

November 12, 2013

SULLE FUNZIONI DERIVABILI DEFINITE SU UN INTERVALLO

In questa nota assumiamo una volta per tutte di essere nella seguente situazione: $[a, b]$, $a < b$, è un intervallo chiuso e limitato non degenere, mentre (a, b) è il sotto-intervallo aperto dei punti interni di $[a, b]$; $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che la restrizione a (a, b) è derivabile. Utilizzeremo i risultati stabiliti nella dispensa [C-INTER].

Lemma 0.1. Sia $x_0 \in (a, b)$ e supponiamo che $f'(x_0) > 0$. Allora esiste $\epsilon > 0$ tale per ogni $h \in \mathbb{R}$ tale che $|h| < \epsilon$, si ha che $x_0 + h \in (a, b)$ e

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Si ha il risultato analogo invertendo le disuguaglianze.

Dim. Poiché $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) > 0$, la tesi segue per la “permanenza del segno”. $\square$

Definizione 0.2. Un punto $x_0 \in (a, b)$ si dice punto di *massimo* (risp. *minimo*) *locale* per f se esiste $\epsilon > 0$ tale che $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset (a, b)$ e per ogni x tale che $|x - x_0| < \epsilon$ si ha che $f(x) \leq f(x_0)$ (risp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Teorema 0.1. Se $x_0 \in (a, b)$ è un punto di massimo (minimo) locale per f , allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. Osserviamo che se x_0 è un punto di minimo locale per f , allora x_0 è di massimo locale per $-f$. Dunque basta argomentare il caso in cui sia un massimo locale. Supponiamo allora che x_0 sia un punto di massimo locale. Se fosse $f'(x_0) > 0$, e $h > 0$ come nel lemma precedente, allora $f(x_0 + h) > f(x_0)$ contro il fatto che x_0 è un massimo locale. Se fosse $f'(x_0) < 0$ si conclude in modo analogo $\square$

I punti di (a, b) dove si annulla la derivata si dicono *punti stazionari* di f . Dunque abbiamo visto che i massimi e minimi locali sono stazionari. Il viceversa è falso: 0 è stazionario per la funzione $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, ma non è un punto di massimo e neanche di minimo locale.

Teorema 0.2. (Teorema di Rolle) Supponiamo che $f(a) = f(b)$. Allora esiste $x \in (a, b)$ tale che $f'(x) = 0$.

Dim. Sappiamo che $[a, b]$ contiene un punto di massimo assoluto x_0 e un punto di minimo assoluto y_0 . Se entrambi x_0, y_0 sono uno degli estremi a, b , allora f è costante su $[a, b]$ e dunque f' è identicamente nulla su (a, b) . Altrimenti almeno uno tra x_0 e y_0 , sia x , è un punto interno e per il teorema precedente, $f'(x) = 0$. $\square$

Teorema 0.3. (Teorema di Cauchy) Siano f, g due funzioni definite su $[a, b]$ che verificano entrambe le ipotesi stabilite all'inizio. Supponiamo che per ogni $x \in (a, b)$, $g'(x) \neq 0$. Allora $g(a) \neq g(b)$ ed esiste $x \in (a, b)$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dim. Se fosse $g(a) = g(b)$, per il teorema di Rolle g' non potrebbe essere sempre diversa da zero. Per ogni coppia di costanti non entrambe nulle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la funzione $h = \lambda f + \mu g$ è continua su $[a, b]$ e derivabile su (a, b) . Scegliamo

$$\lambda = (g(b) - g(a)), \quad \mu = -(f(b) - f(a))$$

Si verifica facilmente che con questa scelta, la funzione h verifica le ipotesi del Teorema di Rolle. Quindi esiste $x \in (a, b)$ tale che

$$h'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x) = 0.$$

Sostituendo a λ e μ le rispettive espressioni e dividendo membro a membro per $(g(b) - g(a))g'(x)$ (che è diverso da zero), si ottiene la tesi. $\square$

Come corollario, usando $g(x) = x$, otteniamo

Teorema 0.4. (Teorema del valor medio) *Esiste $x \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x) .$$

□

Corollario 0.3. *f è costante su $[a, b]$ se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$.*

