associative) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$; $\quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
3. (leggi distributive) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$; $\quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;
4. $x \wedge \neg x = 0$; $\quad x \vee \neg x = 1$;
5. $\neg\neg x = x$; $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$; $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$;
6. $x \wedge 0 = 0$; $x \vee 0 = x$; $x \wedge 1 = x$; $x \vee 1 = 1$;
7. $0 \neq 1$; $\neg 0 = 1$; $\neg 1 = 0$.

Esempio 5.2. Il primo esempio di algebra di Boole è l'**insieme delle parti** $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X con i simboli di $L = \{\vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$ interpretati come intersezione, unione, complemento, insieme vuoto, insieme totale X.

Dimostreremo in seguito che ogni algebra di Boole è isomorfa ad una sottoalgebra di un'algebra di insiemi $\mathcal{P}(X)$.

Esempio 5.3. Un'altro esempio di algebra di Boole è dato dalle classi di equivalenza $[\varphi]$ delle formule di una data teoria T modulo modulo equivalenza in T, con i simboli di $L = \{\vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$ interpretati rispettivamente come congiunzione (cioè $[\varphi_1] \wedge [\varphi_2] = [\varphi_1 \wedge \varphi_2]$), disgiunzione, negazione, falso, vero (cioè $[\varphi] = 0$ se $T \models \neg\varphi$, e $[\varphi] = 1$ se $T \models \varphi$). Tale algebra si chiama **algebra di Lindenbaum** di T.

Esempio 5.4. Un **anello Booleano** è un anello che verifica $x^2 = x$ per ogni x. Ogni anello booleano è di caratteristica 2 e dato un anello booleano possiamo ottenere un'algebra di Boole definendo $x \wedge y = x \cdot y$ e $x \vee y = x + y + x \cdot y$. Viceversa da un'algebra di Boole possiamo ottenere un anello booleano definendo $x \cdot y = x \wedge y$ e $x + y = (x \cap \neg y) \cup (\neg x \cap y)$ (si veda [3]).

Data un'algebra di Boole definiamo un **ordine parziale** ponendo $x \leq y$ se $x \wedge y = x$. Ciò equivale anche a $x \wedge \neg y = 0$ (esercizio). Si ottiene in tal modo un ordine parziale in cui $x \wedge y$ è l'estremo inferiore e $x \vee y$ è l'estremo superiore di due elementi. Nell'algebra di Lindenbaum di T, $[\varphi_1] \leq [\varphi_2]$ se e solo se $T \models \varphi_1 \to \varphi_2$.

Theorem 5.5. *(Teorema di rappresentazione di Stone) Ogni algebra di Boole $(B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ è isomorfa all'algebra dei clopen di un'opportuno spazio topologico compatto X, e in particolare è isomorfa ad una sottoalgebra dell'algebra delle parti di X.*

Dimostrazione. Possiamo definire il concetto di filtro e di ultrafiltro di un'algebra di Boole generalizzando la definizione che abbiamo dato nel caso dei filtri e degli ultrafiltri nelle parti di un insieme. Un **filtro** p è un sottoisieme $p \subseteq B$ che è chiuso per $\wedge$, contiene 1 ma non 0, e se contiene x contiene tutti gli $y \geq x$. Un **ultrafiltro** è un filtro tale che per ogni $x \in B$ si ha $x \in p$ o $\neg x \in p$. Dato

$b \in B$ sia $[b]$ l'insieme degli ultrafiltri p tali che $b \in p$. Consideriamo sull'insieme X degli ultrafiltri di B la topologia i cui aperti base sono gli insiemi della forma $[b]$. Tali insiemi sono anche chiusi in quanto il complemento di $[b]$ è $[\neg b]$, quindi X ha una base di clopen. La funzione che manda $b \in B$ in $[b]$ è un morfismo da B all'algebra dei clopen di X. Per finire dobbiamo mostrare che tale morfismo è biunivoco. Per l'iniettività consideriamo $b_1 \neq b_2$ in B con l'obiettivo di dimostrare $[b_1] \neq [b_2]$. Per simmetria possiamo assumere $b_1 \not\leq b_2$ e dunque $b_1 \wedge \neg b_2 \neq 0$. Consideriamo il filtro degli elementi $\geq b_1 \wedge \neg b_2$ e un ultrafiltro p che lo estende. Tale p appartiene a $[b_1]$ ma non a $[b_2]$ e l'iniettività è dimostrata. La surgettività è lasciata per esercizio (fatelo!), ma si osservi che l'iniettività già basta per mostrare che B è isomorfa ad un'algebra di insiemi. □

Corollario 5.6. *Ogni formula universale di $L = \{\vee, \wedge, \neg, 0, 1\}$ che vale nell'algebra delle parti di insieme X (qualunque sia X), vale in tutte le algebre di Boole (ricordiamo che una formula universale è una formula che inizia con dei $\forall$ ed è seguita da una formula senza quantificatori).*

Ne seque ad esempio che l'identità $x \vee x = x$ vale in qualsiasi algebra di Boole, visto che vale nelle algebre di insiemi, con $\vee$ interpretato come unione. Il lettore può cercare di dimostrarlo a partire direttamente dagli assiomi.

6 Teoremi di Löweinheim-Skolem

6.1 Löweinheim-Skolem verso il basso

Lemma 6.1. *(Criterio di Tarski - Vaught) Consideriamo una L-struttura $\mathcal{B}$ e un sottoinsieme $A \subseteq dom(\mathcal{B})$. Supponiamo che per ogni L-formula della forma $\exists y \phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ e parametri $a_1, \ldots, a_n \in A$, si abbia che se $\mathcal{B} \models \exists y \phi(y, a_1, \ldots, a_n)$, allora esiste $a \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(a, a_1, \ldots, a_n)$. Ne segue che A è il dominio di una sottostruttura elementare $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che A è il dominio di una sottostruttura $\mathcal{A}$ di $\mathcal{B}$, ovvero contiene l'interpretazione delle costanti c di L ed è chiuso rispetto all'interpretazione dei simboli di funzione f di L, ovvero se $a_1, \ldots, a_n \in A$ allora $f(a_1, \ldots, a_n) \in A$ (supponendo f di arietà n). Per le costanti basta osservare che $\mathcal{B} \models \exists y(y = c)$ e per ipotesi il testimone dell'esistenziale può essere scelto in A. Per le funzioni osserviamo che $\mathcal{B} \models \exists y(y = f(a_1, \ldots, a_n)$, e per ipotesi il quantificatore $\exists y$ ha un testimone in A.

Per mostrare $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ basta verificare, per induzione sul numero dei connettivi della formula $\theta(x_1, \ldots, x_k)$, che per ogni $a_1, \ldots, a_k \in A$, si ha $\mathcal{B} \models \theta(a_1, \ldots, a_k)$ se e solo se $\mathcal{A} \models \theta(a_1, \ldots, a_k)$.

Se θ è atomica, allora l'equivalenza da dimostrare segue dal fatto che $\mathcal{A}$ è una sottostruttura di $\mathcal{B}$.

Se l'equivalenza da dimostrare vale per una classe di formule, essa vale anche per tutte le formule che si ottengono da esse usando i connettivi booleani.

L'unico caso interessante è quello di formule della forma $\exists y \phi(y, x_1, \ldots, x_n)$ per le quali ragioniamo come segue. Supponiamo che $\mathcal{B} \models \exists y \phi(y, \bar{a})$. Allora per le ipotesi esiste $c \in A$ tale che $\mathcal{B} \models \phi(c, \bar{a})$. Per ipotesi induttiva $\mathcal{A} \models \phi(c, \bar{a})$. Dunque $\mathcal{A} \models \exists y \phi(y, \bar{a})$. L'implicazione inversa è facile. □

Theorem 6.2. *(Teorema di Löweinheim-Skolem verso il basso) Sia M una L-struttura di cardinalità κ, sia A un sottoinsieme del dominio di M e sia λ un cardinale tale che $|L| + |A| \leq \lambda \leq \kappa$. Allora esiste una sottostruttura elementare $N \prec M$ di cardinalità λ il cui dominio include A.*

Dimostrazione. Sostituendo A con un insieme più grande se necessario possiamo assumere $|A| = \lambda$. La cardinalità dell'insieme delle L_A formule è λ. Per ogni L_A formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$ scegliamo un $b_\phi \in M$ tale che $M \models \phi(b_\phi)$ e sia A_1 l'unione di A e dell'insieme dei b_ϕ al variare di $\phi = \phi(x)$ tra la L_A formule nella variabile x. Costruiamo una successione di insiemi $A \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ dove ogni A_{i+1} è ottenuto da A_i nello stesso modo in cui A_1 è stato definito a partire da A. Sia $B = \bigcup_{i \in \omega} A_i$ la loro unione. Allora B è un sottoinsieme di M di cardinalità λ e per ogni L_B-formula $\phi(x)$ tale che $M \models \exists x \phi(x)$ esiste $b \in B$ tale che $M \models \phi(b)$ (in quanto i parametri di $\phi(x)$, essendo in numero finito, appartengono a qualche A_i e b può essere scelto in A_{i+1}). Per il Lemma 6.1 B è il dominio di una sottostruttura elementare di M. □

6.2 Löweinheim-Skolem verso l'alto: forma debole

Theorem 6.3. *Sia T una L-teoria.*

1. *Supponiamo che per ogni intero positivo n esista un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n. Allora T ha un modello infinito.*
2. *Supponiamo che T abbia un modello infinito. Allora per ogni cardinale $\kappa \geq |L| + \aleph_0$, T ha un modello di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Assumiamo che per ogni intero positivo n esista un modello M_n di T di cardinalità maggiore di n. (Questa ipotesi è verificata in particolare se T ha un modello infinito.) Sia $\kappa \geq |L| + \aleph_0$. Mostriamo che T ha un modello di cardinalità κ (ciò dimostra sia il primo che il secondo punto). Sia L' il linguaggio ottenuto da L con l'aggiunta di un insieme C di cardinalità κ di nuovi simboli di costante. Sia T' la L'-teoria i cui assiomi sono quelli di T più tutti gli assiomi della forma $c \neq c'$, dove c, c' sono costanti distinte di C. Dimostriamo innanzitutto che ogni sottoteoria finita S di T' ha un modello. A tal fine osserviamo che S può menzionare solo un insieme finito - diciamo n - delle costanti di C. Scegliamo un modello $\mathcal{A}$ di T di cardinalità $\geq n$. Sia A' la L'-struttura che espande $\mathcal{A}$ interpretando le n costanti di C menzionate in S con n elementi distinti di $\mathcal{A}$. Tale A' è un modello di S. Per il teorema di compattezza possiamo concludere che T' ha un modello $\mathcal{B}$, che per il Teorema 6.2 può essere scelto di cardinalità $\leq \kappa$, ma che d'altra parte deve essere di cardinalità $\geq \kappa$ in quanto dovendo verificare tutti i nuovi assiomi $c \neq c'$ deve interpretare le costanti di C con elementi distinti del dominio. La restrizione di $\mathcal{B}$ al linguaggio originale L è una L-struttura di cardinalità κ modello di T. □

6.3 Löweinheim - Skolem verso l'alto: forma forte

Theorem 6.4. *(Löweinheim - Skolem verso l'alto) Sia M una L-struttura infinita. Sia κ un cardinale $\geq |L_M| = |M| + |L| + \aleph_0$. Allora M ha una estensione elementare di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Per il Teorema 6.2 $ED(M)$ ha un modello N di cardinalità κ. Per il Lemma 2.24 M si immerge elementarmente in $N_{|L}$. Rimpiazzando N con una copia isomorfa possiamo assumere $M \prec N_{|L}$. □

6.4 Completezza delle teorie κ-categoriche

Definizione 6.5. Sia κ un numero cardinale. Una L-teoria T è κ-categorica se T ha un modello di cardinalità κ e tutti i modelli di T di cardinalità κ sono isomorfi.

Theorem 6.6. *Sia T una L-teoria senza modelli finiti. Se $\kappa \geq |L| + \aleph_0$ e T è κ-categorica allora T è completa.*

Dimostrazione. Siano M, N modelli di T e siano T_1, T_2 le teorie complete di M, N rispettivamente. Tali teorie sono estensioni complete di T. Per il teorema 6.3 (usando il fatto che M, N sono infiniti) T_1 ha un modello M_1 di cardinalità κ e T_2 ha un modello M_2 di cardinalità κ. In particolare M_1, M_2 sono modelli di T di cardinalità κ quindi sono isomorfi per le ipotesi. Ne segue che $M_1 \equiv M_2$ e quindi anche $M \equiv N$. Avendo dimostrato che tutti i modelli di T sono elementarmente equivalenti, ne concludiamo che T è completa. □

7 Isomorfismi parziali

Gli isomorfismi parziali sono uno strumento fondamentale della teoria dei modelli. Possono essere usati per dimostrare teoremi di eliminazione dei quantificatori, la ω-categoricità, o la completezza di alcune teorie. Esemplificheremo la tecnica dimostrando l'eliminazione dei quantificatori, la ω-categoricità e la completezza della teoria degli ordini densi senza estremi. Simili risultati valgono per la teoria del grafo random.

7.1 Teorema di isomorfismo di Scott

Definizione 7.1. Siano M ed N due L-strutture e siano $A \subseteq dom(M)$ e $B \subseteq dom(N)$ sottoinsiemi. Diciamo che una funzione $f : A \to B$ è un **isomorfismo parziale** da M ad N se per ogni formula atomica (o equivalentemente per ogni formula senza quantificatori) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in A$ vale $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $N \models \varphi(fa_1, \ldots, fa_n)$. Si noti in particolare che f deve essere iniettiva (si prenda come φ la formula $x_1 = x_2$).

Scriveremo

$$M, a_1, \ldots, a_n \equiv_0 N, b_0, \ldots, b_n$$

se esiste un isomorfismo parziale che porta a_i in b_i per ciascun $i \leq n$.

Osservazione 7.2. Si noti che la funzione vuota $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ potrebbe non essere un isomorfismo parziale da M ad N secondo le nostre definizioni. Per esserlo occorre che M ed N verifichino le stesse formule atomiche chiuse. Ad esempio se M e N sono campi di caratteristica 2 e 3 rispettivamente, la formula atomica chiusa $1+1=0$ è vera in M ma non in N e pertanto la funzione vuota non è un isomorfismo parziale. Naturalmente se il linguaggio non ha simboli di costante, allora non vi sono formule atomiche chiuse e la funzione vuota è sempre un isomorfismo parziale.

Osservazione 7.3. Una funzione $f : dom(f) \to Im(f)$ con dominio non vuoto è un isomorfismo parziale da M ad N se e solo se la sottostruttura di M generata da $dom(f)$ (che consiste degli elementi della forma $t(\bar{a})^M$ dove $t(\bar{x})$ è un termine e $\bar{a} \subseteq dom(f)$), è isomorfa alla sottostruttura di N generata da $Im(f)$, tramite un isomorfismo che estende f.

Definizione 7.4. Se l'equivalenza $M \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $N \models \varphi(fa_1, \ldots, fa_n)$ vale per tutte le formule di L (non solo quelle senza quantificatori) e per ogni scelta dei parametri $\bar{a}$ da $A \subseteq dom(M)$, diciamo che $f : A \to B \subseteq dom(N)$ è una **mappa elementare**. Se A coincide con il dominio di M ritroviamo il concetto precedentemente visto di immersione elementare di M in N. Scriviamo

$$M, a_1, \ldots, a_n \equiv N, b_0, \ldots, b_n$$

se esiste una mappa elementare che porta a_i in b_i per ciascun $i \leq n$. Questo equivale a dire che le strutture $(M, a)_{a \in A}$ e $(N, f(a))_{a \in A}$ sono elementarmente equivalenti, in un linguaggio espanso con nuove costanti da interpretare rispettivamente con gli elementi di A e con le loro immagini tramite f.

Proposizione 7.5. *Siano M ed N due L-strutture. Dati due sottoinsiemi* non *vuoti $A \subseteq dom(M)$ e $B \subseteq dom(N)$, una funzione biunivoca $f : A \to B$ è un isomorfismo parziale da M ad N se e solo se si può estendere ad un isomorfismo $f : \langle A \rangle_M \to \langle B \rangle_N$ tra la sottostruttura di M generata da A la sottostruttura di N generata da $B := f(A)$.*

Dimostrazione. Si osservi che il dominio di $\langle A \rangle_M$ coincide con l'insieme delle interpretazioni in M dei termini con parametri da A e similmente per $\langle B \rangle_N$. Per estendere f ad un isomorfismo $f : \langle A \rangle_M \to \langle B \rangle_N$ basta mandare $t(\bar{a})^M$ in $t(\bar{b})^N$, dove $t(\bar{x})$ è un termine. Tale mappa è ben posta in quanto da $t_1(\bar{a})^M = t_2(\bar{a})^M$ ed $M, \bar{a} \equiv_0 N, \bar{b}$ si ottiene $t_1(\bar{b})^N = t_2(\bar{b})^N$. La verifica che sia un isomorfismo è lasciata al lettore. $\square$

Definizione 7.6. Data una famiglia I di isomorfismi parziali da M ad N scriveremo $M, a_1, \ldots, a_n \equiv^I N, b_1, \ldots, b_n$ se esiste $f \in I$ con $f(a_i) = b_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Diciamo che I verifica la **proprietà del va e vieni**, se valgono le seguenti condizioni:

1. per ogni $f \in I$ e per ogni $a \in M$ esiste $g \in I$ che estende f e contiene a nel suo dominio;

2. per ogni $f \in I$ e per ogni $b \in N$ esiste $g \in I$ che estende f e contiene b nella sua immagine.

Detto in altre parole, I verifica la proprietà del va e vieni se, assumendo $M, a_1, \ldots, a_n \equiv^I N, b_1, \ldots, b_n$ e dato $c \in M$, esiste $d \in N$ tale che $M, a_1, \ldots, a_n, c \equiv^I N, b_1, \ldots, b_n, d$, e viceversa dato $d \in N$ esiste $c \in M$ che verifica la detta formula.

Diciamo che M è **parzialmente isomorfa** ad N, $M \cong_p N$, se esiste una famiglia non vuota di isomorfismi parziali finiti I da M ad N con la proprietà del va e e vieni.

Esempio 7.7. $(\mathbb{R}, <) \cong_p (\mathbb{Q}, <)$, prendendo come I la famiglia di *tutti* gli isomorfismi parziali finiti (ovvero con dominio finito).

Theorem 7.8 (Teorema dell'isomorfismo di Scott)**.** *Se $M \cong_p N$ ed M e N sono numerabili, allora $M \cong N$.*

Dimostrazione. Sia I una famiglia di isomorfismi parziali finiti da M ad N con la proprietà del va e vieni. Enumeriamo M ed N ponendo $M = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $N = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Costruiamo un isomorfismo $f : M \to N$ come unione $\bigcup_n f_n$ di isomorfismi parziali finiti $f_n \in I$. Sia f_0 un qualsiasi elemento di I. Induttivamente per definire $f_{n+1} \supseteq f_n$ distinguiamo due casi a seconda che n sia pari o dispari. Se n è pari consideriamo il minimo $i \in \mathbb{N}$ tale che $a_i \notin dom(f_n)$ e scegliamo $f_{n+1} \in I$ in modo che $f_{n+1} \supseteq f_n$ e $a_i \in dom(f_{n+1})$. Se n è dispari consideriamo il minimo $i \in \mathbb{N}$ tale che $b_i \notin Im(f_n)$ e scegliamo $f_{n+1} \in I$ in modo che $f_{n+1} \supseteq f_n$ e $b_i \in Im(f_{n+1})$. Lasciamo al lettore la verifica che $\bigcup_n f_n$ è un isomorfismo da M ad N. □

Definizione 7.9. Una teoria T si dice $\aleph_0$-categorica, se possiede un unico modello numerabile a meno di isomorfismi.

La teoria degli ordini densi senza estremi è $\aleph_0$-categorica:

Corollario 7.10 (Teorema di Cantor sugli ordini densi)**.** *Se M ed N sono due ordini densi numerabili e senza estremi allora $M \cong N$.*

Dimostrazione. Basta applicare il teorema di isomorfismo di Scott osservando che la famiglia di *tutti* gli isomorfismi parziali finiti da M ad N gode della proprietà del va e vieni. □

Abbiamo fatto discendere il teorema di Cantor dal teorema di Scott, ma quest'ultimo è posteriore e nasce come generalizzazione del teorema di Cantor.

Esempio 7.11. I razionali il cui denominatore è una potenza di 2 sono isomorfi, come ordine, a tutti i razionali.

7.2 Teorema di separazione ed eliminazione dei quantificatori

Nel seguito diamo dei criteri per avere EQ.

Definizione 7.12. Sia T una L-teoria e sia $(\varphi_i : i \in I)$ una famiglia possibilmente infinita di L-enunciati. Scriviamo $T \models \bigvee_{i\in I} \varphi_i$ se $Mod(T) \subseteq \bigcup_{i\in I} Mod(\varphi_i)$ e $T \models \bigwedge_{i\in I} \varphi_i$ se $Mod(T) \subseteq \bigcap_{i\in I} Mod(\varphi_i)$.

Lemma 7.13. *Sia Γ un insieme possibilmente infinito di L-enunciati e sia T una L-teoria tale che $T \models \bigvee_{\gamma\in\Gamma} \gamma$ (cioè ogni modello di T rende vera qualche formula di Γ). Allora esiste un sottoinsieme finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ di Γ tale che $T \models \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per ogni sottoinsieme finito $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ di Γ esista un modello $\mathcal{A} \models T$ tale che $\mathcal{A} \models \neg\gamma_1 \wedge \dots \wedge \neg\gamma_n$. Allora per compattezza la teoria $T \cup \{\neg\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ ha un modello $\mathcal{B}$. Ma allora $\mathcal{B} \in Mod(T)$ e $\mathcal{B} \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} Mod(\gamma)$, contraddicendo le ipotesi. $\square$

Theorem 7.14. *(Teorema di separazione) Sia Γ un insieme di L-enunciati chiuso per $\wedge, \vee$. Supponiamo che T_1 e T_2 siano due L-teorie tali che per ogni $\mathcal{A} \in Mod(T_1), \mathcal{B} \in Mod(T_2)$ esista $\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \in \Gamma$ con $\mathcal{A} \models \gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B} \models \neg\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Allora esiste $\gamma^* \in \Gamma$ tale che $T_1 \models \gamma^*$ e $T_2 \models \neg\gamma^*$.*

Dimostrazione. Fissiamo $\mathcal{A} \models T_1$ e per ogni $\mathcal{B} \models T_2$ scegliamo $\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \in \Gamma$ con $\mathcal{A} \models \gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B} \models \neg\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. Facendo variare $\mathcal{B}$ in $Mod(T_2)$ otteniamo $Mod(T_2) \subseteq \bigcup_{\mathcal{B}} Mod(\neg\gamma_{\mathcal{A},\mathcal{B}})$. Quindi per compattezza esistono un numero finito di formule γ_{A,B_i} per le quali si ha $Mod(T_2) \subseteq Mod(\neg\gamma_{A,B_1}) \cup \dots \cup Mod(\neg\gamma_{A,B_n})$. Sia $\gamma_A = \gamma_{A,B_1} \wedge \dots \wedge \gamma_{A,B_n}$. Si ha $\mathcal{A} \in Mod(\gamma_A)$ e $Mod(T_2) \subseteq Mod(\neg\gamma_A)$. Ora facendo variare $\mathcal{A}$ in $Mod(T_1)$ otteniamo $Mod(T_1) \subseteq \bigcup_{\mathcal{A}} Mod(\gamma_{\mathcal{A}})$. Di nuovo per compattezza esiste una disgiunzione finita γ^* delle formule $\gamma_{\mathcal{A}}$ tali che $T_1 \models \gamma^*$, e ovviamente $T_2 \models \neg\gamma^*$. $\square$

Definizione 7.15. Scriviamo $\mathcal{A} \equiv_\Gamma \mathcal{B}$ se per ogni enunciato $\gamma \in \Gamma$ abbiamo $\mathcal{A} \models \gamma$ se e solo se $\mathcal{B} \models \gamma$. Se Γ consiste di un singolo enunciato γ scriviamo $\equiv_\gamma$.

