

November 21, 2013

CARATTERIZZAZIONE DIFFERENZIALE DELLE FUNZIONI ESPONENZIALE E LOGARITMO

Nelle dispense [Reali] e poi [C-INTER] abbiamo giustificato che la funzione $\exp(x) = e^x$ definita su tutto $\mathbb{R}$, è l'unica funzione *continua* a valori in $\mathbb{R}^+$ che verifica le seguenti *proprietà funzionali*:

- $\exp(1) = e$
- Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.

La funzione $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è stata definita come la funzione inversa di $\exp$, e quindi è l'unica funzione continua che verifica le *proprietà funzionali*:

- $\log(e) = 1$
- Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$, $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

Abbiamo poi calcolato le rispettive funzioni derivate da cui risulta che $\exp$ verifica le seguenti *proprietà differenziali*:

- $\exp(0) = 1$
- $(\exp)'(x) = \exp(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

mentre $\log$ verifica le *proprietà differenziali*:

- $\log(1) = 0$
- $(\log)'(x) = \frac{1}{x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

Vogliamo qui dimostrare che queste proprietà differenziali caratterizzano completamente le funzioni $\exp$ e $\log$ rispettivamente. Sia allora $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile tale che

- $g(1) = 0$
- $g'(x) = \frac{1}{x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

Vogliamo concludere che $g = \log$. Analizziamo le proprietà di g , utilizzando gli strumenti del calcolo differenziale:

- (1) Poiché $g'(x) > 0$ per ogni $x > 0$, allora la funzione g è strettamente crescente.
- (2) Mostriamo che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^+$, è verificata la relazione fondamentale $g(xy) = g(x) + g(y)$. Infatti, pensiamo y fisso e consideriamo la funzione $h(x) = g(yx)$. Allora $h'(x) = g'(yx)$. Ne segue che esiste una costante c tale che per ogni $x > 0$, $h(x) = g(x) + c$. Sostituendo $x = 1$, si ottiene $h(1) = g(y) = c$. Dunque abbiamo mostrato proprio che $g(yx) = g(x) + g(y)$. Ne segue in particolare che per ogni $a > 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $g(a^n) = ng(a)$.
- (3) Poiché g è crescente, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sup \text{Im}(g)$. Poiché $2 > 1$, $g(2) > 0$, dunque $g(2^n) = ng(2) \rightarrow +\infty$. Dunque la funzione g non è limitata superiormente e dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.
- (4) Poiché $g(x) = -g(\frac{1}{x})$, ne segue che $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$.
- (5) Ne segue che $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ è bigettiva, dunque esiste un unico $a \in \mathbb{R}^+$ tale che $g(a) = 1$.
- (6) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la funzione inversa di g . allora f è derivabile e dunque $f'(x = g(y)) = \frac{1}{g'(y)} =$

$\frac{1}{1/y} = y = f(x)$. D'altra parte f è continua e verifica le proprietà funzionali:

- $f(1) = a$
- Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Dunque, per quanto visto nelle dispense [REALI] e [C-INTER], $f(x) = a^x = e^{\log(a)x}$ e dunque $f'(x) = \log(a)f(x)$. Necessariamente allora $\log(a) = 1$ ed dunque $a = e$. Riassumendo abbiamo dimostrato che se g verifica le stesse proprietà differenziali di $\log$, allora $g = \log$. Ragionando in modo simile partendo da una funzione f che verifica le stesse proprietà differenziali di $\exp$, si può concludere che $f = \exp$.

Si noti che anche senza conoscere già la funzione $\log$, quando avremo a disposizione il *teorema fondamentale del calcolo integrale* sapremo che una funzione g che verifica quelle proprietà differenziali esiste, basta considerare la funzione integrale:

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt .$$

Potremmo allora prendere $e' := g(1)$ come nuova definizione di un numero di Nepero e ridefinire $\log = g$, $\exp = g^{-1}$. Per chiudere il cerchio, basterebbe ora dimostrare che $e' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$.