Dim. Una implicazione è evidente. Per dimostrare l'altra, preso un arbitrario intervallo chiuso e limitato $[c, d] \subset (a, b)$, applichiamo il Teorema del valor medio alla restrizione di f a $[c, d]$. Allora

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x) = 0$$

da cui $f(c) = f(d)$. Per l'arbitrarietà di c, d si deduce che f è costante su (a, b) e quindi su tutto $[a, b]$ perchè è continua. □

Corollario 0.4. *Supponiamo che la derivata f' sia continua e si estenda ad una funzione continua definita su tutto $[a, b]$. Allora esiste una costante $K \geq 0$ tale che per ogni $c < d \in [a, b]$, si ha che $|f(d) - f(c)| \leq K|d - c|$.*

Dim. Riscriviamo la formula del valor medio nella forma $f(d) - f(c) = f'(x)(d - c)$, da cui $|f(d) - f(c)| = |f'(x)||d - c|$. La funzione $x \rightarrow |f'(x)|$ è continua su $[a, b]$, dunque prende un valore massimo $K \geq 0$, tale che per ogni $x \in (a, b)$ $|f'(x)| \leq K$. Ne segue che la tesi vale su (a, b) e poi si estende per continuità su tutto $[a, b]$. □

Teorema 0.5. *Se per ogni $x \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ (risp. $f'(x) < 0$) allora f è crescente (risp. decrescente) su (a, b) .*

Dim. Considerando se necessario $-f$, non è restrittivo considerare solo il caso in cui f' è positiva. Siano $c < d$ in (a, b) . Allora per il Teorema del valor medio, esiste $x \in (c, d)$ tale che

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = f'(x) > 0$$

da cui si deduce subito che $f(d) > f(c)$.

Corollario 0.5. *Sia f una funzione derivabile definita su un intervallo I aperto (non necessariamente limitato). Allora se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in I$, f è crescente su I .*

0.1. Convessità. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione definita su di un intervallo aperto. Siano $x_0, x_1 \in I$, e consideriamo i punti corrispondenti del grafico $G(f)$ di f , cioè $P_0 = (x_0, f(x_0)), P_1 = (x_1, f(x_1))$. Allora il segmento di $\mathbb{R}^2$ di estremi P_0 e P_1 può essere descritto come l'immagine dell'applicazione

$$s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad s(t) = (1 - t)P_0 + tP_1 .$$

Allora f si dice *convessa* su I , se per ogni $x_0, x_1 \in I$, per ogni $t \in [0, 1]$, si ha che

$$f((1 - t)x_0 + tx_1) \geq (1 - t)f(x_0) + tf(x_1)$$

cioè, geometricamente, il segmento $[P_0, P_1]$ sta sopra il grafico di f ristretta all'intervallo $[x_0, x_1]$. Invertendo la disuguaglianza (così che $[P_0, P_1]$ sta al di sotto del grafico) si ottiene la definizione di funzione *concava* su I . Abbiamo allora i seguenti risultati che enunciamo senza dimostrazione (che per altro non sarebbe troppo difficile).

Proposizione 0.6. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definita sull'intervallo aperto I .*

(1) *Se f è derivabile su I allora f è convessa (risp. concava) su I se e solo se f' è non decrescente (risp. non crescente) su I .*

(2) *Se f è derivabile due volte, allora f è convessa (risp. concava) se e solo se per ogni $x \in I$, $f''(x) \geq 0$ (risp. $f''(x) \leq 0$).*

Abbiamo visto prima che se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, allora i punti di massimo e minimo locale sono stazionari, ma che in generale il viceversa non vale. Abbiamo però il seguente fatto

Proposizione 0.7. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ come sopra, derivabile due volte. Supponiamo che $x_0 \in I$ sia un punto stazionario per f (cioè $f'(x_0) = 0$) e che $f''(x_0) > 0$ (risp. $f''(x_0) < 0$). Allora x_0 è un punto di minimo (risp. massimo) locale.

Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile, $x_0 \in I$ si dice un punto di flesso *ascendente* (risp. *discendente*) per f se esiste un sottointervallo aperto $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$, $\epsilon > 0$, tale che f è concava (risp. convessa) su $(x_0 - \epsilon, x_0)$ e convessa (risp. concava) su $(x_0, x_0 + \epsilon)$.