Osservazione 7.16. Se Γ è l'insieme di tutti gli L-enunciati otteniamo la nozione di equivalenza elementare $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Theorem 7.17. *Sia Γ un insieme di L-enunciati chiusi per $\wedge, \vee$, e sia ϕ un L-enunciato. Supponiamo che tra i modelli della una L-teoria T la relazione $\equiv_\Gamma$ implichi $\equiv_\phi$. Allora ϕ è dimostrabilmente equivalente in T ad un enunciato di Γ.*

Dimostrazione. Consideriamo le due L-teorie T, ϕ e $T, \neg\phi$. Se $\mathcal{A} \models T \cup \{\phi\}$ e $\mathcal{B} \models T \cup \{\neg\phi\}$ allora per le ipotesi del teorema $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono separati da una formula di Γ, ovvero esiste una formula di Γ vera in una delle due strutture e falsa nell'altra. Per il teorema di separazione otteniamo $\gamma^* \in \Gamma$ con $Mod(T, \phi) \subseteq Mod(\gamma^*)$ e $Mod(T, \neg\phi) \subseteq Mod(\neg\gamma^*)$. Ne segue che $T \vdash \phi \leftrightarrow \gamma^*$. $\square$

Possiamo generalizzare il risultato precedente a formule con variabili libere considerando non il linguaggio L ma il linguaggio $L \cup \{x_1, \dots, x_n\}$ espanso con nuove costanti x_i (poi vedremo come sostituirle con delle variabili).

Sia $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ un insieme di enunciati in questo linguaggio espanso e consideriamo due strutture nel linguaggio $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ che siano in realazione $\equiv_\Gamma$. Questo equivale a dire che abbiamo due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e due n-uple $a_1, \ldots, a_n$ da A e $b_1, \ldots, b_n$ da B (che interpretano le x_i), tali che $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_\Gamma \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$, cioè per ogni $\gamma(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ si ha $\mathcal{A} \models \gamma(a_1, \ldots, a_n)$ sse $\mathcal{B} \models \gamma(b_1, \ldots, b_n)$. Per il risultato precedente applicato a questo linguaggio espanso abbiamo:

Theorem 7.18. *Sia T una L-teoria, sia $\Gamma = \Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ un insieme non vuoto di $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$-enunciati chiusi per $\wedge, \vee$, e sia $\phi = \phi(x_1, \ldots, x_n)$ un $L \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$-enunciato. Supponiamo che per ogni coppia $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di modelli di T e per ogni scelta di n-uple da questi modelli, $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_\Gamma \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ implichi $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_\phi \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$. Allora esiste $\gamma(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ tale che $T \models \forall \bar{y}\, (\phi(\bar{y}) \leftrightarrow \gamma(\bar{y}))$.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente $T \models \phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \gamma(x_1, \ldots, x_n)$. Ora Poiché le costanti x_i non compaiono tra gli assiomi di T le possiamo sostituire con variabili e quantificarle universalmente. □

Corollario 7.19. *Se tutti gli isomorfismi parziali finiti tra modelli di T sono elementari, allora T elimina i quantificatori, ovvero ogni formula equivale in T ad una formula senza quantificatori.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 7.18 prendendo come Γ l'insieme di tutte le formule senza quantificatori. □

Proposizione 7.20. *Se I è una famiglia di isomorfismi parziali da M ad N con la proprietà del va e vieni, allora ogni $f \in I$ è una mappa elementare, ovvero preserva non solo le formule atomiche, ma tutte le formule.*

Dimostrazione. Mostriamo che f preserva $\theta(\bar{x})$ per induzione sulla complessità di $\theta(\bar{x})$. L'unico caso non banale è quello di una formula $\theta(\overline{x})$ della forma $\exists y \varphi(x, \overline{y})$. Supponiamo che $M \models \exists x \varphi(x, \overline{a})$ con $\overline{a} \subset dom(f)$. Dobbiamo mostrare che $N \models \exists x \varphi(x, f\overline{a})$. Sia $c \in M$ tale che $M \models \varphi(c, \overline{a})$. Per la proprietà del va e vieni f ha un'estensione $g \in I$ con $c \in dom(g)$ e sia $d = gc$. Per ipotesi induttiva $N \models \varphi(d, f\overline{a})$ e quindi $N \models \exists x \varphi(x, f(\bar{a}))$. Il viceversa è analogo. □

Theorem 7.21. *Sia T una L-teoria e supponiamo che l'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti tra modelli di T abbia la proprietà del va e vieni. Allora T ammette EQ.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 7.20 e il Corollario 7.19. □

Corollario 7.22. *Se $M \cong_p N$ (ovvero esiste una famiglia non vuota di isomorfismi parziali tra M ed N con la proprietà del va e vieni), allora $M \equiv N$. Se ciò accade per ogni coppia di modelli di una teoria T, allora T è completa.*

Dimostrazione. Consideriamo un isomorfismo parziale f tra M ed N appartenenente ad una famiglia con la proprietà del va e vieni. Tale f è una mappa elementare per la Proposizione 7.20 e deve quindi in particolare preservare la veritàdelle L-formule chiuse. Dunque $M \equiv N$ e ciò basta a concludere. □

Theorem 7.23. *La teoria degli ordini densi senza estremi ammette EQ ed è completa.*

Dimostrazione. L'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti tra due ordini densi senza estremi è non vuoto e gode della proprietà del va e vieni. Possiamo quindi applicare 7.21 e 7.22. □

7.3 Teoria dei grafi random

Definizione 7.24 (Grafo random)**.** *Consideriamo un grafo aleatorio con insieme dei vertici $\mathbb{N}$ e un insieme $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ di lati generati dal seguente processo probabilistico. Dati due vertici distinti $a, b \in \mathbb{N}$ tiriamo una moneta. Se esce testa poniamo (a, b) in E, se esce croce stabiliamo che $(a, b) \notin E$ (supponiamo che il grafo sia simmetrico: se $(a, b) \in E$ anche $(b, a) \in E$). Supponendo che la moneta sia onesta (probabilità $1/2$) e che gli esisti dei lanci siano tra loro indipendenti, semplici considerazioni probabilistiche mostrano che il grafo così ottenuto, con probabilità 1, verifica i seguenti assiomi, formulati nel linguaggio con un simbolo di relazione binaria E.*

1. $E(x, y) \to E(y, x)$
2. $\neg E(x, x)$
3. Per ogni coppia di insiemi finiti di vertici $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, con A disgiunto da B, esiste un vertice c connesso a tutti i vertici di A (ovvero $\bigwedge_{i\leq m} E(c, a_i)$), e sconnesso da tutti quelli di B (cioè $\bigwedge_{i\leq n} \neg E(b_i, c)$.

Il terzo gruppo di assiomi è formulabile con uno schema di assiomi del primo ordine. Più precisamente, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ abbiamo un assioma $\Psi_{m,n}$ che esprime la proprietà (3) per tutte le possibili scelte di A, B di cardinalità m, n rispettivamente. Chiamiamo **grafo random** un qualunque modello di questi assiomi e **teoria dei grafi random** la teoria nel linguaggio $L = \{E\}$ che ha questo insieme di assiomi.

Il seguente risultato mostra che esiste un unico grafo random numerabile a meno di isomorfismi.

Theorem 7.25. *Abbiamo:*

1. *Due qualsiasi modelli M ed N della teoria dei grafi random sono parzialmente isomorfi.*
2. *La teoria dei grafi random è $\aleph_0$-categorica: esiste un unico grafo random numerabile a meno di isomorfismi.*
3. *La teoria dei grafi random è completa*

Dimostrazione. Basta mostrare che la famiglia di tutti gli isomorfismi parziali finiti tra modelli M ed N della teoria dei grafi random gode della proprietà del va e vieni (ed è ovviamente non vuota in quanto basta mandare un dato vertice di M in un qualsiasi vertice di N). Dato un isomorfismo parziale finito $f : S \to S'$ con $S \subseteq dom(M)$ e $S' \subseteq dom(N)$ ed un nuovo elemento $c \in dom(M)$, partizioniamo S nel sottoinsieme A degli elementi connessi a c e il sottoinsieme B di quelli sconnessi da c. La f induce una partizione di S' nei due insiemi $A' := f(A)$ e $B' := f(B)$. Per le proprietà dei grafi random esiste $c' \in dom(N)$ connesso a tutti i vertici di A' e sconnesso da quelli di B' e possiamo estendere f mandando c in c'. □

8 Tipi e modelli saturi

8.1 Tipi

Definizione 8.1. Data una L-struttura M ed una n-upla di elementi $\overline{a}$ in M, il tipo di $\overline{a}$ in M, $tp_M(\overline{a})$, è l'insieme $p(\overline{x})$ delle L-formule $\varphi(\overline{x})$ tali che $M \models \varphi(\overline{a})$.

Esempio 8.2. Consideriamo i seguenti esempi:

1. Il tipo di $\sqrt{2}$ nel campo $\mathbb{C}$ dei complessi, considerato come struttura nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot\}$, include la formula $x^2 = 2$ (con le ovvie definizioni $x^2 = x \cdot x$ e $2 = 1 + 1$) e tutte le sue conseguenze. Tale tipo coincide con il tipo di $-\sqrt{2}$ in $\mathbb{C}$ in quanto esiste un automorfismo di $\mathbb{C}$ che porta $\sqrt{2}$ in $-\sqrt{2}$.

2. Il tipo di π in $\mathbb{C}$ include tutte le formule della forma $p(x) \neq 0$ dove $p(x)$ è un polinomio non nullo a coefficienti in $\mathbb{Z}$. Esso coincide con il tipo di qualsiasi altro elemento trascendente in quanto, dati due elementi trascendenti, esiste un automorfismo di $\mathbb{C}$ che manda l'uno nell'altro. Si noti che mentre il tipo di $\sqrt{2}$ èdeterminato da una singola formula ($x^2 = 2$) ciò non avviene per il tipo di un elemento trascendente.

3. Il tipo di $\sqrt{2}$ nel campo ordinato $\mathbb{R}$ è diverso dal tipo di $-\sqrt{2}$, in quanto ad esempio $tp_{\mathbb{R}}(\sqrt{2})$ comprende la formula $x > 0$ mentre $tp_{\mathbb{R}}(-\sqrt{2})$ comprende la formula $x < 0$.

4. In $(\mathbb{Q}, +, <)$ vi sono solo tre tipi di elementi: positivi, negativi, zero. Ad esempio 2 e 3 hanno lo stesso tipo in quanto $x \mapsto \frac{3}{2}x$ èun automorfismo della struttura che porta 2 in 3.

5. In $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ tutti gli elementi hanno tipo diverso.

Abbiamo sin qui parlato di *tipi di elementi* di una struttura, ma non abbiamo ancora definito il concetto generale di tipo.

Definizione 8.3. Data una L-struttura M e una n-upla di variabili distinte $\overline{x}$, un n-tipo $p(\overline{x})$ di M è un qualsiasi insieme di L-formule $p(\overline{x}) = \{\varphi_i(\overline{x}) : i \in I\}$

che sia **finitamente realizzato** in M, dove con ciò intendiamo che per ogni sottoinsieme finito $\varphi_1(\overline{x}), \dots, \varphi_k(\overline{x})$ di $p(\overline{x})$ esiste una n-upla $\overline{a}$ in M tale che $M \models \bigwedge_{i \leq k} \varphi(\overline{a})$. Se esiste un $\overline{a}$ in M tale che $M \models \varphi(\overline{a})$ per *tutte* le formule $\varphi(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ diremo che il tipo $p(\overline{a})$ è **realizzato** in M da $\overline{a}$, e scriveremo $M \models p(\overline{a})$. Ovviamente se partiamo da un n-upla $\overline{a}$ in M e consideriamo il suo tipo $p(\overline{x}) = tp_M(\overline{a})$, esso èsempre realizzato in M (da $\overline{a}$ stesso).

Un tipo $p(\overline{x})$ è **completo**, se data una qualsiasi L-formula $\varphi(\overline{x})$, tra le conseguenze logiche di $p(\overline{x})$ vi è $\varphi(\overline{x})$ oppure $\neg\varphi(\overline{x})$.

Esempio 8.4. Prendiamo $n = 1$ e consideriamo gli 1-tipi (tipi in una singola variabile). Nella struttura $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ vi sono in tutto $2^{\aleph_0}$ tipi completi, di cui $\aleph_0$ realizzati e $2^{\aleph_0}$ non realizzati.

Dimostrazione. Ovviamente non vi possono essere più di $\aleph_0$ tipi completi realizzati in quanto $\mathbb{Q}$ ha cardinalità $\aleph_0$. Che ve ne siano esattamente $\aleph_0$ segue dal fatto che gli elementi di $\mathbb{Q}$ hanno tipi distinti. Facciamo vedere che esistono $2^{\aleph_0}$ tipi non realizzati. A tal fine consideriamo un qualunque numero reale $r \in \mathbb{R}$ non razionale e consideriamo il tipo $p_r(x)$ consistente di tutte le formule della forma $q_1 < x$ e $x < q_2$ dove q_1 varia tra i razionali $< r$ e q_2 tra quelli $> r$. Qualunque sottoinsieme finito di formule di questa forma è realizzato in $\mathbb{Q}$. Quindi $p_r(x)$ è un tipo. Al variare di r si ottengono $2^{\aleph_0}$ tipi a due a due incompatibili che si estendono ad altrettanti tipi completi.

Si osservi che, prendendo $r = \sqrt{2}$, la formula $x^2 = 2$ *non* è deducibile dal tipo $p_r(x)$, né potrebbe far parte di un qualsiasi tipo di $Th(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ non essendo coerente con tale teoria. $\square$

Abbiamo parlato di tipi di una struttura. Definiamo ora i tipi di una teoria.

Proposizione 8.5. *Un n-tipo di una L-teoria T è un insieme $p(\overline{x})$ di enunciati nel linguaggio $L \cup \{\overline{x}\}$ tale che $T \cup p(\overline{x})$ è coerente (dove le $\overline{x}$ sono considerate costanti). Ciò equivale a dire che esiste un modello M di T e una tupla $\overline{a}$ in M tale che $M \models p(\overline{a})$.*

Dunque per definizione ogni tipo di T è realizzato in qualche modello di T e i tipi completi di T sono esattamente i tipi delle tuple di qualche modello di T.

Proposizione 8.6. *Sia $p(\overline{x})$ un insieme di $L \cup \{\overline{x}\}$-enunciati, sia T una L-teoria completa e sia M un modello di T (dunque $T = Th(M)$). Sono equivalenti:*

1. *$p(\overline{x})$ è finitamente realizzabile in M;*

2. *$T \cup p(\overline{x})$ è coerente.*

Dimostrazione. Assumendo (1), ogni sottoinsieme finito $\pi(\overline{x})$ di $T \cup p(\overline{x})$ ha un modello (della forma $(M, \overline{a})$). Per il teorema di compattezza ne segue che $T \cup p(\overline{x})$ è coerente. Viceversa da (2), e dalla completezza di T, segue che per ogni sottoinsieme finito $\pi(\overline{x})$ di $p(\overline{x})$ si ha $T \vdash \exists \overline{x} \pi(\overline{x})$, e quindi vale (1). $\square$

Esiste una forte analogia tra i tipi e gli ideali negli anelli di polinomi. Se K è un campo, ogni ideale I di $K[x]$, se diverso dall'ideale (1), ha uno zero in qualche estensione di K (in quanto K si immerge in $K[x]/J$, dove J è un ideale massimale che estende I). Analogamente abbiamo:

Lemma 8.7. *Ogni tipo $p(\overline{x})$ di $Th(M)$ è realizzato in un'estensione elementare $N \succeq M$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi $Th(M) \cup p(\overline{x})$ è coerente. Basta dimostrare che anche $ED(M) \cup p(\overline{x})$ è coerente. Se non lo è esiste una congiunzione finita $\pi(\overline{x})$ di formule di $p(\overline{x})$ tale che $ED(M) \cup \pi(\overline{x})$ è incoerente, da cui $M \models \forall \overline{x} \neg \pi(\overline{x})$. Questo è assurdo perché $p(\overline{x})$, essendo un tipo di M, è finitamente soddisfacibile in M. $\square$

Vedremo in seguito che due elementi a, b di una struttura M hanno lo stesso tipo se e solo se esiste $N \succeq M$ e un automorfismo di N che porta a in b (Corollario 8.35).

8.2 Catene elementari

Definizione 8.8. Una catena di L-strutture è una famiglia $(M_i \mid i < I)$ di L-strutture dove $I = (I, <)$ è un insieme totalmente ordinato e per ogni $i < j$ la struttura M_i è una sottostruttura di M_j.

Data una catena $(M_i \mid i \in I)$ di L-strutture, esiste un'unica L-struttura, denotata $\bigcup_i M_i$, il cui dominio è l'unione dei domini delle M_i e tale che ogni M_i è una sottostruttura di $\bigcup_i M_i$. La struttura $\bigcup_i M_i$ viene detta il limite, o l'unione, della catena.

In genere come I prenderemo un ordinale α ordinato dall'appartenenza.

Osservazione 8.9. L'unione di una catena di modelli di una teoria T non è in generale un modello di T. Ad esempio un'unione di ordini discreti può essere un ordine denso. Tuttavia in certi casi lo è: ad esempio l'unione di campi è un campo, e su ciò si basa la costruzione della chiusura algebrica di un campo. Si può dimostrare che i modelli di una teoria T sono chiusi per unioni di catene se e solo se T ammette un'assiomatizzazione di tipo $\forall\exists$, come per l'appunto nel caso dei campi, in cui l'assioma di esistenza di un inverso moltiplicativo ha questa forma (mentre gli altri assiomi sono di tipo universale).

Definizione 8.10. Sia α un ordinale e sia $(M_i \mid i < \alpha)$ una catena di L-strutture. Diciamo che tale catena è elementare se:

1. Per ogni $i < \alpha$, $M_i \prec M_{i+1}$;
2. Per ogni ordinale limite $\lambda < \alpha$ (se ne esistono) $M_\lambda = \bigcup_{i<\lambda} M_i$.

Theorem 8.11 (Tarski). *Il limite $M = \bigcup_{i<\alpha} M_i$ di una catena elementare $(M_i \mid i < \alpha)$ è un'estensione elementare di ciascun membro della catena.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che la tesi valga per tutte le catene elementari di lunghezza $< \alpha$. Il caso non banale è quando α è limite. Dimostriamo per induzione sulla complessità della L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ che per ogni $i \in I$ e $a_1, \ldots, a_n \in M_i$, $M_i \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ sse $M \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$. Se ϕ è atomica ciò segue dal fatto che M_i è una sottostruttura di M. Se ϕ si ottiene tramite un connettivo proposizionale da formule più semplici la verifica è immediata. Supponiamo che ϕ sia $\exists y \theta(\bar{x}, y)$ e $M_i \models \phi(\vec{a})$. Allora $M_i \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M_i$. Per ipotesi induttiva $M \models \theta(\vec{a}, b)$ e quindi $M \models \phi(\vec{a})$. Viceversa supponiamo $M \models \phi(\vec{a})$. Quindi $M \models \theta(\vec{a}, b)$ per qualche $b \in M$. Allora $b \in M_j$ per qualche j con $\alpha > j > i$. Per le ipotesi induttive abbiamo $M_j \models \theta(\vec{a}, b)$. Quindi $M_j \models \phi(\vec{a})$. Poiché $M_i \prec M_j$ (per induzione sulla lunghezza della catena), $M_i \models \phi(\vec{a})$. □

8.3 Modelli saturi

Definizione 8.12. Data una L-struttura M e un sottoinsieme $A \subset dom(M)$ del suo dominio, un n-tipo di M con parametri da A è, per definizione, un n-tipo della teoria $Th((M, a)_{a \in A})$). Equivalentemente esso è un insieme di formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con parametri da A che è finitamente realizzabile in M.

Esercizio 8.13. Se $N \succ M$ e $A \subset dom(M)$, gli n-tipi di M con parametri da A, coincidono con gli n-tipi di N con parametri da A. Chiamiamo $S_n(A)$ tale insieme di tipi.

Definizione 8.14. Una L-struttura M si dice ω-satura se per ogni sottoinsieme finito A di M, M realizza tutti gli 1-tipi di M con parametri da A. Più in generale, dato un cardinale infinito κ, M è κ-satura se M realizza tutti gli 1-tipi di M con $< \kappa$ parametri. Infine diciamo che M è satura, se è κ satura per $\kappa = |M|$.

La restrizione agli 1-tipi non è necessaria e possiamo equivalentemente considerare gli n-tipi:

Proposizione 8.15. *Un modello ω-saturo M realizza tutti gli n-tipi di M con un numero finito di parametri.*

Dimostrazione. Dato $p(x, \bar{y}) \in S_{k+1}(A)$, sia $\exists x p(x, \bar{y})$ l'insieme delle formule della forma $\exists x \theta(x, \bar{y})$ con $\theta(x, \bar{y}) \in p(x, \bar{y})$. Si verifica facilmente che $\exists x p(x, \bar{y})$ è un k-tipo. Per induzione è realizzato da qualche k-upla $\bar{a}$ di elementi di M, ovvero $M \models \exists x p(x, \bar{a})$. Ne segue che $p(x, \bar{a})$ è un tipo con parametri da $A \cup \{\bar{a}\}$, ed essendo un 1-tipo è realizzato. □

Esempio 8.16. $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ non è ω-saturo in quanto non realizza il tipo $p(x)$ consistente di tutte le formule della forma $n < x$ al variare di n in $\mathbb{N}$. Osserviamo che tale tipo non usa parametri in quanto n può essere definito senza parametri ponendo $n := 1 + 1 + \ldots + 1$ (n volte).

Esercizio 8.17. $(\mathbb{R}, <)$ è ω-saturo.

Theorem 8.18. *Ogni L-struttura ha un'estensione elementare ω-satura.*

Dimostrazione. Sia $\{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ l'insieme di tutti gli 1-tipi di $\mathcal{M}$ con un numero finito di parametri, dove abbiamo scelto una variabile diversa x_i per ogni tipo. La teoria $ED(\mathcal{M}) \cup \{p_i(x_i) \mid i \in I\}$ è coerente per compattezza, in quanto i vari p_i sono finitamente soddisfacibili in $\mathcal{M}$. Quindi esiste un modello $\mathcal{M}_1$ di questa teoria che estende elementarmente $\mathcal{M}$ (in quando ogni modello di $ED(\mathcal{M})$ è identificabile con un'estensione elementare di $\mathcal{M}$). Tale modello $\mathcal{M}_1$ realizza tutti i tipi $p_i(x)$, ma non è detto che sia ω-saturo perché ora dobbiamo considerare anche i tipi con un numero finito di parametri da $\mathcal{M}_1$, non solo da $\mathcal{M}$. Iteriamo perciò il procedimento ottenendo una catena elementare $\mathcal{M} \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \ldots$ dove ogni $\mathcal{M}_{n+1}$ realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_n$ con un numero finito di parametri. Il limite $\mathcal{M}_\omega$ di questa catena è un'estensione elementare di tutti gli $\mathcal{M}_i$ e realizza tutti i tipi di $\mathcal{M}_\omega$ con un numero finito di parametri. Per verificare ciò basta osservare che, dato un tale tipo $p(x)$, i suoi parametri, essendo in numero finito, saranno contenuti in qualche $\mathcal{M}_n$ e $p(x)$ sarà realizzato in $\mathcal{M}_{n+1}$, e quindi in $\mathcal{M}_\omega$ (essendo $\mathcal{M}_\omega$ un'estensione elementare di $\mathcal{M}_{n+1}$). $\square$

Similmente dato un cardinale κ si dimostra:

Theorem 8.19. *Ogni L-struttura M ha un'estensione elementare κ^+-satura $N \succ M$. Inoltre, assumendo $\kappa \geq |L|$ e $2^\kappa \geq |M|$, possiamo scegliere N di cardinalità $\leq 2^\kappa$.*

Dimostrazione. Si costruisca una catena elementare $(M_\alpha \mid \alpha \leq \kappa^+)$ tale che $M_0 = M$, $M_{\alpha+1} \succ M_\alpha$ realizza tutti gli 1-tipi con $\leq \kappa$ parametri da M_α, e per ciascun ordinale limite $\lambda \leq \kappa^+$ $M_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$. Per far vedere che M_{κ^+} è κ^+ saturo si usi il fatto che ogni suo sottoinsieme A di cardinalità κ è contenuto in qualche M_α con $\alpha < \kappa^+$. Dato A, i tipi di M_{κ^+} con parametri da A coincidono con i tipi di M_α con parametri da A. Per costruzione essi sono realizzati in $M_{\alpha+1}$ e quindi anche in M_{κ^+}.

