

November 5, 2013

SULLE FUNZIONI ELEMENTARI CONTINUE

Indichiamo con

$$\mathcal{F} = \{f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid D \subset \mathbb{R}, D \neq \emptyset\}$$

l'insieme di tutte le funzioni a valori reali, definite su qualche sottoinsieme non vuoto D di $\mathbb{R}$. Ricordiamo la definizione di funzione continua:

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ un elemento di $\mathcal{F}$. Diciamo che f è continua su D se per ogni $a \in D$, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ tale che per ogni $b \in D$ tale che $|b - a| < \delta$ si ha che $|f(b) - f(a)| < \epsilon$; in modo equivalente si può dire che: $f((a - \delta, a + \delta) \cap D) \subset (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon)$.

Ricordiamo anche che se ogni elemento $a \in D$ è di accumulazione per D allora f è continua su D se e solo se per ogni $a \in D$ si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) .$$

Indichiamo con $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ il sottoinsieme formato dalle funzioni continue.

1. PROCEDURE CHE PRESERVANO LA CONTINUITÀ

Conosciamo alcune semplici procedure che, a partire da (opportuni) elementi di $\mathcal{F}$, producono un altro elemento di $\mathcal{F}$. Elenchiamole.

Procedure. Supponiamo che $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ siano due funzioni nell'insieme $\mathcal{F}$.

- (Somma.) Se $D \cap D' \neq \emptyset$, allora definiamo $(f + g) : D \cap D' \rightarrow \mathbb{R}$.
- (Prodotto.) Se $D \cap D' \neq \emptyset$, allora definiamo $(f \cdot g) : D \cap D' \rightarrow \mathbb{R}$.
- (Reciproco.) Se f non è costantemente nulla su D , poniamo $D^* = D \setminus f^{-1}(0)$, e definiamo $\frac{1}{f} : D^* \rightarrow \mathbb{R}$.
- (Valore assoluto.) $|f| : D \rightarrow \mathbb{R}$.
- (Inversa.) Se f è iniettiva, poniamo $D^* = \text{Im}(f)$, e definiamo $f^{-1} : D^* \rightarrow D \subset \mathbb{R}$.
- (Composizione.) Se $\text{Im}(f) = f(D) \subset D'$, definiamo $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Indichiamo genericamente con $\mathbf{P}$ una di queste procedure.

La seguente proposizione riassume diverse proprietà strutturali delle funzioni continue.

Proposizione 1.1. (1) Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $D' \subset D$, allora la restrizione $f|_{D'} = f|_{D'}$ di f a D' è continua, cioè se $f \in \mathcal{C}$ allora anche $f|_{D'} \in \mathcal{C}$.

(2) $\mathcal{C}$ è chiuso rispetto alle procedure $\mathbf{P}$, cioè se f è ottenuta applicando una procedura $\mathbf{P}$ a partire da funzioni continue, allora anche f è continua.

2. FUNZIONI ELEMENTARI

Vogliamo individuare un sottoinsieme $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ ottenuto nel modo seguente:

(*) Fissiamo un insieme di funzioni “fondamentali” in $\mathcal{C}$. Allora f appartiene ad $\mathcal{E}$ se e solo se si ottiene a partire dalle funzioni fondamentali, applicando successivamente un numero finito (che però può essere arbitrariamente grande) di procedure $\mathbf{P}$.

Comunque fissiamo l'insieme delle funzioni fondamentali, certamente $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ perché $\mathcal{C}$ è chiuso rispetto alle procedure $\mathbf{P}$. E' chiaro che applicando una procedura $\mathbf{P}$ a partire da funzioni di $\mathcal{E}$ già costruite si ottiene un'altra funzione che sta in $\mathcal{E}$. E' chiaro anche che l'insieme $\mathcal{E}$ sarà completamente determinato, una volta che avremo dichiarato chi sono le nostre funzioni fondamentali, cosa che andiamo a fare.

Le funzioni “fondamentali”. Queste sono:

- Le funzioni costanti definite su $D = \mathbb{R}$.
- Le funzioni *inclusione di intervalli*, cioè della forma $x \rightarrow x$ definite su un arbitrario intervallo $I \subset \mathbb{R}$. In particolare se $I = \mathbb{R}$ abbiamo la funzione *identità* di $\mathbb{R}$.

- La funzione esponenziale $x \rightarrow e^x$ definita su $D = \mathbb{R}$.
- La funzione $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

La verifica che queste funzioni fondamentali sono continue è lasciata per esercizio.