Proposizione 0.8. Sia $x_0 \in I$ un punto di flesso di $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ di tipo discendente (ascendente).

(1) Se f è derivabile allora x_0 è un punto di massimo (minimo) locale di f' .

(2) Se f è derivabile due volte, allora $f''(x_0) = 0$.

1. TEOREMI DELL'HÔPITAL

In questo paragrafo enunceremo dei risultati che in certi casi permettono di trattare le forme di indeterminazione $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Cominciamo con l'indeterminazione $\frac{0}{0}$.

Prendiamo in considerazione due situazioni:

- Sono date due funzioni f e g definite su un intorno $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ di un punto $a \in \mathbb{R}$; $f(a) = 0 = g(a)$, f e g sono derivabili in a , $g'(a) \neq 0$.
- f e g sono definite su $[a, a + \epsilon)$, sono continue, $f(a) = 0 = g(a)$, f e g sono derivabili su $(a, a + \epsilon)$ e per ogni $x \in (a, a + \epsilon)$, $g'(x) \neq 0$.

Nel primo caso siamo interessati a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nel secondo a

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Allora vale il seguente

Teorema 1.1. (Regole dell'Hôpital per $\frac{0}{0}$)

Prima regola. Nella prima situazione

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Seconda regola. Nella seconda situazione, se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

C'è una versione simmetrica della seconda regola, dove f è definita su $(a - \epsilon, a]$ e $x \rightarrow a^+$ è sostituito con $x \rightarrow a^-$.

Omettiamo la dimostrazione. Ci limitiamo a dire che il risultato nella prima situazione è facile e segue quasi direttamente dalla definizione di derivata. Il secondo è più complicato e si basa su una applicazione astuta del teorema di Cauchy. La seconda regola ha la seguente importante applicazione.

Corollario 1.1. Supponiamo che f sia definita su $I = (a - \epsilon, a + \epsilon)$, sia continua, sia derivabile in $I \setminus \{a\}$ e che $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora f è derivabile in a e $f'(a) = l$.

Dim. Si applica due volte la seconda regola a $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. □

Passiamo ora l'indeterminazione $\frac{\infty}{\infty}$. Prendiamo in considerazione la seguente situazione:

f e g sono definite su $(a, a + \epsilon)$, sono derivabili, per ogni $x \in (a, a + \epsilon)$, $g'(x) \neq 0$ ed inoltre

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty.$$

Siamo interessati al limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$. Allora vale

Teorema 1.2. (Regole dell'Hôpital per $\frac{\infty}{\infty}$) Nella situazione precedente, se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Esiste una versione della regola quando dove f è definita su $(a - \epsilon, a)$ e $x \rightarrow a^+$ è sostituito con $x \rightarrow a^-$.

Anche in questo caso omettiamo la dimostrazione. Ci sono naturali varianti di queste regole. Per esempio abbiamo:

Proposizione 1.2. Siano f, g funzioni definite su $I = (b, +\infty)$, derivabili e tali che per ogni $x \in I$, $g'(x) \neq 0$. Supponiamo inoltre che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Dim. Ci possiamo ricondurre alla seconda regola per $\frac{0}{0}$ per mezzo del cambiamento di variabile $y = 1/x$. □

Benché siano state omesse le dimostrazioni, è importante che lo studente assimili bene gli enunciati, per poterli applicare correttamente. In alcune situazioni si può applicare ripetutamente le regole, nel caso in cui le funzioni siano derivabili più volte e i rapporti tra le derivate continuino a presentare una forma di indeterminazione. In certi casi questo processo porta a semplificazioni che permettono alla fine di calcolare il limite in questione. In altri casi il processo può progressivamente complicare la situazione e quindi essere del tutto inutile. Con gli opportuni accorgimenti (vedi la scheda [FI]) si possono applicare le regole ad altre forme di indeterminazione ($+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 1^∞ , $\infty^0 \dots$). Diversi dei limiti della scheda [LIMITI] possono essere ottenuti applicando queste regole dell'Hôpital.