Per la stima sulle cardinalità osserviamo che data una L-struttura N di cardinalità $\leq 2^\kappa$, l'insieme degli 1-tipi di N con $\leq \kappa$ parametri ha cardinalità $\leq 2^\kappa$ (ci sono al più $|N|^\kappa = 2^\kappa$ modi di scegliere i parametri, e per ogni scelta dei parametri ci sono $\leq 2^\kappa$ tipi). Induttivamente, usando Löwenheim-Skolem, possiamo fare in modo che ciascun elemento della catena abbia cardinalità $\leq 2^\kappa$. $\square$

Il teorema fornisce estensioni κ^+ sature di cardinalità 2^κ. Se vale l'ipotesi generalizzata del continuo, allora $\kappa^+ = 2^\kappa$ e l'estensione ottenuta è satura. In molti casi interessanti (ad esempio per modelli di teorie "stabili") si possono ottenere estensioni sature senza l'ipotesi del continuo.

8.4 Modello mostro

Proposizione 8.20. *Data una teoria completa T esiste un* ***modello mostro*** *M di T il cui dominio è una classe propria e in cui tutti i modelli "piccoli" (ovvero con domini basati su insiemi) si immergono. Il modello mostro è l'unione $M =$*

$\bigcup_{i\in ON} M_i$ di una catena elementare di modelli di T indiciata da tutti i numeri ordinali.

Dimostrazione. (Cenno) A meno di isomorfismo possiamo indicizzare tutti i modelli piccoli con degli ordinali. Sia N_α il modello con indice α. Definiamo una nuova successione di modelli M_α nel modo seguente. Se α è limite prendiamo l'unione dei modelli precedenti. Per definire $M_{\beta+1}$ osserviamo che $M_\beta \equiv N_\beta$ (in quanto modelli di una teoria completa) e per il Lemma 2.26 esiste $M_{\beta+1} \succeq M_\beta$ in cui N_β si immerge elementarmente. L'unione degli M_α è il modello mostro desiderato (vedi Teorema 8.11). $\square$

8.5 Omogeneità delle strutture sature

Dato un insieme di indici I e una I-upla $\bar{a} = (a_i)_{i\in I}$ di elementi di una struttura M, il tipo di $\bar{a}$ in M è definito come l'insieme delle formule $\varphi(\bar{x})$, con variabili libere incluse in $\{x_i : i \in I\}$, tali che $M \models \varphi(\bar{a})$, dove si intende che a_i è sostituita al posto della variabile x_i (se presente).

Definizione 8.21. Una L-struttura M è **κ-omogenea** se, dato $\alpha < \kappa$, due α-tuple $\bar{a}, \bar{b}$ da M con lo stesso tipo, e un nuovo elemento $c \in M$, esiste $d \in M$ tale che $\bar{a}c$ e $\bar{b}d$ continuano ad avere lo stesso tipo. Diciamo che M è **fortemente κ-omogenea** se per ogni $\alpha < \kappa$ due α-uple da M con lo stesso tipo sono coniugate da un automorfismo di M, ovvero esiste un automorfismo di M che porta l'una nell'altra. Chiaramente ogni struttura κ-fortemente omogenea è anche κ-omogenea (come d si prenda l'immagine di c tramite l'automorfismo).

Theorem 8.22. *Siano M, N L-strutture, sia $n < \omega$ e assumiamo che $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$. Sia $c \in N$. Se M è ω-satura, allora esiste $d \in M$ tale che $(M, a_i, d)_{i<n} \equiv (N, b_i, c)$. In particolare le strutture ω-sature sono ω-omogenee.*

Dimostrazione. Sia $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ e sia $\Sigma(x, \bar{b})$ il tipo di c su $\bar{b}$, ovvero l'insieme di tutte le formule $\phi(x, \bar{b})$ con parametri da $\bar{b}$ realizzate da c in N. Sia $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ e sia $\Sigma(x, \bar{a})$ l'insieme delle formule ottenute rimpiazzando i b_i con gli a_i nelle formule di $\Sigma(x, \bar{b})$. Se $\phi(x, \bar{b}) \in \Sigma(x, \bar{b})$, allora $N \models \exists x \phi(x, \bar{b})$, e quindi per elementare equivalenza $M \models \exists x \phi(x, \bar{a})$. Ne segue che $\Sigma(x, \bar{a})$ è finitamente soddisfacibile in M (ovvero è un tipo), ed essendo M ω-saturo, esiste $d \in M$ che realizza $\Sigma(x, \bar{b})$. Per tale d vale la tesi. $\square$

Corollario 8.23. *Se una teoria completa T ha un modello ω-saturo numerabile, ne ha uno solo a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Per il Teorema 8.22 nelle strutture ω-sature le mappe elementari tra sottoinsiemi finiti hanno la proprietà del va e vieni, e possiamo concludere invocando il teorema di Scott (Teorema 7.8). $\square$

Corollario 8.24. *Una struttura ω-satura M è ω-universale, ovvero ogni modello numerabile N della sua teoria completa si immerge elementarmente in M.*

Dimostrazione. Sia $(b_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di N. Per il Teorema 8.22 possiamo costruire induttivamente $a_i \in M$ con $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)$. La funzione $a_i \mapsto b_i$ è l'immersione cercata. □

Con la stessa dimostrazione (rimpiazzando ω con κ) si ha:

Theorem 8.25. *Siano M, N L-strutture con M κ-satura. Sia $\alpha < \kappa$ e assumiamo che $(M, a_i)_{i<\alpha} \equiv (N, b_i)_{i<\alpha}$. Sia $c \in N$. Allora esiste $d \in M$ tale che $(M, a_i, c)_{i<\alpha} \equiv (N, b_i, d)_{i<\alpha}$.*

Dimostrazione. Come nel Teorema 8.22 rimpiazzando ω con κ nella dimostrazione. □

Corollario 8.26. *Una struttura κ-satura M è κ-universale, ovvero ogni modello di cardinalità κ della teoria completa di M si immerge elementarmente in M.*

Dimostriamo ora l'unicità dei modelli saturi.

Theorem 8.27. *Sia T una teoria completa. Due modelli ω-saturi M, N di T di cardinalità $\aleph_0$ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Fissiamo una enumerazione di M e una enumerazione di N, entrambe di tipo d'ordine ω. Per $n < \omega$ costruiamo induttivamente $(a_i)_{i<n}$ in M e $(b_i)_{i<n}$ in N tali che $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$. Il caso $n = 0$ è dato dal fatto che $M \equiv N$, essendo T completa. Supponendo di aver definito a_i, b_i per $i < n$ definiamo a_n, b_n come segue. (i) per n pari sia a_n il minimo elemento dell'enumerazione di M diverso da ciascun a_i con $i < n$ e sia b_n il minimo elemento dell'enumerazione di N che verifica $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$ (b_n esiste per il Teorema 8.22); (ii) per n dispari sia b_n il minimo elemento dell'enumerazione di N diverso da ciascun b_i con $i < n$ ed sia a_n il minimo elemento dell'enumerazione di M che verifica $(M, a_i)_{i<n} \equiv (N, b_i)_{i<n}$ (a_n esiste per il Teorema 8.22). □

Similmente:

Theorem 8.28. *Sia T una teoria completa. Due modelli κ-saturi M, N di T di cardinalità κ sono isomorfi.*

Dimostrazione. Fissiamo una enumerazione di M e una enumerazione di N, entrambe di tipo d'ordine κ e ragioniamo come prima rimpiazzando ω con κ. □

Osservazione 8.29. Lo stesso argomento mostra che le strutture κ-sature di cardinalità κ sono fortemente κ-omogenee.

Esercizio 8.30. Nella dimostrazione precedente, dove si usa il fatto che l'enumerazione sia di tipo d'ordine esattamente κ, anziché di un qualsiasi tipo d'ordine della stessa cardinalità di κ?

Il prossimo risultato mostra che le strutture sature sono fortemente omogenee.

Corollario 8.31. *Sia M una L-struttura satura di cardinalità κ e sia $\alpha < \kappa$. Se $(a_i)_{i<\alpha}$ e $(b_i)_{i<\alpha}$ sono α-uple da M con lo stesso tipo, allora esiste un automorfismo f di M che porta ciascun a_i nel corrispondente b_i.*

Dimostrazione. Le ipotesi dicono che $(M, a_i)_{i<\alpha}$ e $(M, b_i)_{i<\alpha}$ sono elementarmente equivalenti come strutture in un linguaggio L' espanso con α nuove costanti. Ma essendo anche sature (verificare!), sono isomorfe per il Teorema 8.28. □

8.6 Elementi con lo stesso tipo sono coniugati in un'estensione elementare

In questa sezione mostriamo che due elementi a, b di una struttura M hanno lo stesso tipo se e solo se esiste un'estensione elementare $N \succ M$ ed un automorfismo di N che porta a in b. Le estensioni che ci servono sono quelle "ω-omogenee".

Theorem 8.32. *Ogni L-struttura numerabile M ha un'estensione elementare $N \succ M$ numerabile ed ω-omogenea.*

Dimostrazione. Dato un insieme finito di parametri $A \subseteq M$, i tipi su A realizzati in M sono al più $\aleph_0 = |M|$ (non tutti i tipi, solo quelli realizzati) e ciascuno di essi, chiamiamolo $p(x, \overline{a}) \in S_n(A) := S_n(Th(M, a)_{a \in A})$, ha al più $\aleph_0$ immagini $p(x, f\overline{a})$, tramite mappe elementari $f : A \to M$. Inoltre ci sono al più $\aleph_0$ scelte per A. Quindi posso realizzare in un'estensione elementare numerabile $M_1 \succ M$ tutti questi tipi $p(x, f\overline{a})$. Iterando costruisco una catena elementare $(M_i : i < \omega)$ di strutture numerabili dove ciascun M_{i+1} é ottenuto da M_i allo stesso modo in cui M_1 è ottenuto da M. L'unione $N = \bigcup_i M_i$ è l'estensione omogenea desiderata. Consideriamo infatti due n-uple $\overline{a}$ e $\overline{b}$ da N con lo stesso tipo e sia c un nuovo elemento di N. Supponiamo che $c, \overline{a}$ siano in M_i. La mappa f che manda $\overline{a}$ in $\overline{b}$ (componente per componente) è elementare. Sia $p(x, \overline{a})$ il tipo di c su $\overline{a}$ e sia $p(x, \overline{b})$ la sua immagine tramite f. Per costruzione esiste $d \in M_{i+1} \subseteq N$ che realizza $p(x, \overline{b})$ e dunque N è ω-omogenea. □

Osservazione 8.33. Una struttura numerabile ω-omogenea, è fortemente ω-omogenea. Lo si può dimostrare con la tecnica del va e vieni.

Proposizione 8.34. *Sia κ un cardinale infinito. Ogni L-struttura M ha un'estensione elementare N fortemente κ-omogenea e κ-satura (ma in generale potrà avere cardinalità $> \kappa$).*

Dimostrazione. Dimostriamo un risultato più forte, ovvero che esiste un'estensione N fortemente κ^+-omogenea e κ^+-satura (trarremo ausilio dal fatto che κ^+ è un cardiale regolare). Consideriamo a tal fine una catena elementare $(M_\alpha : \alpha < \kappa^+)$ tale che $M = M_0$ e $M_{\alpha+1}$ è $|M_\alpha|^+$-satura Sia N la sua unione. Osserviamo innanzitutto che N è κ^+-satura (un insieme di parametri di cardinalità $< \kappa^+$ sarà contenuto in qualche M_α, e ogni tipo su quei parametri sarà realizzato in $M_{\alpha+1}$ e quindi in N). Mostriamo che è κ-omogenea. Siano A, B sottoinsiemi di N di cardinalità $< \kappa$ e sia $f : A \to B$ una mappa elementare. Esiste allora un $\beta < \kappa^+$ tale che $A, B \subseteq M_\beta$ e senza perdita di generalità possiamo supporre che β sia un ordinale pari, ovvero un ordinale limite più un ordinale finito pari. Sia L_A il linguaggio ottenuto aggiungendo ad L una nuova costante c_a per $a \in A$ ed espandiamo M_β ad una L_A-struttura $(M_\beta, a)_{a\in A}$ interpretando c_a con A. Espandiamo poi $M_{\beta+1}$ ad una L_A-struttura $(M_{\beta+1}, f(a))_{a\in A}$ interpretando questa volta c_a con $f(a) \in B$. Siccome $f : A \to B$ è elementare, $(M_\beta, a)_{a\in A} \equiv (M_{\beta+1}, f(a))_{a\in A}$. Ora poiché $M_{\beta+1}$ è $|M_\beta|^+$-satura e la cardinalità di A è $< \kappa$, la sua espansione $(M_{\beta+1}, f(a))_{a\in A}$ rimane $|M_\beta|^+$-satura. Poiché le strutture sature sono universali (Corollario 8.26) e $(M_\beta, a)_{a\in A} \equiv (M_{\beta+1}, f(a))_{a\in A}$, esiste un'immersione elementare $f_\beta{:}M_\beta \to M_{\beta+1}$ che estende f (ovvero un'immersione elementare nel linguaggio L_A). La f_β può non essere surgettiva, ma possiamo estenderla ad una mappa elementare surgettiva $f_{\beta+1} : dom(f_{\beta+1}) \to M_{\beta+1}$ con $M_\beta \subseteq dom(f_{\beta+1}) \subseteq M_{\beta+2}$: basta a tal fine considerare un'immersione elementare $g_{\beta+1}$ da $M_{\beta+1}$ a $M_{\beta+2}$ che estende f_β^{-1} (usando le proprietà di saturazione di $M_{\beta+2}$) e prendere come $f_{\beta+1}$ l'inversa di $g_{\beta+1}$. Distinguendo gli ordinali pari e gli ordinali dispari possiamo continuare a procedere in questo modo prendendo l'unione ai passi limite. Per costruzione abbiamo che se β è pari M_β è incluso nel dominio di f_β, se β è dispari M_β è incluso nell'immagine di f_β, e se β è limite M_β è incluso sia nel dominio che nell'immagine e pertanto f_β è un automorfismo di M_β. Alla fine otteniamo un automorfismo $g = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} f_\alpha$ di N che estende f. □

Corollario 8.35. *Due elementi di una struttura M hanno lo stesso tipo se e solo se esiste un automorfismo di un'estensione elementare di M che porta l'uno nell'altro.*

9 Uso dei modelli saturi per l'eliminazione dei quantificatori

9.1 Va e vieni in modelli κ-saturi

Theorem 9.1. *Sia T una L-teoria e sia $\kappa \geq |L|$.*

1. *Se per ogni coppia M, N di modelli κ-saturi di T l'insieme di tutti gli isomorfismi parziali finiti da M ad N ha la proprietà del va e vieni, allora T ammette EQ.*

2. *Se per ogni coppia M, N di modelli κ-saturi di T esiste una famiglia non vuota I di isomorfismi parziali da M ad N con la proprietà del va e vieni allora T è completa.*

Dimostrazione. 1) Siano M_0 ed N_0 due modelli di T e sia f un isomorfismo parziale finito da M_0 ad N_0. Per il Corollario 7.19 basta mostrare che f è elementare. Per il Teorema 8.19 esistono $M \succ M_0$ e $N \succ N_0$ κ-saturi. Per ipotesi f appartiene ad una famiglia di isomorfismi parziali tra M ed N con la proprietà del va e vieni e quindi è elementare (come isomorfismo parziale tra M ed N e quindi anche tra M_0 ed N_0).

2) Le ipotesi implicano che i modelli κ-saturi di T siano elementarmente equivalenti tra di loro. Poiché ogni modello è elementarmente equivalente ad uno κ-saturo, la stessa cosa vale per ogni coppia di modelli e T è completa. □

9.2 Teoria degli ordini discreti

Definizione 9.2. Un ordine discreto è un ordine totale $(M, <)$ in cui ogni elemento x ha un successore e un predecessore definiti come segue. Un elemento y si dice successore di x se $y > x$ e non esiste alcun elemento z tra con $y > z > x$. Scriviamo $y = S(x)$ per indicare che y è il successore di x. Se $S(x) = y$ scriviamo anche $P(y) = x$ e diciamo che x è il predecesore di y.

Definizione 9.3. Dato un insieme di isomorfismi parziali da M ad N, scriviamo $M, a_1, \ldots, a_n \equiv^I N, b_1, \ldots, b_n$ se esiste $f \in I$ tale che $f(a_i) = b_i$ per ogni $i \leq n$.

Theorem 9.4. *Sia $L = \{<\}$ il linguaggio dell'ordine e sia T la L-teoria degli ordini discreti senza massimo o minimo elemento.*

1. *T è completa.*
2. *T ammette eliminazione dei quantificatori in nella segnatura $L' = \{<, S\}$ con un simbolo S per il successore definito da $S(x) = y \leftrightarrow (x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y))$. Più precisamente la L'-teoria T' che si ottiene da T aggiungendo questa definizione come assioma ammette eliminazione dei quantificatori.*

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 9.1. Siano M, N modelli ω-saturi di T. Esiste un unico modo di espandere M, N a due L'-strutture che siano modelli di T'. Continueremo a denotare M, N le strutture espanse. Sia I l'insieme degli isomorfismi finiti parziali da M ad N considerati come L'-strutture. I è non vuoto in quanto presi comunque $a \in M$ e $b \in N$ si verifica facilmente che $a \equiv^I b$. Per finire basta mostrare che I gode della proprietà del va e vieni. Supponiamo dunque $(a_1, \ldots, a_n) \equiv^I (b_1, \ldots, b_n)$ e sia $c \in M$. Dobbiamo trovare $d \in N$ tale che $\bar{a}c \equiv^I \bar{b}d$ (l'altro caso è simmetrico). Per $m \in \mathbb{Z}$ sia $S^m(x)$ l'm-esimo successore di x se $m \geq 0$, mentre se $m < 0$ sia $S^m(x)$ l'm-esimo predecessore di x. Notiamo che $S^0(x) = x$, $S^1(x) = S(x)$ e $S^n S^m(x) = S^{n+m}(x)$.

Caso 1. Supponiamo che esista a_i (con $1 \leq i \leq n$) ed $m \in \mathbb{Z}$ tale che $c = S^m(a_i)$. Possiamo porre in questo caso $d = S^m(b_i)$.

Caso 2. Supponiamo di non essere nel caso 1, e assumiamo senza perdita di generalità che $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ e che $a_i < c < a_{i+1}$ (il caso in cui c sia maggiore di ogni a_i o minore di ogni a_i è analogo). Per ogni intero positivo m dobbiamo allora avere $S^m(a_i) < c$ e $S^m(c) < a_{i+1}$. Ne segue che per ogni intero positivo m dobbiamo avere $S^m(a_i) < a_{i+1}$. Poiché $\bar{a} \equiv^I \bar{b}$, per ogni intero positivo m deve valere $S^m(b_i) < b_{i+1}$. Per ω-saturazione di N esiste allora un $d \in N$ tale che per ogni intero positivo m, $S^m(b_i) < d$ e $S^m d < b_{i+1}$. Per tale d abbiamo $(\bar{a}c, \bar{b}d) \in I$. □

9.3 Eliminazione dei quantificatori per le algebre di Boole senza atomi

La teoria delle algebre di Boole non ammette eliminazione dei quantificatori nel linguaggio $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$. Ad esempio il predicato "x è un atomo" (cioè $x > 0 \wedge \neg\exists y(0 < y < x)$) non è esprimibile senza quantificatori (dove $x \leq y$ è definito come $x \wedge y = x$).

Theorem 9.5. *La teoria delle algebre di Boole senza atomi è completa, $\aleph_0$-categorica, ed ammette EQ nel linguaggio $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ algebre di Boole senza atomi. Basta mostrare che l'insieme degli isomorfismi parziali finiti tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ non è vuoto e ha la proprietà del va e vieni. Che sia non vuoto segue dal fatto che sia $\mathcal{A}$ che $\mathcal{B}$ contengono una copia dell'algebra con due soli elementi $\{0, 1\}$. Per mostrare la proprietà del va e vieni assumiamo $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ e sia $c \in A$. Dobbiamo trovare $d \in B$ con $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, c \equiv_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, d$. Consideriamo una scelta di segni $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{+1, -1\}$ e poniamo $\epsilon_i a_i = a_i$ se $\epsilon_i = +1$, e $\epsilon_i a_i = \neg a_i$ se $\epsilon_i = -1$. Per le ipotesi, $a_\epsilon := \epsilon_1 a_1 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n a_n \neq 0$ se e solo se $b_\epsilon := \epsilon_1 b_1 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n b_n \neq 0$. Alcuni degli a_ε potrebbero essere uguali a 0. Gli a_ϵ diversi da 0 sono gli atomi della sottoalgebra di $\mathcal{A}$ generata da $a_1, \ldots, a_n$ (un'algebra di Boole finitamente generata è sempre atomica) e discorso analogo vale per i b_ϵ diversi da 0 in $\mathcal{B}$. Dato un tale atomo a_ϵ della sottoalgebra, possiamo scrivere $a_\varepsilon = a_\varepsilon^0 \vee a_\varepsilon^1$ dove $a_\varepsilon^0 = a_\varepsilon \wedge c$ e $a_\varepsilon^0 \wedge a_\varepsilon^1 = 0$. Possono capitare tre casi: $a_\varepsilon^0 = 0$ o $a_\varepsilon^1 = 0$ o $0 < a_\varepsilon^0 < a_\varepsilon$. Siccome $\mathcal{B}$ è non atomica, possiamo ottenere un'analoga scomposizione per b_ε, ovvero possiamo scrivere $b_\epsilon = b_\epsilon^0 \vee b_\epsilon^1$ con $b_\varepsilon^0 \wedge b_\varepsilon^1 = 0$ e $b_\varepsilon^i = 0 \iff a_\varepsilon^i = 0$ per $i = 0, 1$. Si noti che gli a_ε^i diversi da 0 sono gli atomi della sottoalgebra di $\mathcal{A}$ generata da $a_1, \ldots, a_n, c$. Prendendo ora come $d \in \mathcal{B}$ l'elemento $\bigvee_\varepsilon b_\varepsilon^0$ e mandando a_ε^i in b_ε^i $(i = 0, 1)$, otteniamo un isomorfismo tra la sottoalgebra di $\mathcal{A}$ generata da $a_1, \ldots, a_n, c$ e la sottoalgebra di $\mathcal{B}$ generata da $b_1, \ldots, b_n, d$, dove l'isomorfismo manda a_i in b_i e c in d. Abbiamo così completato il va e vieni. $\square$

Un algebra di Boole si dice **atomica** se ogni elemento maggiora un atomo, cioè un elemento x maggiore di 0 e tale che $\neg\exists y(0 < y < x)$. Ad esempio l'algebra delle parti di un insieme è atomica (gli atomi sono gli insiemi costituiti da un solo elemento), e ogni algebra finita è atomica. In un algebra atomica due elementi sono uguali se e solo se maggiorano gli stessi atomi (se $x \neq y$ la differenza simmetrica $(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ maggiora un atomo). Quindi un algebra di Boole atomica può essere pensata a meno di isomorfismi come una sottoalgebra dell'insieme delle parti dei suoi atomi. Introduciamo infiniti nuovi simboli di predicato unario $A_1, A_2, A_3, \ldots$ e interpretiamo $A_n(x)$ in una algebra di boole $\mathcal{B}$ come il predicato che esprime il fatto che x maggiora esattamente n atomi. In particolare $A_1(x)$ sse x è un atomo.

Esercizio 9.6. La teoria delle algebre di Boole atomiche elimina i quantificatori nel linguaggio espanso $\vee, \wedge, \neg, 0, 1, A_1, A_2, A_3, \ldots$.

10 Applicazioni alla teoria dei campi

10.1 Teoria dei campi algebricamente chiusi

In questa sezione dimostriamo che la teoria dei campi algebricamente chiusi ammette eliminazione dei quantificatori (Tarski). Ne deduciamo la completezza della teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica fissata. Infine otteniamo alcune conseguenze di carattere algebrico tra cui il teorema degli zeri di Hilbert (Nullstellensatz) e un teorema di Ax.