L'insieme $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ ottenuto secondo quanto prescritto in (*), a partire da questo insieme di funzioni fondamentali, viene detto l'insieme delle *funzioni elementari continue*. Vediamo alcuni esempi notevoli di funzioni elementari.

- (*Funzioni polinomiali.*) Sono le funzioni, definite su $D = \mathbb{R}$, della forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad a_j \in \mathbb{R}.$$

Sono elementari perché si ottengono applicando ripetutamente le procedure “somma” o “prodotto” a partire dalle funzioni costanti e dalla funzione identità.

- (*Funzioni razionali.*) Sono le funzioni della forma $r = \frac{p}{q}$, dove p, q sono funzioni polinomiali, q non è la funzione polinomiale costantemente nulla, r è definita su $D = \{q(x) \neq 0\}$. Sono funzioni elementari perché si ottengono applicando ripetutamente le procedure “somma” o “prodotto” a partire dalle funzioni costanti e dalla funzione identità, per ottenere sia p sia q , concludendo poi con una applicazione di “reciproco” seguita da “prodotto”.
- La funzione *logaritmo naturale* $\log$, definita su $D = \{x > 0\}$, è elementare perché “inversa” della funzione esponenziale.
- Per ogni $a > 0$, la *funzione esponenziale in base a* $x \rightarrow a^x = e^{\log(a)x}$ è elementare perché è composizione di funzioni elementari.
- Per ogni $a > 0$, la *funzione logaritmica in base a* $\log_a = \log / \log(a)$ è elementare.
- Per ogni $a \in \mathbb{R}$ la *funzione potenza di esponente a* , definita su $D = \{x > 0\}$, $x^a = e^{a \log(x)}$ è elementare.
- La funzione *coseno* $\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$ è elementare perché composizione di funzioni elementari.
- Le *funzioni trigonometriche* $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, $\cot(x) = \cos(x)/\sin(x)$, (definite rispettivamente su $D = \mathbb{R} \setminus \{(2m+1)(\pi/2); m \in \mathbb{Z}\}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{m\pi; m \in \mathbb{Z}\}$) sono elementari perché ottenute applicando “reciproco” seguito da “prodotto” a partire da funzioni elementari già costruite.
- (*Funzioni trigonometriche inverse.*) Componendo, per ogni $m \in \mathbb{Z}$, la funzione di inclusione di intervallo $(2m+1)(\pi/2), (2(m+1)+1)(\pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$, con la funzione $\tan$ si ottiene una funzione bigettiva a valori in $\mathbb{R}$. Possiamo allora considerare la corrispondente funzione elementare inversa, definita su $\mathbb{R}$, che viene detta un ramo dell' *arcotangente*. Prendendo l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ si ottiene il cosiddetto ramo principale, che viene indicata con $\arctan$. In modo analogo si trattano le altre funzioni trigonometriche inverse, che sono quindi tutte elementari.
- (*Funzioni iperboliche.*) Definiamo su $D = \mathbb{R}$:

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Si noti che $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = -1$ cioè il punto $(\sinh(x), \cosh(x))$ appartiene ad una iperbole in $\mathbb{R}^2$. Per analogia con le funzioni trigonometriche, queste due funzioni si chiamano rispettivamente il *seno iperbolico* e il *coseno iperbolico*. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\cosh(x) \neq 0$,

possiamo definire su $D = \mathbb{R}$ la funzione $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ che è detta la *tangente iperbolica*; $\sinh(x) = 0$ solo se $x = 0$. Dunque su $D = \{x \neq 0\}$ possiamo definire la *cotangente iperbolica* $\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$. Applicando opportunamente la procedura “inversa” possiamo definire anche (i rami) delle funzioni iperboliche inverse $\operatorname{arcsinh}$, arcosh , artanh ecc.

Le funzioni elementari possono essere molto complicate (quindi “plastiche”), ma hanno anche un carattere “costruttivo” (a partire da pochi mattoni fondamentali) che le rende particolarmente appetibili, e sono infatti spesso utilizzate per modellizzare comportamenti presenti nella realtà (fisica, economica, biologica). Bisogna però tenere presente che ci sono funzioni anche molto semplici e naturali, che *non*

sono elementari (secondo la definizione data sopra). Per esempio la funzione “parte intera” $x \rightarrow [x]$, definita su $D = \mathbb{R}$ non è elementare (perché non è continua).