Definizione 10.1. La teoria del primo ordine dei campi algebricamente chiusi, ACF, è formulata nel linguaggio $L = \{0, 1, +, -, \cdot\}$. Gli assiomi sono quelli dei campi più uno schema di assiomi per dire che ogni polinomio di grado $n > 0$ ha uno zero:

$$\forall a_0, \ldots, a_{n-1} \exists x (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0).$$

Volendo rimanere nell'ambito della logica del primo ordine servono infiniti assiomi, uno per ogni grado $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 10.2. *ACF ammette EQ.*

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 9.1. Siano M, N campi algebricamente chiusi, e siano $M_0 \subset M$ ed $N_0 \subset N$ i loro sottocampi primi (ciascuno dei quali è isomorfo o a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ o a $\mathbb{Q}$ a seconda che la caratteristica del campo sia p o 0). Assumiamo M, N ω-saturi e mostriamo che l'insieme degli isomorfismi parziali da M a N ha la proprietà del va e vieni. Supponiamo dunque che $M, a_1, \ldots, a_n \equiv_0 N, b_1, \ldots, b_n$ (ovvero $a_i \mapsto b_i$ è un isomorfismo parziale). Ne seque che M ed N hanno la stessa caratteristica e $K := M_0(a_1, \ldots, a_n)$ è isomorfo a $K' := N_0(b_1, \ldots, b_n)$ tramite un isomorfismo che manda M_0 in N_0 e a_i in b_i. Sia $c \in M$. Vogliamo un $d \in N$ con $M, a_1, \ldots, a_n, c \equiv_0 N, b_1, \ldots, b_n, d$. Distinguiamo due casi.

Caso 1. Supponiamo che c sia algebrico su $K = M_0(a_1, \ldots, a_n)$ e sia $f(x) \in K[x]$ il suo polinomio minimo. L'isomorfismo tra K e K' induce un isomorfismo tra $K[x]$ e $K'[x]$. Sia $g(x) \in K'[x]$ l'immagine di $f(x)$ tramite l'isomorfismo e sia $d \in N$ una radice di $g(x)$ (che esiste in quanto N è algebricamente chiuso). Osserviamo che $M_0(a_1, \ldots, a_n, c) \cong K(c) \cong K[x]/f(x) \cong K'[x]/g(x) \cong K'(d) \cong N_0(b_1, \ldots, b_n, d)$. La composizione degli isomorfismi manda ciascun a_i in b_i ed c in d. Quindi $M, a_1, \ldots, a_n, c \equiv_0 N, b_1, \ldots, b_n, d$.

Caso 2. Supponiamo che c sia trascendente su K. Ne segue che $K(c) \cong K(x)$ (il campo quoziente dell'anello di polinomi $K[x]$). Poiché N è ω-saturo e K' è finitamente generato come campo da $b_1, \ldots, b_n$, esiste un $d \in N$ trascendente su K'. Ne segue che $K(c) \cong K(x) \cong K'(x) \cong K(d)$ e concludiamo come nel caso 1. $\square$

Diamo una seconda dimostrazione più costruttiva basata sul Teorema 3.6 che non usa la saturazione.

Seconda dimostrazione. Nel linguaggio di ACF le formule primitive sono della forma

$$\exists x(\bigwedge_{i<m} t_i = 0 \wedge \bigwedge_{j<n} u_j \neq 0)$$

dove i t_i e gli u_j sono termini polinomiali. Osserviamo che $u_j \neq 0$ equivale a $\exists y(u_j y = 1)$. Facendo questa sostituzione e spostando il quantificatore $\exists y$ all'esterno della formula primitiva, ci riduciamo al problema di eliminare il quantificatore in una formula della forma

$$\varphi(x) := \exists x(\bigwedge_{i<m} t_i = 0)$$

Possiamo assumere che ciascun t_i sia un polinomio di grado > 0 in x altrimenti portiamo t_i =0 fuori dal quantificatore.

Caso 1. Supponiamo $m = 0$. Dobbiamo eliminare il quantificatore da $\varphi(x) := \exists x(t_0 = 0)$. Possiamo assumere che $t_0 = a_0 x^{n_0} + r_0$ dove $n_0 > 0$, il termine a_0 non contiene la x ed r_0 è un polinomio in x di grado minore di n_0. Poiché in un campo algebricamente chiuso ogni polinomio non nullo ha uno zero, la $\varphi(x)$ equivale in questo caso alla formula $a_0 \neq 0 \vee (a_0 = 0 \wedge \exists x(r_0 = 0))$ (ricordiamo che il termine a_0 può contenere variabili diverse da x, ad esempio a_0 stesso può essere una variabile). Possiamo ora procedere per induzione per eliminare il quantificatore da $\exists x(r_0 = 0)$.

Caso 2. Supponiamo $m > 0$. Scriviamo, con le stesse convenzioni di prima, $t_0 = a_0 x^{n_0} + r_0$ e analogamente $t_1 = a_1 x^{n_1} + r_1$. Possiamo assumere $n_0 \geq n_1 > 0$. Distinguiamo due casi a seconda dell'annullarsi di a_1 (il quale può dipendere da variabili diverse da x). Nel caso $a_1 \neq 0$ consideriamo la divisione euclidea di t_0 per t_1. Più precisamente notiamo che $t_0 = 0 \wedge t_1 = 0$ equivale a

$$(a_1 = 0 \wedge t_0 = 0 \wedge r_1 = 0) \bigvee (a_1 \neq 0 \wedge t_0' = 0 \wedge t_1 = 0)$$

dove $t_0' := a_1 t_0 - a_0 x^{n_0 - n_1} t_1$. Poiché a_1 non dipende da x la $\varphi(x)$ equivale dunque a

$$\begin{aligned}\big(a_1 = 0 \wedge \exists x(t_0 = 0 \wedge r_1 = 0 \wedge \bigwedge_{2\leq i<m} t_i = 0)\big) \\ \bigvee \big(a_1 \neq 0 \wedge \exists x(t_0' = 0 \wedge t_1 = 0 \wedge \bigwedge_{2\leq i<m} t_i = 0)\big).\end{aligned}$$

Siccome i gradi dei polinomi sono diminuiti possiamo procedere per induzione per eliminare i due rimanenti quantificatori esistenziali dalle rispettive sottoformule (quando i gradi in x arrivano a zero portiamo le corrispondenti formule fuori dal quantificatore $\exists x$). $\square$

Osservazione 10.3. In termini geometrici il teorema di eliminazione dei quantificatori dice che ogni insieme definibile in un campo algebricamente chiuso è **costruibile**, ovvero è una combinazione booleana di insiemi Zariski-chiusi (zeri di polinomi).

Definizione 10.4. La teoria ACF_0 dei campi algebricamente chiusi di caratteristica zero si ottiene da ACF con l'aggiunta dello schema infinito di assiomi $1 \neq 0$, $1+1 \neq 0$, $1+1+1 \neq 0$, ecc. Per p primo, la teoria ACF_p dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p is ottiene aggiungendo a ACF l'assioma $p = 0$, dove $p := 1+1+\ldots+1$.

Theorem 10.5. *ACF_0 e ACF_p sono complete.*

Dimostrazione. Dato un enunciato φ dobbiamo mostrare che esso è vero in un modello di ACF_0 se e solo se è vero in tutti i modelli. Per il Teorema 10.2 basta dimostrare questo fatto per le formule senza quantificatori. Ma questo è ovvio in quanto una formula senza quantificatori vale in un modello K di T se e solo se vale nel suo sottocampo primo $\mathbb{Q} \subseteq K$. Lo stesso ragionamento vale in caratteristica p osservando che ogni campo di caratteristica p contiene un sottocampo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. □

Più in generale abbiamo:

Proposizione 10.6. *Sia T una L-teoria.*

1. *Se T ha EQ ed esiste una struttura P (non necessariamente modello di T) che si immerge in ogni modello, allora T è completa.*

2. *Se T è model completa e possiede un modello P che si immerge in qualunque altro modello di T, allora è completa.*

Dimostrazione. In entrambi i casi un enunciato φ è vero in un qualsiasi modello di T se e solo se è vero in P. Ne segue che tutti i modelli di T verificano gli stessi enunciati e quindi T è completa. □

Osservazione 10.7. Un'altra dimostrazione della completezza di ACF_0 e ACF_p si ottiene dal fatto che entrambe sono teorie $\aleph_1$-categoriche: ogni modello di cardinalità più che numerabile è determinato a meno di isomorfismo dalla cardinalità di una base di trascendenza sul campo primo. Ad esempio ogni modello di ACF_0 di cardinalità $\aleph_1$ è isomorfo alla chiusura algebrica di $\mathbb{Q}(x_i : i < \aleph_1)$ dove le x_i sono "variabili" (ovvero una base di trascendenza).

Corollario 10.8 (Principio di Lefschetz)**.** *Sia σ una formula nel linguaggio dei campi. Sono equivalenti:*

1. *σ è vera nel campo dei complessi $\mathbb{C}$.*

2. *σ è vera in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica zero.*

3. *Per infiniti numeri primi p, σ è vera in tutti in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica p.*

Dimostrazione. Se σ è vera in $\mathbb{C}$, allora per completezza $ACF_0 \models \sigma$, e per compattezza basta un sottoinsieme finito degli assiomi di ACF_0 a dedurre σ. Ne segue che σ vale in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. Analogamente se σ è falsa in $\mathbb{C}$ allora $ACF_0 \models \neg\sigma$ e σ è falsa in tutti i campi algebricamente chiusi di caratteristica abbastanza grande. □

Corollario 10.9 (Ax)**.** *Sia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una mappa polinomiale iniettiva. Allora f è surgettiva.*

Dimostrazione. Sia $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), \dots, f_n(\overline{x}))$ e supponiamo che, per ogni i, $f_i \in \mathbb{C}[\overline{x}]$ sia di grado totale $\leq d$. Quantificando sui coefficienti possiamo trovare una formula del primo ordine $\Theta_{n,d}$ che afferma che ogni mappa polinomiale iniettiva f in n variabili e di grado totale $\leq d$ è surgettiva. Chiaramente $\Theta_{n,d}$ è vera nei campi finiti. Ne segue che essa vale anche nell'unione crescente $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_n$ di una famiglia di campi finiti: infatti se i coefficienti di f appartengono a K_n la restrizione di f ad ogni K_m con $m \geq n$ è surgettiva verso K_m. In particolare $\Theta_{n,d}$ vale nella chiusura algebrica di ogni campo finito e dunque, per la completezza di ACF_p, in tutti i modelli di ACF_p per ogni p. Per il principio di Lefschetz $\Theta_{n,d}$ vale in $\mathbb{C}$. □

Corollario 10.10 (Hilbert's Nullstellensatz, prima forma)**.** *Sia K un campo algebricamente chiuso. Sia $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ un sistema finito di equazioni polinomiali in $x_1, \dots, x_n$ a coefficienti in K. Se P ha una soluzione in qualche campo L che estende K, allora ha soluzione in K.*

Dimostrazione. Ogni campo ha una chiusura algebrica. Quindi possiamo assumere L algebricamente chiuso. La formula $\exists \overline{x} P(\overline{x}) = 0$ è vera in L. Per la model completezza essa è vera anche nella sottostruttura K. □

La seguente forma del Nullstellensatz si deduce usando il "trucco di Rabinowitsch".

Corollario 10.11 (Hilbert's Nullstellensatz, seconda forma)**.** *Sia K un campo algebricamente chiuso. Se un polinomio $f \in K[\overline{x}]$ si annulla ogniqualvolta si annullano i polinomi $f_1, \dots, f_m$, allora qualche potenza di f è nell'ideale generato da $f_1, \dots, f_m$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi i polinomi $f_1, \dots, f_m, 1 - yf$ non hanno zeri comuni (dove y è una nuova variabile) nel campo K o equivalentemente, per la model completezza, in qualsiasi estensione L di K (se avessero zeri comuni in $L \supseteq K$ li avrebbero anche nella chiusura algebrica di L e per la model completezza di ACF anche in K). Per la prima forma del Nullstellensatz l'ideale I generato da questi polinomi è l'ideale unitario di $K[\overline{x}, y]$ (altrimenti, prendendo un ideale massimale $\mathfrak{m}$ che estende I, i suddetti polinomi avrebbero uno zero comune nell'estensione $K[\bar{x}, y]/\mathfrak{m}$ di K). Sostituendo $y = 1/f$ e liberandosi dai denominatori così introdotti si ottiene il risultato. □

Fatto 10.12. *Una teoria completa e ricorsivamente assiomatizzata è decidibile: esiste un algoritmo per stabilire se un enunciato è conseguenza della teoria.*

Dimostrazione. Si vedano gli appunti del mio corso di logica `http://www.dm.unipi.it/~berardu/Didattica/2013-14LM/Appunti-revised-v4.pdf`. In particolare il Corollario 16.9. □

Corollario 10.13. *Le teorie ACF_0 e ACF_p sono decidibili.*

Dimostrazione. Segue dal Fatto 10.12 oppure direttamente dalla dimostrazione costruttiva del teorema di eliminazione dei quantificatori, osservando che è banale verificare se una formula chiusa senza quantificatori valga nel sottocampo primo ($\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). $\square$

Esiste dunque un algoritmo per stabilire se un enunciato del primo ordine nel linguaggio degli anelli è vero in $\mathbb{C}$, o nella chiusura algebrica di un campo finito. La dimostrazione che passa per il Fatto 10.12 non fornisce stime sulla complessità dell'algoritmo, quella che passa per la dimostrazione costruttiva di EQ fornisce stime primitive ricorsive.

Esercizio 10.14. Dimostrare la decidibilità di ACF.

Esercizio 10.15. Tutti i modelli non numerabili di ACF_0 sono saturi. In particolare ACF_0 è $\aleph_1$-categorica (per l'unicità dei modelli saturi di una data cardinalità (Teorema 8.28)).

10.2 Teoria dei numeri reali

In questa sezione diamo un'assiomatizzazione della teoria completa $Th(\mathbb{R})$ del campo ordinato $(\mathbb{R}, <, 0, 1, +, \cdot)$ e mostriamo che essa ammette eliminazione dei quantificatori. A partire da questo risultato dimostriamo che ogni polinomio definito positivo $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}[\overline{x}]$ è somma di quadrati di funzioni razionali (teorema di Artin).

L'assiomatizzazione cercata per la teoria dei reali è la seguente:

Definizione 10.16. Sia $RCOF$ la teoria nel linguaggio $L = \{+, \cdot, 0, 1, \leq\}$ assiomatizzata da:

1. Gli assiomi dei campi ordinati;
2. Uno schema infinito di assiomi, uno per ogni grado $d \in \mathbb{N}$, che stabilisce che ogni polinomio di grado d a coefficienti nel campo, il quale assume valori positivi e negativi in un intervallo $[a, b]$, ha uno zero tra a e b.

Un campo ordinato si dice **reale chiuso** se verifica gli assiomi $RCOF$.

Dimostreremo che $RCOF$ è un'assiomatizzazione completa di $Th(\mathbb{R})$ e ammette eliminazione dei quantificatori. Diamo prima alcune conseguenze degli assiomi. Seguiremo la trattazione di [3].

Definizione 10.17. Dato un campo K e un sottoinsieme P di K, diremo che P è un **cono positivo** se sono verificate le seguenti condizioni: $-1 \notin P$; $x \in P$ o $-x \in P$ per ogni $x \in K \setminus \{0\}$; la somma e il prodotto di due elementi di P giace in P. Dato un tale cono, possiamo ordinare K stabilendo che $x < y$ se $y - x \in P$. Viceversa dato un ordine di campo su K, l'insieme degli elementi positivi di K è un cono positivo.

Lemma 10.18. *Sia $P(x) = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$ un polinomio monico su un campo ordinato K e sia z uno zero di $P(x)$. Allora $|z| \leq \max\{a_0, \ldots, a_{d-1}\} + 1$ (dove $|z|$ indica z o $-z$ a seconda che z sia positivo o negativo).*

Dimostrazione. Sia $m = \max\{a_0, \ldots, a_{d-1}\}$. Osserviamo che

$$|P(x) - x^d| \leq m(|x|^{d-1} + \ldots + 1) = m(|x|^d - 1)/(|x| - 1).$$

Se $P(z) = 0$ abbiamo dunque $|z^d| \leq m(|z|^d - 1)/(|z| - 1)$. Se $|z| > m + 1$, allora $m/(|z| - 1) < 1$ e otteniamo la contraddizione $|z^d| \leq |z^d| - 1$. $\square$

Lemma 10.19. *(Continuità dei polinomi) Sia K un campo ordinato e sia $P(x) \in K[x]$ un polinomio. Se $P(a) > 0$, allora esiste $\varepsilon > 0$ in K tale che $P(x)$ è sempre positivo nell'intervallo $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.*

Dimostrazione. Sia m il massimo dei valori assoluti dei coeffienti di $P(a + x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$. Se $|x| \leq 1$ abbiamo $|P(a+x) - P(x)| = |x||a_1 + a_2x + \ldots + a_d x^{d-1}| \leq |x|dm$. Sia $\varepsilon = \min\{1, \frac{P(a)}{dm}\}$. Se $|x| \leq \varepsilon$, abbiamo $|P(a + x) - P(a)| < |x|dm < P(a)$ e quindi $P(a + x) > 0$. $\square$

Definizione 10.20. Se K è un campo e $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i \in K[x]$, la **derivata** $P'(x)$ è definita in modo formale come il polinomio $\sum_{i=1}^{d} i a_i x^{i-1}$.

Lemma 10.21. *(Locale monotonia) Se K è un campo ordinato e $P(x) \in K[x]$ è tale che $P'(a) > 0$, allora esiste $\varepsilon > 0$ in K tale che $P(x) > P(a)$ se $a < x \leq a+\varepsilon$ e $P(x) < P(a)$ se $a - \varepsilon \leq x < a$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $P(a+x) - P(a)$ è divisibile per x, ovvero esiste un polinomio $G(x)$ tale che $G(x) = \frac{P(a+x)-P(a)}{x}$. Inoltre $G(0) = P'(0) > 0$. Per la continuità dei polinomi (Lemma 10.19) esiste $\varepsilon > 0$ in K tale che $G(x) > 0$ per $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Per definizione di $G(x)$, ciò significa che $P(a + x) - P(a)$ ha lo stesso segno di x se $0 \neq x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, che è quello che dovevamo dimostrare. $\square$

Lemma 10.22. *In un campo ordinato reale chiuso K, se $P(x) \in K[x]$ è un polinomio la cui derivata è strettamente positiva nell'intervallo $[a, b]$, allora $P(a) < P(b)$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi sulla derivata, dato $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, abbiamo $P(a) < P(a+\varepsilon)$ e $P(b-\varepsilon) < P(b)$. Supponendo per assurdo che $P(a) \geq P(b)$ ne segue che $P(a + \varepsilon) > P(b - \varepsilon)$. Possiamo supporre che $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. Siccome K è reale chiuso, $P(x)$ ha uno zero z_1 tra $a+\varepsilon$ e $b-\varepsilon$. Iterando la stessa costruzione troviamo un secondo zero z_2 tra $a + \varepsilon$ e z_1, poi un terzo zero z_3 tra $a + \varepsilon$ e z_3 e così via, contraddicendo il fatto che un polinomio in un qualsiasi campo ha un numero finito di zeri. $\square$

Theorem 10.23. *(Esistenza della chiusura reale) Ogni campo ordinato K si immerge in un campo ordinato reale chiuso.*

Dimostrazione. Se K non è già reale chiuso, esiste un polinomio che $P(x)$ e un intervallo $[a, b]$ tale che $P(x)$ cambia segno tra a e b senza avere uno zero in tale intervallo. Possiamo assumere che $P(x)$ sia di grado minimo d e che $P(a) < 0 < P(b)$. Essendo di grado minimo, $P(x)$ è irriducibile e l'anello quoziente $L := K[x]/P(x)$ è un campo. Prendendo il resto della divisione modulo $P(x)$, possiamo identificare L con l'insieme $K[x]^{<d}$ dei polinomi di grado minore di d, con l'addizione e la moltiplicazione modulo $P(x)$.

Vogliamo ordinare $L = K[x]^{<d}$ con un ordine che estende quello di K. A tal fine sia A l'insieme degli $x \leq b$ tali che $P(x) < 0$, e osserviamo che $\sup(A)$ non esiste, altrimenti per continuità $P(x)$ dovrebbe annullarsi su tale sup (Lemma 10.19) contraddicendo l'ipotesi che $P(x)$ non ha zeri tra a e b (e il fatto che se il sup esistesse giacerebbe in $[a, b]$). La coppia (A, B) costituita dall'insieme A e dal suo complemento B costituisce un "gap" a cui possiamo associare il tipo non realizzato $p(x)$ costituito dalle formule della forma $a' < x$ e $x < b'$ al variare di a' in A e b' in B. Osserviamo che $P(x)$ cambia segno intorno al tipo $p(x)$, ovvero cambia segno in ciascuno degli intervalli $[a', b']$ con $a' \in A$ e $b' \in B$.

Possiamo ordinare $K[x]^{<d}$ decretando che un polinomio $Q(x) \in K[x]^{d-1}$ è positivo o negativo a seconda dei valori che assume in un intorno sufficientemente piccolo del tipo $p(x)$. Più precisamente, scegliamo $a' \in A$ e $b' \in B$ in modo che $Q(x)$ non abbia zeri in $[a', b']$ (ciò è sempre possibile in quanto $Q(x)$ ha un numero finito di zeri) e osserviamo che $Q(x)$ assume segno costante in $[a', b']$ altrimenti verrebbe contraddetta la minimalità di d. Poniamo $Q(x) > 0$ se e solo se $Q(x)$ è positivo in $[a', b']$. Per mostrare che ciò costituisce un ordine di campo, l'unica verifica non banale da fare è che il prodotto modulo $P(x)$ di polinomi positivi sia positivo. Siano dunque Q_1 e Q_2 due polinomi positivi di $K[x]^{d-1}$ e sia $R(x) \in K[x]^{d-1}$ il loro prodotto modulo $P(x)$, ovvero $Q_1 \cdot Q_2 = P \cdot Q + R$ per qualche $Q \in K[x]$. Scegliamo $a' \in A$ e $b' \in B$ in modo tale che nessuno dei polinomi Q_1, Q_2, Q, R abbia zeri in $[a', b']$. Siccome questi quattro polinomi hanno grado $< d$, ciascuno di essi deve avere segno costante su $[a', b']$. D'altra parte, per come è stato scelto il gap, P non può avere segno costante su $[a', b']$, e dunque $P \cdot Q$ è negativo su almeno un punto c di $[a', b']$, mentre per ipotesi $Q_1 \cdot Q_2$ è positivo su tutto $[a', b']$. Dall'equazione $Q_1 \cdot Q_2 = P \cdot Q + R$ segue allora che R non può essere negativo su $[a', b']$ e pertanto è positivo su tale intervallo, come volevasi dimostrare.

Abbiamo dimostrato che se K non è reale chiuso, possiamo trovare una sua estensione algebrica $K[x]/P(x)$ con un ordine che estende quello di K. Fissiamo ora una chiusura algebrica $\bar{K}$ di K e sia $\alpha \in \bar{K}$ uno zero di $P(x)$. Osserviamo che $K[x]/P(x) \cong K(\alpha)$ e ordiniamo $K(\alpha)$ in modo che tale isomorfismo di campi diventi un isomorfismo d'ordine. Se $K(\alpha)$ non è reale chiuso, possiamo iterare il processo e trovare un'ulteriore estensione algebrica di $K(\alpha)$ entro $\bar{K}$ con un ordine che estende quello di $K(\alpha)$. Il lemma di Zorn ci garantisce che esiste un estensione algebrica massimale F di K entro $\bar{K}$ con un ordine che estende quello di K. Per le considerazioni appena fatte tale F deve essere reale chiuso altrimenti sarebbe ulteriormente estendibile. □

Fatto 10.24. *In un campo ordinato reale chiuso ogni polinomio si fattorizza in* *fattori lineari e quadratici.*

Theorem 10.25. *(Unicità della chiusura reale) Siano k_1 e k_2 due campi ordinati isomorfi immersi in campi ordinati reali chiusi K_1 e K_2 rispettivamente, e siano L_1 ed L_2 le chiusure algebriche relative di k_1 in K_1 e k_2 in L_2. Allora ogni isomorfismo di campi ordinati tra k_1 e k_2 si estende in modo unico ad un isomorfismo di campi ordinati $\hat{f}$ tra L_1 ed L_2.*

Dimostrazione. Si veda [3, Thm. 6.40]. Se $L_1 = k_1$ e $L_2 = k_2$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti per simmetria supponiamo che $L_1 \neq k_1$ e sia α un elemento di $L_1 \setminus k_1$ che verifica un polinomio $p_1(x) \in k_1[x]$ di grado minimo d. Per il Lemma 10.18 α è contenuto in un intervallo $[a, b]$ ad estremi in k_1. Per la minimalità di d, $p'(\alpha) \neq 0$ e tutti gli zeri di $p'(x)$ in K_1 devono appartenere a k_1. Essendo tali zeri in numero finito, possiamo allora trovare un intervallo $[a_1, b_1] \subseteq [a, b]$, sempre ad estremi in k_1, che contiene α e tale che $p'_1(x)$ non ha zeri in $[a_1, b_1]$. Poiché K_1 è reale chiuso, $p'_1(x)$ non può cambiare segno in $[a_1, b_1]$ e possiamo senza perdita di generalità assumere che $p'(x)$ sia strettamente positivo su tutto $[a_1, b_1]$. Per il Lemma 10.22 $p_1(x)$ è strettamente crescente su $[a_1, b_1]$, e dunque $p_1(a_1) < 0 = p(\alpha) < p_1(b_1)$.

L'isomorfismo $f : k_1 \to k_2$ induce un isomorfismo $f : k_1[x] \to k_2[x]$ ottenuto applicando f ai coefficienti. Sia $p_2(x) \in k_2[x]$ l'immagine di $p_1(x)$ tramite l'isomorfismo e siano a_2 e b_2 le immagini in k_2 di a_1 e b_1. Osserviamo che $p_2(x)$ cambia segno tra a_2 e b_2 ed essendo K_2 reale chiuso deve avere uno zero $\beta \in L_2$ in tale intervallo. Tale zero inoltre è unico in quanto $p_2(x)$ è strettamente crescente in $[a_2, b_2]$.

Dico che esiste un isomorfismo di campi ordinati $k_1(\alpha) \cong k_2(\beta)$ che estende f e manda α in β. A tal fine osserviamo innanzitutto che esiste un isomorfismo di campi $k_1(\alpha) \cong k_1[x]/p_1(x)$ che manda α nella classe di x modulo $p_1(x)$, e analogamente $k_2(\beta) \cong k_2[x]/p_2(x)$. Esiste inoltre un isomorfismo $k_1[x]/p_1(x) \cong k_2[x]/p_2(x)$ che manda $q_1(x) \mod p_1(x)$ in $q_2(x) \mod p_2(x)$, dove $q_2(x) \in k_2[x]$ è l'immagine di $q_1(x) \in k_1[x]$ tramite f. Componendo gli isomorfismi otteniamo un isomorfismo di campi $k_1(\alpha) \cong k_2(\beta)$ e resta solo da verificare che tale isomorfismo preserva l'ordine, ovvero che $q_1(\alpha) > 0$ se e solo se $q_2(\alpha) > 0$.

Considerando il resto modulo $p_1(x)$, possiamo assumere che $q_1(x)$ abbia grado minore di d. Ragionando come sopra, possiamo trovare un intervallo $[c_1, d_1]$ ad estremi in k_1 contenente α tale che $q_1(x)$ è strettamente positivo o strettamente negativo su tutto l'intervallo. Le corrispondenti proprietà varranno per $q_2(x)$ rispetto alle immagini di c_1 e d_1, da cui la tesi. □

Theorem 10.26. *La teoria RCOF dei campi ordinati reali chiusi ammette EQ (eliminazione dei quantificatori) nel linguaggio $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$.*

Dimostrazione. Siano K_1 ed K_2 due modelli ω-saturi di $RCOF$ e sia $f : dom(f) \to Im(f)$ un isomorfismo parziale finito da K_1 ad K_2. Sia $L_1 \subseteq K_1$ l'insieme degli elementi di K_1 algebrici sul sottocampo k_1 generato da $dom(f)$ e sia $L_2 \subseteq K_2$ l'insieme degli elementi di K_2 algebrici sul sottocampo k_2 generato da $Im(f)$.

Osserviamo che k_1 è della forma $\mathbb{Q}(a_1, \ldots, a_n)$ per certi $a_1, \ldots, a_n \in K_1$ e k_2 è della forma $\mathbb{Q}(b_1, \ldots, b_n)$ dove $b_i = f(a_i)$ per $i = 1, \ldots, n$. Per l'unicità della chiusura reale (Teorema 10.25) f si estende ad un isomorfismo di campi ordinati $f : L_1 \to L_2$. Per il Teorema 7.21 è sufficiente mostrare che, dato $c \in K_1$, è possibile estendere f ad un isomorfismo partiale il cui dominio include c. Dobbiamo dunque trovare un $d \in K_2$ e un isomorfismo di campi ordinati $k_1(c) \cong k_2(d)$. Se $c \in L_1$ basta prendere come d l'immagine di c tramite l'isomorfismo $f : L_1 \to L_2$. Se invece c non è algebrico su k_1, consideriamoriamo l'insieme $\Sigma(x)$ delle formule della forma $a' < x$ oppure $x < a''$, con $a', a'' \in k_1$, che sono verificate da $x = c$. Tale $\Sigma(x)$ è un tipo parziale realizzato da $x = c$. La sua immagine $\Sigma'(x)$ ottenuta rimpiazzando ogni a' con $b' = f(a')$ e ogni a'' con $b'' = f(a'')$ continua ad essere un tipo, ovvero ogni b' deve essere minore di ogni b''. A prima vista $\Sigma'(x)$ utilizza una quantità numerabile di parametri (la cardinalità di $\mathbb{Q}(b_1, \ldots, b_n)$), ma in effetti tali parametri sono tutti definibili a partire da $b_1, \ldots, b_n$ quindi $\Sigma'(x)$ equivale ad un tipo su $b_1, \ldots, b_n$ (volendo omettere questa verifica si può continuare assumendo che K_1, K_2 siano $\aleph_1$-saturi anziché ω-saturi). Per la ω-saturazione di K_2 esiste un $d \in K_2$ trascendente su k_2 che realizza $\Sigma'(x)$. Consideriamo l'isomorfismo di campi $\hat{f} : k_1(c) \to k_2(d)$ che estende f mandando c in d. Per concludere dobbiamo mostrare che $\hat{f}$ preserva l'ordine. Consideriamo dunque un polinomio $p_1(x) \in k_1[x]$ e supponiamo che $p_1(c) > 0$. Basta mostrare che $p_2(d) > 0$ dove $p_2(x)$ è l'immagine di $p_1(x)$ tramite f. Possiamo assumere che $p_1(x)$ sia irriducibile su k_1. Se $p_1(x)$ è di grado 1, poniamo $p_1(x) = x - a$, allora $p_1(x) > 0$ equivale a $x > a$, e siccome d realizza $\Sigma'(x)$ abbiamo $d > f(a)$, ovvero $p_2(d) > 0$. Se invece $p(x)$ è di grado maggiore di 1 (ed è quindi di grado 2), allora $p_1(x)$ non cambia segno in alcuna estensione ordinata di k_1 e lo stesso vale per $p_2(x)$, con lo stesso segno. □

Diamo una seconda dimostrazione dello stesso teorema che non usa la saturazione.

Theorem 10.27. *La teoria RCOF dei campi ordinati reali chiusi ammette EQ (eliminazione dei quantificatori) nel linguaggio* $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$.

Dimostrazione. Siano M_1 ed M_2 due modelli di $RCOF$ e sia $f : dom(f) \to Im(f)$ un isomorfismo parziale finito da M_1 ad M_2. Sia $\exists x \varphi(x, \overline{y})$ una L-formula primitiva e sia $\overline{b}$ una tupla da $dom(f)$. Supponiamo che $M_1 \models \exists x \varphi(x, \overline{b})$. Il nostro obiettivo è dimostrare che $M_2 \models \exists x \varphi(x, f\overline{b})$. Fatto ciò, in base al Teorema 7.17, possiamo concludere che $\exists x \varphi(x, \overline{y})$ equivale ad una formula senza quantificatori. Essendo $\exists x \varphi(x, \overline{y})$ una generica formula primitiva, ne segue che $RCOF$ ha EQ.

Per raggiungere il nostro scopo, sia $R_1 \subseteq M_1$ l'insieme degli elementi di M_1 algebrici su $dom(f)$ (o equivalentemente sul sottocampo generato da $dom(f)$) e sia $R_2 \subseteq M_2$ l'insieme degli elementi di M_2 algebrici su $Im(f)$. Per l'unicità della chiusura reale f si estende ad un isomorfismo $f : R_1 \to R_2$. Per semplificare la notazione possiamo assumere che $R = R_1 = R_2$ e che f sia la funzione identità su R. Poiché $x \neq y$ equivale a $x < y \vee y < x$, possiamo assumere (distribuendo

$\exists$ su $\vee$) che $\varphi(x, \overline{y})$ sia della forma

$$\bigwedge_i f_i(x, \overline{y}) = 0 \wedge \bigwedge_j g_j(x, \overline{y}) > 0$$

per certi polinomi $f_i, g_j \in \mathbb{Q}[x, \overline{y}]$.

Sia $a \in M_1$ tale che $M_1 \models \varphi(a, \overline{b})$. Se qualche $f_i(x, \overline{b})$ è diverso dal polinomio nullo, allora a è algebrico su R e dunque appartiene ad R stesso. Essendo R incluso in M_2 possiamo concludere che $M_2 \models \exists x \varphi(x, \overline{b})$ come desiderato (se non avessimo assunto che f è l'identità avremmo qui dovuto sostituire $\overline{b}$ con $f\overline{b}$ e i coefficienti dei vari polinomi con le loro immagini tramite f). Nel caso contrario $\varphi(x, \overline{b})$ equivale a

$$\bigwedge_j g_j(x, \overline{b}) > 0$$

Fattorizzando $g_j(x, \overline{b})$ in fattori lineari o quadratici in $R[x]$, e osservando che i fattori quadratici non cambiano segno, si verifica che la condizione $g_j(x, \overline{b}) > 0$ equivale ad un sistema di disuguaglianze della forma $c_i < x$ oppure $x < d_i$ dove gli elementi $c_i, d_i \in R$ sono le radici dei fattori lineari di g_j. Dunque in questo caso la $\varphi(x, \overline{b})$ equivale ad una formula della forma

$$\bigwedge_k (c_k < x) \wedge \bigwedge_i (x < d_i)$$

per certi $c_k, d_i \in R$, con la convenzione che se la congiunzione è vuota la formula equivalga a $\perp$ (una costante logica sempre falsa che aggiungiamo ai connettivi booleani). Poiché tali condizioni sono soddisfatte in M_1 dall'elemento $x = a$, ogni c_k deve essere minore di ciascun d_i. Prendendo come c il massimo dei c_k (o ponendo $c = -\infty$ se non vi sono c_k) e come d il minimo dei d_i (o ponendo $d = +\infty$ in loro assenza) abbiamo che $\varphi(x, \overline{b})$ equivale a

$$c < x < d.$$

Essendo $c < d$ esiste allora sicuramente un $a' \in M_2$ tale che $M_2 \models \varphi(a', \overline{b})$ e abbiamo la tesi desiderata. $\square$

Corollario 10.28. *Si ha:*

1. *RCOF è model completa.*
2. *RCOF è completa ed equivale alla teoria completa del campo ordinato* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Basta usare EQ e il fatto che tutti i modelli di *RCOF* hanno $\mathbb{Q}$ come sottostruttura comune a meno di isomorfismi. $\square$

Il seguente teorema fornisce una soluzione al diciassettesimo problema di Hilbert. La dimostrazione che passa per la model completezza è di A. Robinson.

Theorem 10.29 (Artin). *Ogni polinomio $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}[\overline{x}]$ definito positivo è somma di quadrati di funzioni razionali, ovvero possiamo scrivere*

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i(\overline{x})^2}{q_i(\overline{x})^2},$$

dove p_i, q_i sono polinomi. (Non è in generale possibile scrivere $f(\overline{x})$ come somma di quadrati di polinomi.)

Dimostrazione. Nel caso contrario si verifica (vedi Cor A7 in `http://homepages.math.uic.edu/~marker/orsay/real_algebra.pdf`) che possiamo estendere l'ordine di $\mathbb{R}$ ad un ordine sul campo $\mathbb{R}(\overline{x})$ in cui l'elemento $f(\overline{x}) \in \mathbb{R}[\overline{x}]$ è negativo. Sia K una chiusura reale di $\mathbb{R}(\overline{x})$. In K vale la formula $\exists \overline{y} f(\overline{y}) < 0$ (prendendo come $\overline{y}$ proprio $\overline{x}$). Per la model completezza di $RCOF$ tale formula vale anche in $\mathbb{R}$, contro le ipotesi. □

11 Chiusura algebrica e dimensione

11.1 Chiusura algebrica model teoretica

Diamo una generalizzazione model-teoretica della nozione di chiusura algebrica. Essa generalizza anche la nozione di dipendenza lineare negli spazi vettoriali.

Definizione 11.1. Sia M una L-struttura, e sia $A \subset dom(M)$. Diciamo che $b \in M$ è algebrico su A, $b \in \mathrm{acl}(A)$, se b appartiene ad un insieme finito A-definibile. Nel caso in cui l'insieme finito abbia cardinalità 1, ovvero contenga solo b, diremo che b è A-definibile e scriveremo $b \in \mathrm{dcl}(A)$.

Vedremo che se M è un campo algebricamente chiuso, $\mathrm{acl}(A)$ coincide con la chiusura algebrica di A nel senso della teoria dei campi. Una direzione è facile: la chiusura algebrica nel senso della teoria dei campi è contenuta nella chiusura algebrica nel senso model-teoretico. Basta osservare che il polinomio minimo di un elemento algebrico definisce un insieme finito F. L'altra direzione usa l'eliminazione dei quantificatori (si veda la Proposizione 11.9).

Esempio 11.2. Sia $\mathbb{C} = (\mathbb{C}; 0, 1, +, \cdot)$. Nella struttura $\mathbb{C}$, l'elemento $\sqrt{2}$ è algebrico sull'insieme vuoto ($\emptyset$-algebrico), in quanto appartiene all'insieme finito $\{x \in \mathbb{C} \mid x^2 = 1 + 1\}$. Tale elemento non è però $\emptyset$-definibile in quanto esistono automorfismi di $\mathbb{C}$ che mandano $\sqrt{2}$ in $-\sqrt{2}$ e quindi ogni insieme definibile contenente $\sqrt{2}$ deve contenere anche $-\sqrt{2}$.

Esempio 11.3. Sia $\mathbb{R} = (\mathbf{R}; 0, 1, +, \cdot)$. Nella struttura $\mathbb{R}$, l'elemento $\sqrt{2}$ è $\emptyset$-definibile. Infatti in $\mathbb{R}$ l'ordine è definibile ($x \geq 0 \iff \exists y (y^2 = x)$) e $\sqrt{2}$ può essere definito come l'unico elemento positivo il cui quadrato è due (nel nostro linguaggio 2 è definibile senza parametri come $1 + 1$).

Lemma 11.4. *Sia M una L-struttura. Per ogni $A \subseteq dom(M)$ si ha* $\mathrm{acl}(\mathrm{acl}(A)) = \mathrm{acl}(A)$.

Dimostrazione. Supponiamo che $c \in \operatorname{acl}(\operatorname{acl}(A))$. Dunque, esistono una L-formula $\varphi(x, \bar{y})$, dei parametri $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ in $\operatorname{acl}(A)$ ed $n \in \mathbb{N}$ tali che $M \models \varphi(c, \bar{b}) \wedge \exists^{\leq n} \varphi(x, \bar{b})$. Esistono inoltre $m \in \mathbb{N}$ e delle formule $\psi_i(x, \bar{a})$ con parametri $\bar{a} \subseteq A$ tali che $M \models \psi_1(b_1, \bar{a}) \wedge \ldots \wedge \psi_k(b_k, \bar{a})$ e ciascuna $\psi_i(x, \bar{a})$ definisce un insieme finito con al più m elementi. Per mostrare che $c \in \operatorname{acl}(A)$ basta osservare che c verifica la formula $\theta(x) := \exists \bar{y}(\varphi(x, \bar{y}) \wedge \exists^{\leq n} u \varphi(u, \bar{y}) \wedge \psi_1(y_1, \bar{a}) \wedge \ldots \wedge \psi_k(y_k, \bar{a}))$ e che $\theta(x)$ è soddisfatta da al più mn elementi. □

11.2 Chiusura definibile

Ricordiamo che $b \in \operatorname{dcl}(A)$ se b è l'unico elemento di un insieme definibile a parametri da A (11.1).

Proposizione 11.5. *In una L-struttura M con un ordine totale $\emptyset$-definibile $<$ (ad esempio nel campo dei numeri reali),* dcl *equivale ad* acl*.*

Dimostrazione. Dato un insieme finito $X \subseteq M$ definibile con parametri da $A \subseteq dom(M)$, tramite l'ordine possiamo dire chi è il suo primo punto, il secondo punto, eccetera; tutti i punti di X risulteranno quindi A-definibili. □

Proposizione 11.6. *In ogni struttura M, se $b \in \operatorname{dcl}(\bar{c}A)$, allora esiste una funzione A-definibile $f : M \to M$, possibilmente parziale, tale che $b = f(\bar{c})$. (Se L ha almeno un elemento $\emptyset$-definibile possiamo estendere qualsiasi funzione parziale ad una totale con gli stessi parametri.)*

Dimostrazione. Per ipotesi esiste una formula $\varphi(\bar{x}, y) \in L_A$ tale che b è l'unico elemento che verifica $\varphi(\bar{c}, y)$. Se per ogni $\bar{x}$ esistesse un unico y che verifica $\varphi(\bar{x}, y)$ potremmo prendere come f la funzione definita dalla φ, ma l'unicità della y è garantita solo per $\bar{x} = \bar{c}$. Per ricondurci al caso speciale basta sostituire φ con la formula $\varphi^*(\bar{x}, y)$ definita come $\varphi(\bar{x}, y) \wedge \exists! z \varphi(\bar{x}, z)$. □

11.3 Strutture fortemente minimali

Definizione 11.7. (Vedi [1] sezione 4.5) Sia M una L-struttura. M è **minimale** se ogni sottoinsieme definibile di M è finito o cofinito (cioè ha complemento finito). M è **fortemente minimale** se ogni struttura elementarmente equivalente è minimale. Più in generale, data una L-struttura M, diremo che un insieme M-definibile $X \subset M^n$ è minimale se ogni suo sottoinsieme M-definibile Y è finito o relativamente cofinito (ovvero $X - Y$ è finito).

Una formula $\varphi(\bar{x})$ con parametri da M è fortemente minimale se, in ogni estensione elementare N di M, l'insieme definito da $\varphi(\bar{x})$ in N è minimale.

Proposizione 11.8. *Un campo algebricamente chiuso M è fortemente minimale.*

Dimostrazione. Sia $X \subset M$ un sottoinsieme definibile. Dobbiamo mostrare che X è finito o cofinito. Per l'eliminazione dei quantificatori X è combinazione booleana di sottoinsiemi di M definiti da formule atomiche. Visto che la classe degli insiemi finiti o cofiniti è stabile per unioni finite, intersezioni finite e complementi, basta trattare il caso in cui X è definito da una formula atomica. Ma ogni formula atomica (con parametri da M) equivale ad un'equazione polinomiale $p(x) = 0$ con $p(x) \in M[x]$. Per concludere basta ricordare che un polinomio non banale ha un numero finito di zeri. $\square$

Proposizione 11.9. *In un campo algebricamente chiuso M la chiusura algebrica di $A \subset dom(M)$ nel senso model-teoretico coincide con la chiusura algebrica nel senso algebrico.*

Dimostrazione. Mostriamo il verso non banale. Sia $a \in \mathrm{acl}(A)$ nel senso model-teoretico. Quindi $a \in X$ per un certo X finito ed A-definibile. Come nella dimostrazione della Proposizione 11.8, X è una combinazione booleana di insiemi della forma $X_p = \{x \mid p(x) = 0\}$ con $p(x) \in M[x]$. Equivalentemente, considerando la forma normale disgiuntiva, $X = \bigcup_i \bigcap_j Y_{ij}$ dove i, j variano su un insieme finito di indici e ogni Y_{ij} è della forma X_p o $\neg X_p := \{x \mid p(x) \neq 0\}$. Fissiamo un i tale che $a \in \bigcap_j Y_{ij}$. Almeno uno degli Y_{ij} deve ssere finito, altrimenti X sarebbe infinito. Un tale Y_{ij} deve avere la forma X_p per qualche $p(x) \in M[x]$ non identicamente nullo. Per le nostre scelte, $p(a) = 0$, dunque a è algebrico nel senso della teoria dei campi. $\square$

Il seguente risultato generalizza il "Lemma dello scambio di Steinitz".

Lemma 11.10. *Sia M minimale. Siano $a, b \in M, A \subseteq dom(M)$. Se $a \in \mathrm{acl}(b, A)$ e $a \notin \mathrm{acl}(A)$, allora $b \in \mathrm{acl}(a, A)$.*

Dimostrazione. (Vedi [1, Lemma 4.5.2]) Non è restrittivo supporre $A = \emptyset$ in quanto il caso generale segue aggiungendo ad L una costante per ogni elemento di A. Sia $a \in \mathrm{acl}(b) \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ e supponiamo per assurdo che $b \notin \mathrm{acl}(a)$ (osserviamo che M deve essere infinito altrimenti tutto sarebbe algebrico su tutto). Poiché $a \in \mathrm{acl}(b)$, esistono una L-formula $\phi(x, y)$ e un numero naturale n tali che $M \models \phi(a, b) \wedge \exists^{\leq n} \phi(x, b)$. Dato che $b \notin \mathrm{acl}(a)$, l'insieme $\left\{b' \in M : M \models \phi(a, b') \wedge \exists^{\leq n} x \phi(x, b')\right\}$ è infinito e dunque il suo complementare ha cardinalità finita $l < \aleph_0$ (essendo M minimale). Infine, da $a \notin \mathrm{acl}(\emptyset)$ segue che l'insieme $\left\{a' \in M : M \models \exists^{\leq l} y \neg(\phi(a', y) \wedge \exists^{\leq n} x \phi(x, y))\right\}$ è infinito. Quindi possiamo trovare al suo interno $n + 1$ elementi distinti $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Per ciascun a_i esistono al più l elementi che testimoniano il quantificatore $\exists^{\leq l}$ nella formula, e siccome M è infinito esiste un $b' \in M$ tale che $M \models \phi(a_1, b') \wedge \ldots \wedge \phi(a_{n+1}, b') \wedge \exists^{\leq n} \phi(x, b')$, che è ovviamente un assurdo. $\square$

Lemma 11.11. *Sia N fortemente minimale. Due elementi $a, b \in N$ non-algebrici su $A \subset dom(N)$ hanno lo stesso tipo su A.*

Dimostrazione. Sia $X \subset N$ un insieme definibile su A. Dobbiamo mostrare che $a \in X$ se e solo se $b \in X$. In caso contrario uno dei due appartiene ad X e l'altro no. Ma X o il suo complemento è finito. Quindi uno dei due è algebrico su A. $\square$

11.4 Strutture o-minimali

Definizione 11.12. Sia M una struttura ordinata, ovvero una L-struttura il cui linguaggio comprende un simbolo $<$ che viene intepretato in M come un ordine totale. Diciamo che M è **o-minimale** se ogni insieme definibile $X \subseteq M$ è unione finita di intervalli (a, b), con $a, b \in M \cup \{\pm\infty\}$, e punti.

Proposizione 11.13. *Il campo dei numeri reali, e più in generale ogni campo reale chiuso M, è o-minimale.*

Dimostrazione. Sia $p(x) \in M[x]$. Gli insiemi $\{x \in M : p(x) = 0\}$ e $\{x \in M : p(x) > 0\}$ sono unioni finite di intervalli e punti. Ogni formula senza quantificatori (a parametri da M) equivale ad una combinazione booleana di formule del tipo $p(x) = 0$ o $p(x) > 0$ e quindi definisce una unione finita di intervalli e punti. Per l'eliminazione dei quantificatori ciò continua a valere per tutte le formule. $\square$

Theorem 11.14 (Vedi [4])**.** *Se M è o-minimale e $f : M \to M$ è definibile, allora esistono un numero finito di punti $a_0 < a_1 < \ldots < a_k$ in M tali che f è continua in ogni intervallo aperto (a_i, a_{i+1}), $(-\infty, a_0)$, $(a_k, +\infty)$ delimitato da tali punti, ed è inoltre strettamente crescente, strettamente decrescente, o costante, in ciascuno di detti intervalli. Se inoltre f è definibile su $A \subseteq dom(M)$, allora i punti a_i sono definibili su A.*

Corollario 11.15. *Sia M o-minimale. Siano $a, b \in M, A \subseteq dom(M)$. Se $a \in \mathrm{acl}(b, A)$ e $a \notin \mathrm{acl}(A)$, allora $b \in \mathrm{acl}(a, A)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $b \in \mathrm{acl}(Aa)$ e $b \notin \mathrm{acl}(A)$. Dobbiamo mostrare che $a \in \mathrm{acl}(Ab)$. In una struttura ordinata, acl coincide con dcl. Quindi esiste una funzione A-definibile $f : M \to M$ tale che $b = f(a)$ (possiamo supporre f totale estendendola opportunamente in modo costante senza usare altri parametri). Poiché $b \notin \mathrm{acl}(A)$, b giace all'interno di uno degli intervalli A-definabili sui quali f è strettamente monotona. Ne segue che $a = g(b)$ dove g è l'inversa di f in tale intervallo. Abbiamo così dimostrato che $a \in \mathrm{acl}(Ab)$. $\square$

11.5 Strutture pregeometriche e dimensione

Definizione 11.16. Una struttura M è detta **pregeometrica** se, dati $a, b \in M$ e $A \subseteq dom(M)$ vale le seguente **proprietà dello scambio**. Se $a \in \mathrm{acl}(b, A)$ e $a \notin \mathrm{acl}(A)$, allora $b \in \mathrm{acl}(a, A)$. Diciamo che M è **geometrica** se ogni $N \equiv M$ è pregeometrica.

Abbiamo visto che le strutture minimali e o-minimali sono pregeometriche (Lemma 11.10).

Definizione 11.17. Sia N pregeometrica e siano $a_1, \ldots, a_n \in N$. Un sottoinsieme X di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ è detto **generante** se la sua chiusura algebrica contiene tutti gli a_i, ed è detto **algebricamente indipendente** se ciascun elemento di X non è algebrico sugli altri elementi di X. Infine X è detto una **base** se è sia generante che algebricamente indipendente.

Theorem 11.18. *1. Tutte le basi di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ hanno la stessa cardinalità.*

2. Ogni insieme indipendente massimale è una base.

3. Ogni insieme generante minimale è una base.

Analoghe conclusioni valgono rimpiazzando in tutte le definizioni "algebrico" con "algebrico su P", dove $P \subset dom(N)$ è un insieme di parametri (basta aggiungere costanti al linguaggio per gli elementi di P per ricondursi al caso $P = \emptyset$). Scriviamo $\mathrm{acl}_P(A)$ per $\mathrm{acl}(A \cup P)$.

Dimostrazione. (1) Per il primo punto basta mostrare che se $\{c_1, \ldots, c_l\} \subseteq acl_P(b_1, \ldots, b_k)$ e $c_1, \ldots, c_l$ sono algebricamente indipendenti su P, allora $l \leq k$. Se $l = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti consideriamo un sottoinsieme minimale B di $\{b_1, \ldots, b_k\}$ tale che $c_l \in acl_P(B)$. Chiaramente B è non-vuoto perché c_l non è algebrico (su P). Riordinando gli indici possiamo assumere che il sottoinsieme contenga b_k, e quindi sia della forma $B' \cup \{b_k\}$, con c_l non-algebrico su B'. Per la proprietà dello scambio b_k è algebrico su c_l, B'. Quindi $\mathrm{acl}(b_1, b_2, \ldots, b_k) = \mathrm{acl}(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, c_l)$. Ponendo $P' = P \cup \{c_l\}$ abbiamo che $\{c_1, \ldots, c_{l-1}\} \subseteq acl_{P'}(b_1, \ldots, b_{k-1})$ e $c_1, \ldots, c_{l-1}$ sono algebricamente indipendenti su P'. Per induzione $l-1 \leq k-1$ e quindi $l \leq k$. (Lo stesso ragionamento mostra che possiamo espandere l'insieme $\{c_1, \ldots, c_l\}$ ad un insieme generante aggiungendogli $k - l$ elementi presi da $\{b_1, \ldots, b_k\}$.)

(2) Dato un sottoinsieme algebricamente indipendente massimale X di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ (rispetto a acl_P) dobbiamo mostrare che è generante. Se così non fosse ci sarebbe un a_i non contenuto in $acl_P(X)$. Ma allora $X \cup \{a_i\}$ sarebbe indipendente su P (verificare), contraddicendo la massimalità .

Il punto (3) segue banalmente dalle definizioni. □

Definizione 11.19. Definiamo $\dim(a_1, \ldots, a_n/B)$, dove $B \subset dom(N)$, come la cardinalità di una base di $\{a_1, \ldots, a_n\}$ rispetto a acl_B.

Proposizione 11.20. $\dim(a_1, \ldots, a_n/B)$ *dipende solo dal tipo di* $(a_1, \ldots, a_n)$ *su* B.

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che $a \notin \mathrm{acl}(B)$ equivale alla congiunzione infinita di tutte le formule della forma $\neg\varphi(x, \overline{b})$ dove $\overline{b} \subseteq B$ e $\varphi(x, \overline{b})$ è una formula algebrica (ovvero con un numero finito di realizzazioni x). Questo dimostra il caso $n = 1$. Il caso $n > 1$ segue facilmente per induzione. □

Lemma 11.21. *Sia M una struttura pregeometrica ω-satura e siano $A \subseteq B \subseteq dom(M)$ insiemi finiti di parametri. Data una n-upla $\overline{a}$ di elementi di M esiste una n-upla $\overline{b}$ che ha lo stesso tipo di $\overline{a}$ su A e tale che* $\dim(\overline{b}/B) = \dim(\overline{a}/A)$.

Dimostrazione. Possiamo assumere che i primi $m \leq n$ elementi della n-upla $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ siano algebricamente indipendenti su A e gli altri siano algebricamente dipendenti da essi su A. Per induzione su $i \leq m$ si mostra che esistono $b_1, \ldots, b_i$ algebricamente indipendenti su B che realizzano il tipo di $(a_1, \ldots, a_i)$

su A. Queste condizioni sono esprimibili da un tipo parziale $p_i(x_1, \dots, x_i)$ (ovvero da un insieme di formule finitamente soddisfacibili) a parametri da B. Per la ω-saturazione possiamo induttivamente realizzare questi tipi in M. $\square$

Definizione 11.22. Data una struttura pregeometrica ω-satura M e un insieme A-definibile $X \subset M^n$ (con A finito) definiamo la dimensione di X, $\dim(X)$, come la massima dimensione su A delle n-uple prese da X.

Si osservi che se X è A-definibile è anche B-definibile per ogni $B \supseteq A$. Il Lemma 11.21 mostra che $\dim(X)$ non dipende dalla scelta dell'insieme A dei parametri su cui X è definito.

11.6 Proprietà della dimensione

Lavoriamo in una struttura geometrica M.

Lemma 11.23. *Se $a_1, \dots, a_n$ sono algebricamente indipendenti su $A \subseteq dom(M)$ e $b \notin \mathrm{acl}(a_1, \dots, a_n/A)$, allora $a_1, \dots, a_n, b$ sono algebricamente indipendenti su A.*

Dimostrazione. Per semplicità suppongo $A = \emptyset$ (possiamo ricondurci a questo caso aggiungendo al linguaggio simboli di constante per gli elementi di A). Se $a_1, \dots, a_n, b$ non fossero indipendenti, qualche a_i sarebbe algebrico su b e gli altri a_j, e per la proprietà dello scambio b sarebbe algebrico sugli a_i, contro l'ipotesi. $\square$

Proposizione 11.24. *Sia a un elemento di M e $\bar{b}$ una n-upla di elementi. Allora $\dim(a\bar{b}/A) = \dim(a/\bar{b}A) + \dim(\bar{b}/A)$.*

Dimostrazione. Per semplicità assumo $A = \emptyset$. Vogliamo dimostrare che $\dim(a\bar{b}) = \dim(a/\bar{b}) + \dim(\bar{b})$. Sia $\bar{b}' \subseteq \bar{b}$ una base di $\bar{b}$, ovvero un sottoinsieme minimale tale che $\mathrm{acl}(\bar{b}') = \mathrm{acl}(\bar{b})$. Se $a \in \mathrm{acl}(\bar{b})$, allora $\dim(a/\bar{b}) = 0$ e $\dim(a\bar{b}) = \dim(\bar{b})$, e l'equazione è verificata. Se $a \notin \mathrm{acl}(\bar{b}) = \mathrm{acl}(\bar{b}')$ allora $\dim(a\bar{b}) = \dim(a\bar{b}') = 1 + \dim(\bar{b}') = \dim(a/\bar{b}) + \dim(\bar{b}') = \dim(a/\bar{b}) + \dim(\bar{b})$. $\square$

Corollario 11.25. *La stessa formula si generalizza ad m-uple $\bar{a}$, ovvero* $\dim(\bar{a}\bar{b}/A) = \dim(\bar{a}/\bar{b}A) + \dim(\bar{b}/A)$.

Dimostrazione. Consideriamo ad esempio il caso $\bar{a} = a_1a_2$. Abbiamo $\dim(a_1a_2\bar{b}/A) = \dim(a_1/a_2\bar{b}A) + \dim(a_2\bar{b}/A)$. Applicando di nuovo la formula abbiamo $\dim(a_2\bar{b}/A) = \dim(a_2/\bar{b}A) + \dim(\bar{b}/A)$. Inoltre $\dim(a_1/a_2\bar{b}A) + \dim(a_2/\bar{b}A) = \dim(a_1a_2/\bar{b})$, e combinando le uguaglianze otteniamo il risultato voluto. $\square$

Theorem 11.26. *Sia $f : X \to Y$ è una funzione surgettiva A-definibile tra insiemi A-definibili X, Y (ciascuno sottoinsieme di M^n per qualche n). Supponiamo che esista $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ abbia dimensione k. Allora* $\dim(X) = \dim(Y) + k$.

Dimostrazione. Non distinguiamo notazionalmente tra singoli elementi ed n-uple.

Sia $b \in Y$ un elemento generico di Y, ovvero tale che $\dim(Y) = \dim(b/A)$. Sia a un elemento generico di $f^{-1}(b)$, ovvero tale che $k = \dim(f^{-1}(b)) = \dim(a/Ab)$. Poiché $b = f(a) \in \mathrm{acl}(aA)$, abbiamo $\dim(a/A) = \dim(ab/A) = \dim(a/bA) + \dim(b/A) = k + \dim(Y)$. Poiché $a \in X$, ne segue che $\dim(X) \geq k + \dim(Y)$.

Per la disuguaglianza opposta sia a un elemento generico di X, ovvero $\dim(X) = \dim(a/A)$ e sia $b = f(a)$. Ragionando come sopra, $\dim(a/A) = \dim(ab/A) = \dim(a/bA) + \dim(b/A) \leq k + \dim(Y)$ e quindi $\dim(X) \leq k + \dim(Y)$. $\square$

Corollario 11.27. *Se $f : X \to Y$ è una bigezione definibile,* $\dim(X) = \dim(Y)$.

12 Rango di Morley

Si veda la sezione 5.6 in [1] oppure la Definizione 2.1 in [2].

Definizione 12.1. Sia M una L-struttura e sia $X \subset M^n$ un insieme definibile in M (con parametri). Dato un ordinale α definiamo la relazione $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha$ per induzione su α come segue:

1. $\mathrm{RCantor}(X) \geq 0$ se X è non vuoto.
2. Se λ è un ordinale limite, $\mathrm{RCantor}(X) \geq \lambda$ se $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha$ per ogni $\alpha < \lambda$.
3. $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha+1$ se esistono insiemi definibili disgiunti $X_i \subset X$ $(i < \omega)$ a parametri in M tali che $\mathrm{RCantor}(X_i) \geq \alpha$ per ogni $i < \omega$.

Definiamo $\mathrm{RCantor}(X) = \alpha$ se $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha$ e $\mathrm{RCantor}(X) \not\geq \alpha + 1$. Se $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbf{On}$ scriviamo $\mathrm{RCantor}(X) = \infty$.

Chiaramente $X \subset Y$ implica $\mathrm{RCantor}(X) \leq \mathrm{RCantor}(Y)$ (induzione). Inoltre si ha:

Lemma 12.2. $\mathrm{RCantor}(X \cup Y) = \max\{\mathrm{RCantor}(X), \mathrm{RCantor}(Y)\}$.

Dimostrazione. Basta mostrare per induzione su α che se $\mathrm{RCantor}(X \cup Y) \geq \alpha$, allora $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha$ o $\mathrm{RCantor}(Y) \geq \alpha$. Il caso α limite è banale. Consideriamo il caso $\alpha = \beta + 1$. Per definizione $X \cup Y$ contiene infiniti sottoinsiemi definibili disgiunti Z_i $(i < \omega)$ con $\mathrm{RCantor}(Z_i) \geq \beta$. Per l'ipotesi induttiva, abbiamo che $\mathrm{RCantor}(Z_i \cap X) \geq \beta$ o $\mathrm{RCantor}(Z_i \cap Y) \geq \beta$. Rimpiazzando Z_i con $Z_i \cap X$ o con $Z_i \cap Y$ possiamo assumere che ciascun Z_i sia contenuto in X o in Y. Ma allora uno tra X e Y contiene infiniti Z_i, da cui la tesi. $\square$

Proposizione 12.3. *Ogni insieme X di* $\mathrm{RCantor}(X) = \alpha$ *è l'unione disgiunta di un numero finito di insiemi "minimali" di* $\mathrm{RCantor} = \alpha$*, dove un insieme è detto minimale di rango α se non è l'unione di due insiemi disgiunti di rango α.*

Dimostrazione. Se α non è minimale lo posso partizionare in due insiemi $X_1 \cup Y_1$ di rango α. Almeno uno dei due, diciamo X_1, non è minimale, e lo posso quindi a sua volta spezzare in due insiemi $X_2 \cup Y_2$ di rango α. Iterando costruisco $X_{n+1} = X_n \cup Y_n$ con X_n, Y_n disgiunti di rango α. Gli Y_n sono inclusi in X e disgiunti, quindi X dovrebbe avere rango $\geq \alpha + 1$. Assurdo. $\square$

Corollario 12.4. *La terza clausola nella definizione di* RCantor *equivale a:* $\mathrm{RCantor}(X) \geq \alpha + 1$ *se per ogni $n < \omega$ esistono n insiemi definibili disgiunti $X_i \subset X$ $(i < n)$ tali che* $\mathrm{RCantor}(X_i) \geq \alpha$ *per ogni $i < n$.*

Definizione 12.5. Se $\phi(x, a)$ è una formula con parametri a da M, e $N \succeq M$, definiamo $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$ come il rango di Cantor-Bendixon dell'insieme definito da $\phi(x, a)$ in N.

Lemma 12.6. *Se $M \preceq N$, allora* $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) \leq \mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$.

Dimostrazione. Nella terza clausola della definizione del rango, gli insiemi X_i sono definibili da formule con parametri, e quindi è più facile trovarli in N (avendo a disposizione più parametri) piuttosto che in M. $\square$

Se M è ω-satura, il rango non cambia passando ad un'estensione elementare di M. Inoltre il rango dipende solo dal tipo dei parametri. Più precisamente:

Proposizione 12.7. *Consideriamo una estensione elementare $N \succeq M$ con M ω-satura. Sia $\phi(x, a)$ una formula con parametri $a = (a_1, \ldots, a_k) \in M^k$ e variabili libere $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sia $b \in N^k$ una k-upla con lo stesso tipo di a (in particolare possiamo prendere $b = a$). Allora* $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) \geq \mathrm{RCantor}_N(\phi(x, b))$.

Dimostrazione. Basta mostrare per induzione su β che $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, b)) \geq \beta$ implica $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) \geq \beta$. Il caso β limite è immediato. Assumiamo $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, b)) \geq \alpha + 1$. Dato $m \in \omega$ esistono allora m insiemi disgiunti, definiti da formule $\theta_i(x, c_i)$ con parametri $c_i \in N^{k_i}$ $(i < m)$, tali che $\mathrm{RCantor}_N(\theta_i(x, c_i)) \geq \alpha$ e $\{x \mid \theta_i(x, c_i)\} \subset \{x \mid \phi(x, b)\}$ (in N). Siccome M è ω-saturo esistono parametri d_i da M tali che $(M, a, d_i)_{i<m} \equiv (N, b, c_i)_{i<m}$. Ne segue che le formule $\theta_i(x, d_i)$ $(i < m)$ definiscono insiemi disgiunti in M inclusi in $\{x \in M \mid \phi(x, a)\}$. Per induzione $\mathrm{RCantor}_M(\theta(x, d_i)) \geq \alpha$ per ogni $i < m$. Visto che $m \in \omega$ è arbitrariamente grande, $\mathrm{RCantor}_M(\theta(x, a)) \geq \alpha + 1$. $\square$

Corollario 12.8. *Se $N \succeq M$ ed M è ω-satura, allora per ogni formula $\phi(x, a)$ con parametri da M,* $\mathrm{RCantor}_M(\phi(x, a)) = \mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$

Definizione 12.9. Sia $\phi(x, a)$ una formula con parametri da una struttura M. Il rango di Morley $\mathrm{RM}(\phi(x, a))$ è definito come $\mathrm{RCantor}_N(\phi(x, a))$ per qualche $N \succeq M$ ω-satura.

Per dimostrare che la definizione è ben posta, occorre verificare che se prendiamo due estensioni elementari di M, entrambe ω-sature, il rango calcolato in una di esse coincide con il rango calcolato nell'altra. A tal fine basta usare il lemma di amalgamazione (Lemma 2.27) per immergere entrambe in un'estensione elementare comune.

Proposizione 12.10. *Data una teoria T completa esiste un cardinale α_T tale che per ogni formula $\varphi(x,a)$ con parametri in un modello di M si ha $RM(\varphi(x,a)) \geq \alpha_T \iff RM(\varphi(x,a)) = \infty$.*

Dimostrazione. I modelli di una teoria non sono un insieme, ma i possibili tipi su $\emptyset$ lo sono. Una funzione da un insieme agli ordinali è limitata, e siccome il rango dipende solo dal tipo dei parametri abbiamo la tesi. $\square$

Corollario 12.11. *Ogni formula di $RM = \infty$ è l'unione disgiunta di due formule di $RM = \infty$.*

Definizione 12.12. Una teoria è **totalmente trascendente** se e solo se, in ogni modello, non vi sono alberi binari infiniti di insiemi definibili. Ciò equivale a dire che il rango di ogni formula con parametri in un modello di T è $< \infty$.

Definizione 12.13. Sia $\phi(x,a)$ una formula con parametri da M di rango di Morley α. Il grado di Morley di $\phi(x,a)$ è definito come il massimo intero k tale che l'insieme definito da $\phi(x,a)$ (in un'estensione ω-satura di M) ammette k sottoinsiemi definibili disgiunti di rango α.

Esercizio 12.14. Sia $X \subset N^k$ un insieme definibile in una struttura fortemente minimale N. Allora $\dim(X) \geq r+1$ se e solo se esistono sottoinsiemi definibili $X_i \subset X$ $(i < \omega)$ disgiunti, tali che $\dim(X_i) \geq r$ per ogni $i < \omega$.

Theorem 12.15. *Sia N fortemente minimale. Sia $X \subset N^n$ un insieme definibile. Allora $RM(X) = \dim(X)$.*

Dimostrazione. Vedi Lemma 2.6 in [2]. $\square$

13 Modelli primi

Definizione 13.1. Data una teoria completa T un modello M di T si dice **primo** se si immerge elementarmente in ogni altro modello. Se M è una struttura, diciamo che M è un modello primo se è un modello primo della sua propria teoria completa. Diciamo che M è primo su $A \subseteq dom(M)$, se la L_A-struttura M_A è un modello primo sulla sua teoria completa $Th(M_A)$.

Osserviamo che se $f: M \to N$ è un'immersione elementare e $a \in M$ realizza un tipo $p(x)$ allora $fa \in N$ realizza lo stesso tipo. Quindi un modello primo di T realizza solamente i tipi che sono realizzati in tutti i modelli. Esempio: la chiusura algebrica dei numeri razionali è un modello primo della teoria dei campi algebricamente chiusi.

13.1 Modelli di termini

Lemma 13.2. *Sia T una L teoria e sia $C \subset L$ un insieme di simboli di costante. Supponiamo che:*

1. *T è coerente e completa.*

2. *Se $T \models \exists x\phi(x)$, allora $T \models \phi(c)$ per qualche $c \in C$.*

Allora T ha un modello M tale che ogni elemento del dominio di M è l'interpretazione di qualche termine costante $c \in C$.

Dimostrazione. Sia N un modello di T e sia $M \subset dom(N)$ il sottoinsieme di N consistente delle interpretazioni delle costanti di C. Dato un termine chiuso t di L, chiaramente $T \models \exists x(x = t)$, e per ipotesi esiste una costante $c \in C$ tale che $T \models c = t$. Quindi M coincide con l'insieme delle interpretazioni dei termini chiusi, e pertanto è (il dominio di) una sottostruttura di N. Basta verificare che M è una sottostruttura elementare di N. A tal fine applichiamo il criterio di Tarski-Vaught. Supponiamo dunque che $N \models \exists x\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ con $a_1, \ldots, a_n \in M$. Dobbiamo verificare che esiste $b \in M$ con $N \models \phi(b, a_1, \ldots, a_n)$. Per definizione di M, ciascun a_i è della forma ${c_i}^N$ per qualche $c_i \in C$. La L-formula chiusa $\exists x\phi(x, c_1, \ldots, c_n)$ è vera in N, e siccome T è completa, essa è dimostrabile in T. Per le ipotesi su T esiste $c_0 \in C$ tale che $T \models \phi(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. Ma allora possiamo prendere come b l'interpretazione di c_0 in N. □

13.2 Omissione di tipi

Definizione 13.3. Sia T una teoria, e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo completo di T. Diciamo che $\Sigma(x)$ è principale, se esiste una formula $\theta(x)$ tale che $T, \theta(x)$ è coerente e dimostra tutte le formule di $\Sigma(x)$. (Si noti che $\theta(x)$ appartiene necessariemente a $\Sigma(x)$ altrimenti per completezza vi apparterrebbe la sua negazione e avremmo $T, \theta(x) \models \neg\theta(x)$ contraddicendo la coerenza di $T, \theta(x)$.)

Possiamo dare l'analoga definizione per teorie e tipi non completi:

Definizione 13.4. Sia T una teoria coerente, e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo (possibilmente parziale) di T. Diciamo che $\Sigma(x)$ è finitamente supportato, se esiste una formula $\theta(x)$ tale che $T, \theta(x)$ è coerente e dimostra tutte le formule di $\Sigma(x)$. (Non richiediamo che $\theta(x)$ appartenga a $\Sigma(x)$.)

Definizione 13.5. Un tipo $p(x)$ è **omesso** in una struttura M se non è realizzato in M.

Theorem 13.6. *Sia T una teoria coerente in un linguaggio L numerabile, sia $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e sia $\Sigma(x)$ un n-tipo (parziale) di T non finitamente supportato. Allora T ha un modello che omette $\Sigma(x)$.*

Dimostrazione. Consideriamo per semplicitità il caso $n = 1$. Sia $C = \{c_i \mid i < \omega\}$ un insieme numerabile di nuove costanti non in L. Sia $(\sigma_i \mid i < \omega)$ una enumerazione di tutte le $L \cup C$-formule chiuse. Definiremo una successione di $L \cup C$-teorie coerenti $T = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ tale che ogni S_i sia un'estensione finita di T e, ponendo $S = \bigcup_n S_n$, si abbia:

1. S è completa.

2. Se $\exists x\phi(x) \in S$, allora $\phi(c) \in S$ per qualche $c \in C$.

3. Per ogni $c \in C$ esiste $\delta(x) \in \Sigma(x)$ con $\neg\delta(c) \in S$.

Le prime due proprietà implicano che S ha un modello M in cui ogni elemento è l'interpretazione di qualche costante c_i. La terza proprietà garantisce che M omette $\Sigma(x)$ (in quanto nessun $c \in C$ realizza $\Sigma(x)$).

Supponendo di aver già definito S_n definiamo delle nuove teorie $S_n \subset S_n{}' \subset S_n{}'' \subset S_{n+1}$ come segue. Consideriamo la n-esima formula σ dell'enumerazione. Se $S_n \cup \{\sigma\}$ è coerente poniamo $S_n{}' = S_n \cup \{\sigma\}$, altrimenti $S_n{}' = S_n \cup \{\neg\sigma\}$. Se inoltre σ è della forma $\exists x \phi(x)$ poniamo $S_n{}'' = S_n{}' \cup \{\exists x \varphi(x) \to \phi(c)\}$ dove $c \in C$ è una costante non ancora adoperata. Assumendo induttivamente che S_n sia coerente, anche $S_n{}'$ ed $S_n{}''$ lo sono. Inoltre se S_n è un'estensione finita di T, anche $S_n{}''$ lo è. Quindi esiste una $L \cup C$-formula $\psi(c_1, \dots, c_k)$ (che non contiene altre costanti di C oltre quelle esplicitate) tale che $S_n{}'' \equiv T \cup \{\psi(c_1, \dots, c_k)\}$. Consideriamo la costante $c_n \in C$. Siccome $\Sigma(x)$ non è finitamente supportato, $T, \psi(c_1, \dots, c_k)$ non può dimostrare tutte le formule di $\Sigma(c_n)$ (supponiamo ad esempio che $k = 2$ e $T, \psi(c_1, c_2) \models \Sigma(c_2)$; allora $\Sigma(x)$ sarebbe supportato da $\exists y \psi(y, x)$). Quindi esiste una formula $\delta(x) \in \Sigma(x)$ tale che $S_{n+1} = S_n{}'' \cup \neg\delta(c_n)$ è coerente. La costruzione delle S_n è completata e per costruzione $S = \bigcup_n S_n$ ha le proprietà richieste. □

Similmente si dimostra:

Theorem 13.7. *Sia T una teoria coerente in un linguaggio L numerabile, e sia $\Sigma_m(x_1, \dots, x_{k_m})$ una famiglia numerabile di tipi (parziali) non finitamente supportati. Allora T ha un modello che omette ciascun Σ_m.*

13.3 Topologia sullo spazio dei tipi

Definizione 13.8. Sia $S_n(T)$ l'insieme degli n-tipi completi $p(x)$ di T (dove $x = (x_1, \dots, x_n)$). Mettiamo una topologia su $S_n(T)$ come segue. Data una formula $\phi(x)$, sia $[\phi(x)]$ l'insieme dei tipi che contengono $\phi(x)$. Diciamo che $[\phi(x)]$ è aperto base. Gli aperti sono unioni di aperti base. Notiamo che $[\phi(x)]$ è clopen, in quanto il suo complemento è $[\neg\phi(x)]$.

Theorem 13.9. *$S_n(T)$ è uno spazio topologico compatto di Hausdorff con una base di clopen.*

Dimostrazione. Dati due tipi distinti $p, q \in S_n(T)$ esiste una formula $\phi(x)$ che sta in uno dei due tipi e non nell'altro. Gli aperti $[\phi(x)]$ e $[\neg\phi(x)]$ separano p da q. Quindi $S_n(T)$ è Hausdorff. Mostriamo che è compatto. Poiché ogni aperto è unione di aperti base, basta mostrare che ogni famiglia di aperti base $[\phi_i(x)]$ $(i \in I)$ che ricopre $S_n(T)$ ha un sottoricoprimento finito. Osserviamo che il complemento di $[\phi_i(x)]$ è $[\neg\phi_i(x)]$, che è ancora un aperto (e chiuso) base. Passando ai complementi basta quindi dimostrare che se l'intersezione $\bigcap_i [\neg\varphi_i(x)]$ è vuota, allora una sottointersezione finita è vuota. Poiché un tipo $p(x)$ appartiene a $\bigcap_i [\neg\varphi_i(x)]$ se e solo se contiene tutte le formule $\neg\phi_i(x)$, se tale tipo non esiste (ovvero l'intersezione è vuota) vuol dire che l'insieme $\{\neg\phi_i(x) : i \in I\}$ è incoerente (in quanto ogni insieme coerente di formule si estende ad un tipo). Per il teorema di compattezza ne segue che un suo sottoinsieme finito è incoerente, e dunque l'intersezione dei corrispondenti $[\neg\phi_i(x)]$ è vuota. $\square$

Esercizio 13.10. Un tipo $p(x) \in S_n(T)$ è principale se e solo se è isolato, ovvero se esiste $\phi(x)$ tale che $p(x)$ è l'unico tipo di $[\phi(x)]$.

Definizione 13.11. Fissata una teoria coerente T, diciamo che una formula $\phi(x)$ è completa se $T, \phi(x)$ è una $L \cup \{x\}$ teoria completa. Ciò equivale a dire che $[\phi(x)] \subset S_n(T)$ contiene un solo tipo, isolato da $\phi(x)$.

13.4 Modelli atomici

In questa sezione definiamo i modelli atomici. Mostriamo che (per T completa numerabile) i modelli atomici numerabili coincidono con i modelli primi, dimostriamo l'unicità dei modelli atomici numerabili, e caratterizziamo le teorie che hanno un modello atomico.

Definizione 13.12. Una struttura M è atomica se ogni n-upla di M realizza un tipo isolato di $T = Th(M)$. Equivalentemente M è atomica se ogni n-upla di M verifica una formula completa $\phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Osservazione 13.13. Se $\varphi(x, y)$ isola il tipo di $(a, \bar{b})$ sull'insieme vuoto di parametri, allora $\varphi(x, \bar{b})$ isola il tipo di a su $\bar{b}$. Quindi in una struttura atomica tutti i tipi di elementi su un insieme finito di parametri sono isolati.

Lemma 13.14. *Sia* $(M, a_1, \ldots, a_n) \equiv (N, b_1, \ldots, b_n)$ *e sia* $c \in M$*. Se il tipo di* c *su* $a_1, \ldots, a_n$ *è isolato, esiste* $d \in N$ *tale che* $(M, a_1, \ldots, a_n, c) \equiv (N, b_1, \ldots, b_n, d)$.

Dimostrazione. Sia $\Sigma(x, a_1, \ldots, a_n)$ il tipo di c su $a_1, \ldots, a_n$ in M, e sia $\phi(x, a_1, \ldots, a_n)$ la formula che lo isola. Allora $\Sigma(x, b_1, \ldots, b_n)$ è un tipo in $(N, b_1, \ldots, b_n)$ (verificate!), che è isolato da $\phi(x, b_1, \ldots, b_n)$. I tipi isolati (in una teoria completa) sono sempre realizzati, quindi esiste $d \in N$ c realizza $\Sigma(x, b_1, \ldots, b_n)$, da cui la tesi. $\square$

Corollario 13.15. *Due modelli atomici numerabili* M, N *di una teoria completa* T *sono isomorfi.*

Dimostrazione. Per il Lemma precedente, la famiglia delle mappe elementari finite da M a N ha la proprietà del va e vieni, e possiamo dunque applicare il Teorema 7.8. Si noti che la famiglia è non vuota in quanto contiene la funzione vuota (essendo $M \equiv N$). $\square$

Lo stesso ragionamento, facendo solo il "va" e non il "vieni", mostra:

Corollario 13.16. *Data una teoria completa, un modello atomico numerabile è primo.*

Per teorie numerabili vale anche il viceversa:

Corollario 13.17. *Sia T una teoria completa numerabile e sia M un modello primo. Allora M è sia atomico che numerabile.*

Dimostrazione. M è numerabile per Löwenheim Skolem, ed è atomico perché ogni tipo non-principale $p(x)$ viene omesso in qualche modello N (omissione dei tipi) e quindi anche necessariamente nel modello primo M (in quanto i tipi realizzati in una struttura sono necessariamente realizzati in tutti i modelli in cui quella struttura si immerge elementarmente). □

Dunque per teorie complete numerabili i modelli primi sono esattamente i modelli atomici numerabili, e questi ultimi sono tutti isomorfi.

Studiamo ora le teorie numerabili che hanno un modello primo.

Theorem 13.18. *Sia T una teoria completa numerabile. Sono equivalenti:*

1. *T ha un modello atomico;*
2. *T ha un modello atomico finito o numerabile;*
3. *per ogni n gli n-tipi isolati di T sono densi nello spazio dei tipi $S_n(T)$.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra (1) e (2) segue dai teoremi di Löwenheim-Skolem.

($3 \to 1$) Assumiamo la densità dei tipi isolati. Ciò significa che ogni formula è implicata, in T, da una formula completa. Ne segue che l'insieme $\Sigma_n(x)$ consistente delle negazioni delle formule complete in $x = (x_1, \dots, x_n)$ non può essere implicato da una singola formula (altrimenti sarebbe anche implicato da una formula completa, ma ciò è impossibile visto che la negazione della formula appartiene a $\Sigma(x)$). Per il teorema di omissione dei tipi esiste dunque un modello che omette $\Sigma_n(x)$ per ogni n (questo vale a maggior ragione se $\Sigma_n(x)$ non è un tipo, ovvero è incoerente). Ora basta osservare che una struttura M è atomica se e se e solo se M omette, per ogni n, l'insieme $\Sigma_n(x)$. Infatti, dato $a \in M$, abbiamo che a omette $\Sigma_n(x)$ se e solo se esiste $\sigma(x) \in \Sigma_n(x)$ tale che a non realizza $\sigma(x)$, ma per definizione di $\Sigma_n(x)$ la negazione di $\sigma(x)$ è una formula completa ed essendo realizzata da a ne testimonia l'atomicità.

($1 \to 3$) Viceversa supponiamo che T abbia un modello atomico M. Data una formula $\phi(x)$ coerente con T vogliamo dimostrare che essa è implicata (in T) da una formula completa. Abbiamo $T \models \exists x \phi(x)$. Quindi esiste $a \in M$ tale che $M \models \phi(a)$. Il tipo $p(x)$ di a è isolato (in quanto M è atomica) e contiene $\phi(x)$. Abbiamo così dimostrato che ogni aperto base $[\phi(x)]$ dello spazio dei tipi contiene un tipo isolato, ovvero i tipi isolati sono densi. □

Una condizione sufficiente per la densità dei tipi isolati è la seguente.

Lemma 13.19. *Supponiamo che T abbia al più una quantità numerabile di n-tipi. Allora gli n-tipi isolati di T sono densi in $S_n(T)$.*

Dimostrazione. Questo è un fatto puramente topologico. In uno spazio di Hausdorff compatto e numerabile (quale assumiamo sia $S_n(T)$) i punti isolati sono densi. Diamo comunque la dimostrazione nel nostro caso particolare. Dato un aperto base $[\phi(x)]$ di $S_n(T)$, supponendo che non contenga punti isolati, possiamo ovviamente trovare due aperti non-vuoti e disgiunti $[\phi_1(x)] \subset [\phi(x)]$ e $[\phi_2(x)] \subset [\phi(x)]$. Iterando la costruzione possiamo costruire un albero binario completo di formule, ciascuna delle quali implica quelle più in alto nell'albero (cioè più vicine alla radice) ed è incompatibile con quelle al suo stesso livello nell'albero. Prendendo i rami massimali dell'albero, otteniamo $2^{\aleph_0}$ tipi distinti contro le ipotesi. $\square$

13.5 Teorie ω-categoriche

Diamo una caratterizzazione delle teorie ω-categoriche. Un esempio è la teoria degli ordini densi senza estremi.

Lemma 13.20. *Sono equivalenti:*

1. *Ogni tipo di $S_n(T)$ è isolato.*
2. *$S_n(T)$ è finito.*

Dimostrazione. 1) $\to$ 2): Se tutti i tipi sono isolati, $S_n(T) = \bigcup_{p \in S_n(T)} \{p\}$ è un ricoprimento aperto di $S_n(T)$. Per compattezza esiste un sottoricoprimento finito.

2) $\to$ 1): Poiché $S_n(T)$ è di Hausdorff i suoi punti sono chiusi. Quindi se $S_n(T)$ è finito ogni sottoinsieme di $S_n(T)$ è chiuso. Passando ai complementi, ogni sottoinsieme di $S_n(T)$ è aperto. In particolare ogni punto è aperto, e quindi isolato. $\square$

Theorem 13.21. *Sia T una teoria completa in un linguaggio numerabile. Allora T è $\aleph_0$-categorica se e solo se tutti i modelli sono atomici, o equivalentemente, per ogni n, ogni n-tipo è isolato.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia $\aleph_0$-categorica. Dobbiamo mostrare che ogni tipo $p(x) \in S_n(T)$ è isolato. Per assurdo sia $p(x) \in S_n(T)$ non isolato. Per il teorema di omissione di tipi esiste un modello $M \models T$ che omette $p(x)$, che possiamo prendere numerabile essendo il linguaggio di T numerabile. D'altra parte, come qualsiasi altro tipo, $p(x)$ deve essere realizzato in qualche modello numerabile $N \models T$. Chiaramente M non è isomorfo ad N e T non è $\aleph_0$-categorica.

Viceversa supponiamo che tutti gli n-tipi di T sono isolati. Da ciò segue che tutti i modelli sono atomici. Per l'unicità dei modelli atomici numerabili ciò implica che T è $\aleph_0$-categorica. $\square$

13.6 Modelli costruibili

Definizione 13.22. Sia M una struttura e A un sottoinsieme di M. Diciamo che M è costruibile su A se possiamo scrivere M nella forma $A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ per qualche ordinale γ, in modo che il tipo di ciascun b_β su $B_\beta := A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$ sia isolato.

Theorem 13.23. *Se M è costruibile su A, allora M è primo su A.*

Dimostrazione. Sia $M = A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ una costruzione di M e sia N un modello di $Th(M, a)_{a \in A}$. Dunque esiste una mappa elementare $f : A \to N$ e per mostrare che M è primo dobbiamo cercare di estenderla ad una immesione elementare da M ad N. A tal fine definiamo induttivamente una successione di mappe elementari $f_\beta : B_\beta \to N$, dove $B_\beta := A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$, come segue. Per iniziare poniamo $f_0 = f$. Se β è limite possiamo definire f_β come l'unione delle f_i con $i < \beta$ (osservando che l'unione crescente di mappe elementari è elementare). Per finire sia $\beta = \alpha + 1$. Per ipotesi induttiva $f_\alpha : B_\alpha \to N$ è elementare. Per definizione $B_\beta = B_\alpha \cup \{b_\alpha\}$ e per l'ipotesi di costruibilità il tipo $p(x)$ di b_α su B_α è isolato. Sia $q(x) = (f_\alpha p)(x)$ l'immagine di $p(x)$ tramite f_α, ovvero l'insieme di formule che si ottiene rimpiazzando, nelle formule di $p(x)$, ogni parametro con la sua immagine tramite f_α. Poiché f_α è elementare, è facile verificare che $q(x)$ è un tipo di N, ovvero è finitamente soddisfacibile in N. Inoltre, essendo l'immagine di un tipo isolato tramite una mappa elementare, $q(x)$ è un tipo isolato di N (a parametri da $C_\alpha := f_\alpha(B_\alpha)$). I tipi isolati sono sempre realizzati, quindi esiste un $c_\alpha \in N$ che realizza $q(x)$. Possiamo ora estendere f_α ad una mappa $f_{\alpha+1} : B_\alpha \cup \{b_\alpha\} \to N$ che manda b_α in c_α ed osservare che tale mappa continua ad essere elementare. L'unione delle f_β è l'immersione elementare cercata da M ad N. □

Dimostriamo ora che i modelli costruibili sono atomici.

Definizione 13.24. Sia M una struttura e A un sottoinsieme di M. Diciamo che una n-upla b da M è atomica su A se il suo tipo su A è isolato. Diciamo che un insieme $B \subseteq M$ è atomico su A se ogni sua n-upla è atomica su A. Se $B = M$ diremo che M è un modello atomico su A.

Lemma 13.25. *Siano $A \subseteq B \subseteq C$ sottoinsiemi di un modello di T. Se C è atomico su B e B è atomico su A, allora C è atomico su A.*

Dimostrazione. Data una n-upla c da C, sia $\varphi(x, b)$ la formula che isola il suo tipo su B (dove b è una tupla di parametri da B) e sia $\psi(y)$ la formula che isola il tipo di b su A. Allora $\exists y(\psi(y) \land \varphi(x, y))$ isola il tipo di c su A. Infatti, data una L-formula $\theta(x)$ realizzata da c, essa è implicata da $\varphi(x, b)$ per ipotesi, il che è come dire che la formula $\forall x(\varphi(x, y) \to \theta(x))$ appartiene al tipo di b, e pertanto è implicata da $\psi(y)$. Ne segue che $\exists y(\psi(y) \land \varphi(x, y))$ implica $\theta(x)$. □

Lemma 13.26. *Se M è costruibile su A, allora è atomico su A.*

Dimostrazione. Sia $A_\alpha = A \cup \{b_i : i < \alpha\}$. Mostro per induzione su α che il tipo su A di ogni n-upla di elementi di A_α è isolato, ovvero l'insieme A_α è atomico su A. Questo è chiaro se α è limite. Consideriamo $A_{\alpha+1} = A_\alpha \cup \{b_\alpha\}$. Per definizione il tipo di b_α su A_α è isolato. Ne segue che $b_\alpha \cup A_\alpha$ è atomico su A_α, ovvero il tipo di ogni n-upla da $b_\alpha \cup A_\alpha$ è isolato su A_α. Per induzione possiamo assumere che A_α sia isolato su A. Per transitività di "atomico su" (Lemma 13.25), concludiamo che $A_{\alpha+1}$ è isolato su A. □

Theorem 13.27. *Sia T una teoria totalmente trascendente e sia M un modello di T. Allora per ogni sottoinsieme $A \subseteq M$ esiste $N \prec M$ contenente A e costruibile su A.*

Dimostrazione. Se A è il dominio di una sottostruttura elementare di M non c'è nulla da dimostrare. Altrimenti esiste una formula $\phi(x)$ con parametri da A tale che $M \models \exists x \phi(x)$ ma $M \not\models \phi(a)$ per ogni $a \in A$. Scelgo una tale $\phi(x)$ di minimo rango di Morley e, a parità di rango, di minimo grado. Dico che $\phi(x)$ isola un 1-tipo completo di $Th(M, a)_{a \in A}$. Infatti se così non fosse esisterebbe una formula $\psi(x) \in L_A$ tale che $\psi(x) \wedge \phi(x)$ e $\neg\psi(x) \wedge \phi(x)$ siano entrambe coerenti con $Th(M, a)_{a \in A}$, contraddicendo la minimalità di $\phi(x)$. Ne segue che, se b_0 verifica $\phi(x)$, il tipo di b_0 su A è isolato. Inoltre per la scelta di $\phi(x)$, b_0 non appartiene ad A. Poniamo ora $A' = A \cup \{b_0\}$ e ripetiamo la costruzione con A' al posto di A. In questo modo otteniamo una successione strettamente crescente di insiemi $A_0 = A$, $A_{\alpha+1} = {A_\alpha}'$ prendendo l'unione $A_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} A_\alpha$ ai passi limite. Ad un certo punto dovremo necessariamente fermarci (essendo M un insieme) ottendo una sottostruttura elementare $N = A_\alpha$ di M costruibile su A. □

14 Indiscernibili

Dato un insieme X, sia $[X]^n$ l'insieme dei sottoinsiemi di X di cardinalità n. Dato $k \in \omega$, una k-colorazione di $[X]^n$ è una funzione $c\colon [X]^n \to k$. Osserviamo che un grafo su un insieme X di vertici può essere visto come una 2-colorazione di $[X]^2$ (assegno colore 1 agli archi del grafo).

Theorem 14.1. *(Ramsey) Sia X un insieme infinito numerabile e siano $k, n < \omega$. Data una k-colorazione $c\colon [X]^n \to k$, esiste un sottoinsieme infinito Y di X tale che $[Y]^n$ è monocromatico (ovvero c è costante su di esso).*

Dimostrazione. Il caso $n = 1$ è banale. Sia $n > 1$ e supponiamo che il teorema valga per $n - 1$. Per ogni $a \in X$ definiamo $c_a\colon [X \setminus \{a\}]^{n-1} \to k$ ponendo $c_a(\{x_1, \dots, x_{n-1}\}) = c(\{a, x_1, \dots, x_{n-1}\})$. Fissiamo $a_0 \in X$. Per ipotesi induttiva esiste un insieme monocromatico infinito $A_0 \subseteq X \setminus \{a_0\}$ per c_{a_0}. Supponendo di aver definito a_n e un sottoinsieme monocromatico infinito A_n per c_{a_n}, scegliamo un nuovo elemento $a_{n+1} \in A_n$ e sia $A_{n+1} \subseteq A_n \setminus \{a_{n+1}\}$ un sottoinsieme monocromatico infinito per $c_{a_{n+1}}$. Per costruzione per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un colore k_n tale che $c(S \cup \{a_n\}) = k_n$ se $S \subseteq A_n$. Siccome i colori sono in numero finito, esiste un colore r e un sottoinsieme infinito J di $\mathbb{N}$ tale che $k_n = r$ per ogni

$n \in J$. Per costruzione $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ e $a_n \in A_n$. Dico che $\{a_j : j \in J\}$ è monocromatico per c. Difatti dati $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ in J, gli elementi $a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}$ appartengono ad A_{j_1} e pertanto $c(\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_n}\}) = k_{j_1} = r$. $\square$

Definizione 14.2. Sia M una L-struttura e sia $(b_i : i \in I)$ una famiglia di elementi distinti di M indiciata da un insieme totalmente ordinato $(I, <)$. Diciamo che $(b_i : i \in I)$ è indiscernibile se per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i_1 < \ldots < i_n$ in I, il tipo di $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})$ non dipende dalla scelta degli indici $i_1, \ldots, i_n$ (ovvero coincide con il tipo di $(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ per ogni altra n-upla crescente $j_1 < \ldots < j_n$). Similmente definiamo la nozione di famiglia indiscernibile su un insieme $A \subset M$ di parametri, considerando i tipi su A.

Theorem 14.3. *Data una teoria completa T con modelli infiniti e un ordine totale $(I, <)$, esiste un modello di T con una famiglia $(c_i : i \in I)$ di indiscernibili indiciata da I.*

Dimostrazione. Trattiamo prima il caso $I = \omega$, con l'usuale ordine. L'indiscernibilità di $(b_i : i \in I)$ può essere espressa da una infinità di assiomi della forma $\phi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) \iff \phi(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ (*) dove $i_1 < \ldots < i_n$ e $j_1 < \ldots < j_n$ variano in I, $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ varia tra le L-formule, e i b_i sono simboli di costante. Per compattezza basta dimostrare che, dato un insieme finito $\Delta(x_1, \ldots, x_n)$ di formule in $x_1, \ldots, x_n$, esiste un modello M con una famiglia "Δ-indiscernibile", ovvero una famiglia che verifica (*) per le formule ϕ in Δ. A tal fine prendiamo un modello qualsiasi M di T e fissiamo una successione $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi di M. Coloriamo le n-uple $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ con $2^{|\Delta|}$ colori, dove i colori sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di Δ e codificano quali delle formule di Δ sono soddisfatte dalla n-upla. Per il teorema di Ramsey esiste una sottosuccessione infinita degli $(a_i)_i$ tale che la colorazione è costante sulle n-uple crescenti di elementi della sottosuccessione, ovvero la sottosuccessione è Δ-indiscernibile. Il caso $I = \omega$ è così dimostrato.

Il caso in cui $(I, <)$ è un arbitrario ordine totale segue per compattezza. Dato un modello M di T con una famiglia di indiscernibili $(b_n : n < \omega)$ (la cui esistenza è garantita dal caso $I = \omega$), introduciamo nuove costanti c_i $(i \in I)$ con degli assiomi che esprimono la loro indiscernibilità. Questi assiomi sono coerenti con T in quanto ogni loro sottoinsieme finito ha come modello un'espansione di M in cui ciascuno dei c_i che intervengono è intepretato con un opportuno b_{n_i} (basta che $i \mapsto n_i$ preservi l'ordine e lo possiamo fare perché abbiamo un numero finito di c_i). $\square$

La seguente osservazione sarà utile per il teorema di Morley.

Osservazione 14.4. Nella dimostrazione di cui sopra possiamo anche mettere tra gli assiomi tutte le formule della forma $\varphi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ dove $i_1 < \ldots < i_n$ e $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ appartiene al tipo di $(b_1, \ldots, b_n)$ in M. In tal modo la conclusione del teorema si rafforza, stabilendo un legame tra i tipi delle n-uple dei c_j e quelli delle n-uple dei b_i.

15 Teorie stabili

Proposizione 15.1. *Sia A un insieme di parametri in un modello M e sia $q(\overline{y}) \in S_n(A)$ un n-tipo su A realizzato da $\overline{b} \in M$. La mappa $p(x, \overline{y}) \mapsto p(x, \overline{b})$ è una bigezione tra gli $n+1$-tipi $p(x, \overline{y}) \in S_{n+1}(A)$ che includono $q(\overline{y})$ e gli 1-tipi in $S_1(\overline{b}A)$.*

Definizione 15.2. Una teoria T è **κ-stabile** se per ogni insieme A di parametri in un modello di T con $|A| \leq \kappa$, l'insieme degli 1-tipi $S_1(A)$ ha cardinalità $\leq \kappa$. Per la proposizione precedente ciò equivale a richiedere che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme degli n-tipi in $S_n(A)$ abbia cardinalità $\leq \kappa$.

Lemma 15.3. *Se T è ω-stabile allora è totalmente trascendente.*

Dimostrazione. Se T non è totalmente trascendente esiste un modello M con un albero binario infinito di insiemi definibili non vuoti. I parametri che intervengono nelle formule corrispondenti formano un insieme numerabile $A \subseteq M$ e ogni ramo nell'albero fornisce un tipo su A. Vi sono dunque almeno $2^{\aleph_0}$ tipi sull'insieme numerabile A, contraddicendo la ω-stabilità. □

Lemma 15.4. *Se T è totalmente trascendente e il linguaggio è numerabile allora T è λ-stabile per ogni $\lambda \geq \aleph_0$.*

Dimostrazione. Se T è totalmente trascendente, ogni tipo $p(x)$ con parametri A presi da $M \models T$ è determinato dalla formula $\phi_p(x)$ di minimo rango e grado presente nel tipo. Infatti una formula di L_A appartiene a $p(x)$ se e solo se in congiunzione con $\phi_p(x)$ non abbassa il rango o, a paritàdi rango, il grado. Siccome ci sono al più $|L_A|$ formule con parametri da $A \subseteq dom(M)$, ci sono al più $|L_A|$ tipi su quei parametri. Essendo L numerabile, ne segue che T è λ-stabile. □

Theorem 15.5. *Sia $\kappa \geq |L|$ e sia T una teoria completa κ-stabile. Allora, per ogni cardinale regolare $\lambda \leq \kappa$, T ha un modello λ-saturo di cardinalità κ. In particolare se κ è regolare, T ha un modello saturo di cardinalità κ.*

Dimostrazione. Sia M_0 un modello di T di cardinalità κ. Costruiamo una catena elementare di modelli $(M_i : i < \lambda)$ in modo che $M_{\alpha+1}$ realizzi tutti gli 1-tipi su M_α. Se M_α ha cardinalità κ possiamo mantenere $M_{\alpha+1}$ di cardinalità κ in quanto, per la κ-stabilità, i tipi da realizzare sono al più κ. L'unione $M = \bigcup_{i<\lambda} M_i$ della catena ha cardinalità κ. Per mostrare che M è λ-saturo consideriamo un insieme $A \subset M$ di parametri di cardinalità $< \lambda$ e sia $p(x)$ un tipo su A. Siccome λ è regolare, $A \subset M_\alpha$ per qualche $\alpha < \lambda$. Per costruzione $p(x)$ è realizzato in $M_{\alpha+1}$ e quindi in M. □

Theorem 15.6. *Sia T una teoria numerabile completa ω-stabile. Sia $M \models T$ tale che $|M| \geq \aleph_1$ e sia $C \subseteq M$ un insieme di parametri di cardinalità $< |M|$. Allora M contiene una successione non costante $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi indiscernibili su C.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che C sia infinito. Sia $\lambda = |C|$. Siccome $|M| > \lambda$, la formula $x = x$ è soddisfatta da $> \lambda$ elementi di M. Sia $\alpha \in \mathbf{On}$ minimo tale che esista una formula $\varphi(x)$ su C di rango α che sia soddisfatta da $> \lambda$ elementi di M. Scegliamo inoltre $\varphi(x)$ in modo che abbia minimo grado di Morley, diciamo d. (Il rango di un tipo è il minimo rango delle sue formule e il grado è il minimo grado delle formule del tipo di rango massimo). Possiamo costruire per induzione una successione $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi di M che verificano $\varphi(x)$ e tale che il rango di Morley di $tp(a_k/C \cup \{a_i : i < k\})$ sia α e il grado sia d. Per trovare a_0 basta osservare che ci sono $> \lambda$ elementi che realizzano $\varphi(x)$, mentre ciascuna delle formule di grado-rango minore di (α, d) è verificata da al più λ elementi, e vi sono al più λ formule in L_C. Similmente si trovano $a_1, a_2, \ldots$. La successione così definita è indiscernibile, ovvero per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni successione crescente di indici $i_0 < \ldots < i_k$ il tipo di $(a_{i_0}, \ldots, a_{i_k})$ su C è uguale al tipo di $(a_0, \ldots, a_k)$ su C. Lo dimostro per induzione su k. Supponiamo che l'asserto valga per un dato k e dimostriamolo per $k+1$. Una formula $\psi(x, a_{i_0}, \ldots, a_{i_k})$ appartiene al tipo di $a_{i_{k+1}}$ se e solo se, in congiunzione con $\varphi(x)$, ha coppia rango-grado uguale ad (α, d). Siccome ranghi e gradi dipendono solo dal tipo dei parametri, questo avviene se e solo se $\psi(x, a_0, \ldots, a_k) \wedge \varphi(x)$ ha coppia rango-grado uguale a (α, d), ovvero $\psi(x, a_0, \ldots, a_k)$ appartiene al tipo di a_{k+1} su $C \cup \{a_0, \ldots, a_k\}$. $\square$

16 Teorema di Morley

Il seguente lemma fornisce modelli arbitrariamente grandi che realizzano pochi tipi sugli insiemi numerabili di parametri.

Lemma 16.1 (Lachlan)**.** *Data una teoria numerabile T con modelli infiniti ed un cardinale $\kappa \geq \aleph_1$, esiste un modello $M \models T$ di cardinalità κ che realizza, per ogni sottoinsieme numerabile A di M, al più $\aleph_0$ 1-tipi su A.*

Dimostrazione. Possiamo assumere che T sia skolemizzata, ovvero per ogni formula $\phi(\bar{x}, y)$ esista una funzione definibile f_ϕ tale che T dimostri $(\forall \bar{x} y)(\phi(\bar{x}, y) \to \phi(\bar{x}, f_\phi(x)))$ (possiamo infatti ricondurci a questo caso aggiungendo simboli di costante f_ϕ e osservando che l'introduzione di assiomi della forma $\phi(\bar{x}, y) \to \phi(\bar{x}, f_\phi(x))$ preserva la coerenza). Fatta questa riduzione ne segue che T è model completa, ovvero ogni immersione tra modelli di T è un'immersione elementare. Ne segue anche (per il test di Tarski-Vaught) che dato un modello M di T e un sottoinsieme A di M, la chiusura definibile di A in M è una sottostruttura elementare.

Assumendo dunque che T sia skolemizzata procediamo come segue. Sia N un modello di T con una successione indiscernibile $(b_i : i < \kappa)$ (Teorema 14.3). Sia $M \prec N$ la chiusura definibile di $B = \{b_i : i < \kappa\}$. Ogni elemento c di M è della forma $c = f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ per qualche funzione $\emptyset$-definibile f e qualche n-upla da B. Poiché il linguaggio di T è numerabile, $|M| = \kappa$. Dato un sottoinsieme numerabile A di M, dobbiamo mostrare che M realizza al più $\aleph_0$ 1-tipi su A. Osserviamo che A è incluso nella chiusura definibile di un sottonsieme numerabile $B_0 = \{b_i : i \in I\}$ di $B = \{b_i : i < \kappa\}$. Dato $c \in M$, scriviamo $c = f(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})$ come sopra e sia $J = \{j_1, \ldots, j_n\} \subset \kappa$. Per l'indiscernibilità, il tipo di c su A dipende solo dalla scelta di f ($\aleph_0$ possibilità) e da come gli elementi di J sono situati tra gli elementi di I, ovvero dal tipo di isomorfismo di $(J, J \cup I, <)$ (verificate!). Siccome I è numerabile e bene ordinato (essendo incluso in κ) e J è finito, ci sono solo $\aleph_0$ possibilità (basta specificare per ogni $j \in J$ il minimo elemento di I maggiore di j). $\square$

Theorem 16.2. *Sia T una teoria numerabile κ-categorica, $k \geq \aleph_1$. Allora T è ω-stabile.*

Dimostrazione. Se no sia M un modello che ha più di $\aleph_0$ tipi su un insieme numerabile $A \subset M$ di parametri. Posso realizzare $\aleph_1$ di questi tipi in un'estensione elementare N di M, e per i teoremi di Löwenheim-Skolem posso prendere M di cardinalità $\leq \kappa$ ed N di cardinalità κ. D'altra parte per il Lemma 16.1 esiste anche un modello N' di cardinalità κ che realizza solo $\aleph_0$ tipi su ogni insieme numerabile di parametri. Chiaramente N non è isomorfo ad N', contraddicendo la κ-categoricità. $\square$

Theorem 16.3. *Sia $\kappa > \aleph_0$ e sia T una teoria completa numerabile κ-categorica. Allora l'unico modello M di cardinalità κ è saturo.*

Dimostrazione. Possiamo scrivere $\kappa = \sup_{i \in I} \lambda_i$ dove i λ_i sono regolari e il sup potrebbere essere un massimo se κ stesso è regolare. Essendo κ-categorica, T è ω-stabile, e pertanto ha un modello λ_i-saturo di cardinalità κ, che deve coincidere con l'unico modello M di cardinalità κ. Abbiamo mostrato che M è λ_i-saturo per ogni $i \in I$. Se il sup è un massimo allora M è saturo. In caso contrario, preso un insieme A di parametri di cardinalità $< \kappa$, esiste un $i \in I$ tale che $|A| \leq \lambda_i < \lambda_i^+ < \kappa$ ed essendo M λ_i^+ saturo, ogni tipo su A è realizzato in M. $\square$

Lemma 16.4. *Sia T una teoria completa numerabile ω-stabile. Se T ha un modello non saturo di cardinalità più che numerabile, allora T ha modelli non saturi di ogni cardinalità più che numerabile.*

Dimostrazione. Supponiamo che M sia un modello non saturo di T di cardinalità $\lambda \geq \aleph_1$. Esiste allora un insieme $C \subset M$ di parametri di cardinalità $< \lambda$ e un tipo $p(x)$ di $Th(M_C)$ che non è realizzato in M. Siccome M è più che numerabile e T è ω-stabile, esiste una successione non costante $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi di M che è indiscernibile su C. Sia $I = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$. Poiché $p(x)$ non è realizzato in M, per ogni $L_{C \cup I}$-formula $\varphi(x)$ tale che $M \models \exists x \varphi(x)$, esiste una $\psi_\varphi(x) \in p(x)$ tale che $\varphi(x) \wedge \neg \psi_\varphi(x)$ è soddisfacibile in M.

Mi voglio ricondurre ad una situazione simile in cui C è numerabile. A tal fine osservo che, dato un sottoinsieme numerabile C_0 di C, esiste un insieme numerabile $C_1 \subseteq C$ contenente C_0 e tale che, se $\varphi(x)$ varia tra le $L_{C_0 \cup I}$-formule, $\psi_\varphi(x)$ varia tra le L_{C_1}-formule. Iterando ottengo $C_1, C_2, \ldots$ in modo che C_{n+1} sia costruito a partire da C_n come C_1 lo è da C_0. Sia $C' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_i$ e sia $p'(x)$ la restrizione di $p(x)$ a $L_{C'}$. Per costruzione, per ogni $L_{C' \cup I}$-formula $\varphi(x)$

realizzata in M, esiste una $\psi(x) \in p'(x)$ tale che $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ è realizzata in M. Poiché $C' \subseteq C$, la successione $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ continua ad essere indiscernibile su C'.

Dato $\kappa \geq \aleph_1$, sia $N_{C'} \succeq M_{C'}$ un modello contenente un κ-successione $(b_i)_{i<\kappa}$ di elementi indiscernibili su C' e tali che per ogni n-upla $i_0 < \ldots < i_n$ di indici minori di κ, il tipo di $b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}$ su C' coincide con il tipo di $a_0, \ldots, a_n$ su C'. Chiamiamo I' l'insieme dei b_i. Poiché T è ω-stabile (e quindi totalmente trascendente), per il Teorema 13.27, $N_{C'}$ ha una sottostruttura elementare costrubile, e dunque atomica, su $C' \cup I'$. Poichè C' è numerabile e I' ha cardinalità κ, prendendo un'ulteriore sottostruttura elementare ottengo un modello atomico $A \models Th(M_{C'\cup I'})$ di cardinalità κ.

Per finire basta mostrare che A non è saturo, e a tal fine mostro che non realizza $p'(x)$. Se infatti $a \in A$ fosse una realizzazione di $p'(x)$, essendo A atomica, vi sarebbe una formula $\varphi'(x)$ in $L_{C'\cup I'}$ che isola il tipo di a e dunque implica tutte le formule di $p'(x)$. In altre parole per ogni $\psi(x) \in p'(x)$, la teoria $Th(M_{C'\cup I'})$ dimostra $\forall x(\varphi'(x) \to \psi(x))$. Siano $b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}$ i parametri di I' che occorrono in $\varphi'(x)$. Sostituendoli con $a_0, \ldots, a_n$ ottengo una $L_{C'\cup I}$-formula $\varphi(x)$ coerente $Th(M_{C'\cup I})$ che implica tutte le formule di $p'(x)$ in questa teoria. Questo è assurdo perché la formula $\varphi(x) \wedge \neg\psi_\varphi(x)$ è soddisfacibile in M. □

Theorem 16.5 (Teorema di Morley)**.** *Sia L un linguaggio numerabile e sia T una L-teoria κ-categorica per qualche $\kappa \geq \aleph_1$. Allora T è λ-categorica per ogni $\lambda \geq \aleph_1$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 16.2, T è ω-stabile e, per il Teorema 16.3, l'unico modello di cardinalità κ è κ-saturo. Dato $\lambda \geq \aleph_1$, se per assurdo T non fosse λ-categorica, avrebbe un modello non saturo M di cardinalità λ (perché i modelli saturi della stessa cardinalità sono isomorfi). Ma allora avrebbe anche un modello non saturo di cardinalità κ, contro le ipotesi. □

17 Un teorema di Lachlan

In una versione precedente delle dispense c'erano i seguenti risultati che ora non mi servono più e possono essere omessi.

Theorem 17.1 (Lachlan)**.** *Se T è totalmente trascendente ed M è un modello non numerabile di T, allora M possiede estensioni elementari arbitrariamente grandi che non realizzano alcun insieme numerabile $\Sigma(y)$ di L_M -formule che non sia già realizzato in M.*

Dimostrazione. Poiché T è totalmente trascendente, non esistono alberi binari infiniti di L_M-formule $\varphi(x)$. Chiamiamo $\varphi(x) \in L_M$ "grande" se ha una quantità non numerabile di realizzazioni in M. Per la totale trascendenza non esistono alberi binari infiniti di formule, e in particolare di formule grandi. Esiste quindi una formula grande $\theta(x)$ "minimale", ovvero una formula che non è scrivibile come disgiunzione di due formule grandi incompatibili (tali cioè che gli insiemi da esse definiti siano disgiunti). Data una formula $\varphi(x) \in L_M$

$\theta(x) \wedge \varphi(x)$ è grande se e solo se $\theta(x) \wedge \neg\varphi(x)$ non lo è. Ne segue che l'insieme delle $\varphi(x) \in L_M$ tali che $\theta(x) \wedge \varphi(x)$ è grande è un tipo completo $p(x)$ di M a parametri da M. Si noti che $p(x)$ contiene solo formule grandi.

Ogni insieme numerabile $\{\gamma_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ di formule in $p(x)$ è realizzato in M (perché l'insieme $\theta(M)$ delle realizzazioni di $\theta(x)$ in M, essendo più che numerabile, non può essere unione degli insiemi "piccoli" $\theta(M) \cap \neg\gamma_n(M)$). D'altra parte $p(x)$ stesso non è realizzato in M (perché per ogni $m \in M$ la formula $x = m$, non essendo grande, non vi appartiene) .

Sia $a \models p(x)$ una realizzazione di $p(x)$ in un'estensione elementare $N \succ M$ (necessariamente propria in quanto $p(x)$ non è realizzato in M). Passando ad una sottostruttura elementare possiamo suppore che N sia costruibile su $M \cup \{a\}$ e quindi sia atomico su tale insieme (in quanto ogni teoria totalmente trascendente ha, su ogni sottoinsieme di un suo modello, un'estensione costruibile in base al Teorema 13.27). Vogliamo mostrare che N non realizza alcun insieme numerabile di L_M-formule che non sia già realizzato in M. Una volta ottenuto questo scopo possiamo iterare la costruzione a partire da N e ottenere estensioni arbitrariamente grandi con la medesima proprietà.

Sia dunque $\Sigma(y)$ un insieme numerabile di L_M -formule non realizzato in M e supponiamo per assurdo che $b \in N$ realizzi $\Sigma(y)$. Visto che N è atomico su $M \cup \{a\}$, il fatto che $b \in N$ realizzi $\Sigma(y)$ è esprimibile come condizione su a (coinvolgente eventuali parametri da M). Infatti sia $\chi(x, y) \in L_M$ tale che $\chi(a, y)$ isoli il tipo di b su $M \cup \{a\}$. Data $\sigma(y) \in L_M$ abbiamo

$$b \models \sigma(y) \iff a \models \sigma^*(x)$$

dove $\sigma^*(x) := \forall y(\chi(x, y) \to \sigma(y))$. L'insieme $\{\sigma^*(x) : \sigma(x) \in \Sigma(x)\} \cup \{\exists y\chi(x, y)\}$ è dunque incluso nel tipo $p(x)$ di a ed essendo numerabile è realizzato da qualche $a' \in M$ (per le proprietà del tipo $p(x)$). Per ogni $\sigma(x) \in \Sigma(x)$ abbiamo dunque $M \models \sigma^*(a')$ e $M \models \exists y\chi(a', y)$. Esiste allora $b' \in M$ tale $\chi(a', b')$ e poiché $M \models \sigma^*(a')$ otteniamo $M \models \sigma(b')$. Visto che ciò vale per ogni $\sigma(x)$ abbiamo dunque $b' \models \Sigma(y)$, contro le ipotesi. □

Diamo una seconda dimostrazione del teorema di Morley "verso il basso".

Theorem 17.2. *Una teoria completa numerabile T che è κ-categorica per qualche κ non numerabile è anche $\aleph_1$-categorica.*

Dimostrazione. Supponiamo che T sia κ-categorica ma non $\aleph_1$-categorica. Allora T ha un modello M di cardinalità $\aleph_1$ che non è saturo (visto che i modelli saturi della stessa cardinalità sono isomorfi). Sia $p(x) \in S_1(A)$ un tipo non realizzato in M su un sottoinsieme numerabile A di M. Essendo κ-categorica, T è ω-stabile (16.2), e quindi totalmente trascendente. Esiste allora per il teorema di Lachlan, Teorema 17.1, un'estensione elementare N di M di cardinalità κ che non realizza $p(x)$. D'altra parte in ogni teoria κ-categorica tutti i modelli di cardinalità κ sono saturi. Assurdo. □

18 Domande ed esercizi

1. Data una L-teoria T e una formula φ, si mostri che $T \models \varphi$ se e solo se $T' \models \varphi$ per tutte le estensioni complete di T.

2. Sia K una classe di L-strutture e sia $Th(K)$ l'insieme delle formule vere in ogni struttura $M \in K$. Si mostri che ogni teoria deduttivamente chiusa T è della forma $Th(K)$ per qualche K. Sia ora $M \models Th(K)$. Ne seque che $M \in K$?

3. Dimostrare che se $ED(M) \cup T$ ha un modello, allora ha anche un modello N tale che $M \preceq N$ (è facile vedere che se N è un modello, M si immerge elementarmente in N, ma come si fa ad ottenere un modello in cui l'immersione sia un'inclusione?).

4. Sia T una teoria e sia $T_\forall$ la teoria che ha come assiomi l'insieme delle conseguenze di T della forma $\forall \bar{x}\psi$ con ψ senza quantificatori. Si dimostri che ogni modello di $T_\forall$ è una sottostruttura di un modello di T. Ad esempio, prendendo come T la teoria dei campi, si ha che $T_\forall$ equivale alla teoria dei domini di integrità, e in effetti ogni dominio di integrità si immerge in un campo. Suggerimento: dato un modello M di $T_\forall$, sia $D(M)$ l'insieme delle formule senza quantificatori a parametri da M e vere in M. Si mostri che $D(M) \cup T$ è coerente.

5. Se nella definizione di ultraprodotto sostituiamo l'ultrafiltro con un filtro qualsiasi, vale ancora il teorema di Łos? Quali formule si preservano?

6. Si verifichi che se M è una L-struttura finita, qualsiasi sua ultrapotenza $\prod_{i \in I} M/U$ è isomorfa ad M.

7. Si dimostri che un algebra di Boole è isomorfa all'algebra dei clopen di uno spazio compatto.

8. Data una L teoria T e una L'-teoria $T' \supseteq T$, con $L' \supseteq L$, diciamo che T' è conservativa su T se non dimostra alcun L-enunciato che non sia già dimostrabile in T. Si mostri che ogni L-teoria T ha una estensione conservativa $T' \supseteq T$ in un linguaggio $L' \supseteq L$ tale che T' elimina i quantificatori. Suggerimento: per ogni L-formula $\varphi(\bar{x})$ si introduca un simbolo di relazione $P_\varphi(\bar{x})$ e l'assioma $P_\varphi(\bar{x}) \leftrightarrow \varphi(\bar{x})$.

9. Dare una diversa soluzione all'esercizio precedente aggiungendo simboli di funzione anziché simboli di relazione.

10. Si dimostri che un campo reale chiuso è o-minimale.

11. Si dimostri che $\mathbb{R}(x)$, ordinato ponendo $x > \mathbb{R}$, non è o-minimale.

12. Supponiamo di avere delle strutture $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ e $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ tali che $A_i \equiv B_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Ne seque che $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \equiv \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$?

13. Si mostri che se M è ω-satura, allora per ogni sottoinsieme finito A di M, $\mathrm{acl}(A) \neq M$. In particolare una struttura ω-satura non può essere finitamente generata.

14. Si dia un esempio in cui acl non verifica la proprietè dello scambio.

15. Si dimostri che in un campo algebricamente chiuso K acl (chiusura algebrica model-teoretica) coincide con la chiusura algebrica nel senso dei campi. Serve l'ipotesi che K sia algebricamente chiuso?

Riferimenti bibliografici

[1] Wilfrid Hodges. *Model theory, volume 42 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[2] Anand Pillay. An application of model theory to real and p-adic algebraic groups. *Journal of Algebra*, 126(1):139–146, 1989.

[3] Bruno Poizat. *A Course in Model Theory - An Introduction to Contemporary Mathematical Logic.* Springer, 2000.

[4] Lou van den Dries. *Tame topology and o-minimal structures*, volume 248. LMS Lecture Notes Series, Cambridge Univ. Press, 1998.