November 27, 2018

CENNI SULLO SPAZIO DUALE DI UNO SPAZIO NON FINITAMENTE GENERATO

Sia V è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbf{K}$, e supponiamo che sia munito di una base $\mathcal{B} = \{v_j\}_{j\in J}$, essendo J un certo insieme di indici, non necessariamente finito. Possiamo allora definire l'insieme duale

$$\mathcal{B}^* = \{v^j\}_{j\in J} \subset V^*$$

nello spazio duale

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbf{K})$$

dove per ogni $j \in J$, il funzionale v^j è definito dalla proprietà che $v^j(v_i) = \delta_{ij}$ cioè vale 1 se $i = j$ e vale 0 se $i \neq j$.

Fatto 1 *L'unica applicazione linerare $f_{\mathcal{B}} : V \to V^*$ tale che per ogni j, $f_{\mathcal{B}}(v_j) = v^j$ è iniettiva.*

Infatti se $\phi = a_1v^{j_1} + \cdots + a_kv^{j_k} = 0$, allora $0 = \phi(v^{j_h}) = a_h$ per $h = 1, \ldots, k$.

$\square$

Indichiamo con $V(\mathcal{B}^*) \subset V^*$ l'immagine di $f_{\mathcal{B}}$, questa è una "copia isomorfa" di V nel suo duale.

È definita **l'applicazione lineare canonica**

$$\Phi : V \to (V^*)^*$$

ponendo per ogni $v \in V$ e ogni $\phi \in V^*$, $\Phi(v)(\phi) := \phi(v)$.

Fatto 2 *L'applicazione canonica Φ è iniettiva.*

Sia $v \neq 0$; allora $v = a_1v_{j_1} + \ldots a_kv_{j_k}$ e possiamo assumere che $a_1 \neq 0$. Allora $v^{j_1}(v) = a_1 \neq 0$, quindi Ker $(\Phi) = \{0\}$.

$\square$

Indichiamo con $\hat{V} = \mathrm{Im}(\Phi)$ la "copia canonica" di V nel suo spazio biduale.

Se $J = \{1, \ldots, n\}$ è finito, allora poiché

$$\dim V = \dim V^* = \dim(V^*)^* = n$$

ne segue che $V(\mathcal{B}^*) = V^*$ e che $\hat{V} = (V^*)^*$ e quindi che $f_{\mathcal{B}}$ e Φ sono isomorfismi. Se invece J è infinito questi ultimi fatti non sono più veri e lo scopo di questa nota è illustrare questo diverso comportamento.

In generale la posizione di $V(\mathcal{B}^*)$ in V^* è descritta in modo esauriente come segue.

Fatto 2 *(1) La base $\mathcal{B}$ di V determina un isomorfismo $V^* \sim_{\mathcal{B}} \mathbf{K}^J$, tale che ogni applicazione (tra insiemi) $\phi : J \to \mathbf{K}$ è identificata con il funzionale $\phi : V \to \mathbf{K}$ che per ogni combinazione lineare di elementi di $\mathcal{B}$, vale*

$$\phi(a_1v_{j_1} + \cdots + a_kv_{j_k}) = a_1\phi(j_1) + \cdots + a_k\phi(j_k)\ .$$

(2) $V(\mathcal{B}^*)$ si identifica con il sottospazio di $\mathbf{K}^J$ formato dalle applicazioni $\phi : J \to \mathbf{K}$ di **supporto finito** *cioè tali che $s(\phi) = \{j \in J;\ \phi(j) \neq 0\}$ è finito.*

(3) Se J è infinito, allora $f_{\mathcal{B}}$ non è surgettiva (per esempio $\psi \in V^*$ tale che $\psi(v_j) = 1$ per ogni $j \in J$ non appartiene a $V(\mathcal{B}^*)$ perché $s(\psi) = J$) .

Osservazione: Il punto (3) qui sopra non è sufficiente per concludere che V e V^* non possono essere isomorfi. D'altra parte si potrebbe ottenere questo risultato con un argomento di cardinalità, mostrando che se J è infinito, allora $|V| = |V(\mathcal{B}^*)| < |\mathbf{K}^J|$. Il caso base è quello per cui $\mathbf{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, così che $\mathbf{K}^J$ si identifica con l'insieme delle parti di J, $\mathcal{P}(J)$; mentre $V(\mathcal{B}^*)$ corrisponde all'insieme delle *parti finite* di J. Preferiamo però non addentrarci troppo in questioni di cardinalità limitandoci a considerare qui sotto il caso in cui J è infinito numerabile.

Le considerazioni precedenti sono basate sull'ipotesi che lo spazio considerato sia munito di una base. Abbiamo visto che questo si verifica sempre, in modo elementare, se V è finitamente generato e in tal caso è ben definita la dimensione come il numero (finito) di elementi di una qualsiasi base di

V. Se V non è finitamente generato, la generalizzazione di questi fatti (esistenza di basi e invarianza della cardinalità al variare della base) è più delicata e necessita dell' uso esteso dell'assioma della scelta. Non sviluppiamo questa teoria generale delle basi e ci limitiamo da ora in poi a specializzare la discussione all'esempio dello *spazio vettoriale dei polinomi*

$$V = \mathbf{K}[X]$$

munito della base "canonica" numerabile

$$\mathcal{B} = \{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} = \{X^j\}_{j\in\mathbb{N}} \ .$$

In questo caso $V^* \sim \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ cioè lo spazio delle *successioni* di elementi di $\mathbf{K}$ e le successioni a supporto finito formano $V(\mathcal{B}^*)$, la copia isomorfa di V in V^*. Osserviamo che se V' è un qualsiasi altro spazio munito di una base numerabile $\mathcal{B}'$, allora ogni corrispondenza biunivoca $\mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{B}'$ determina un isomorfismo tra V e V' e le conclusioni che stabiliremo per V potranno essere trasferite su V' via tale isomorfismo.

Fatto 3 *(1) Se H è un sottoinsieme infinito di V formato da polinomi linearmente indipendenti, allora H è numerabile. (2) Ogni base di V è numerabile.*

Infatti

$$V = \cup_{d=1}^{\infty} \mathbf{K}_d[X]$$

dove $\mathbf{K}_d[X]$ è il sottospazio di V dei polinomi di grado minore o uguale a d. Quindi

$$H = \cup_{d=1}^{\infty} H_d,\ H_d = H \cap \mathbf{K}_d[X] \ .$$

Per ogni d, $\dim \mathbf{K}_d[X] = d+1$; quindi poiché H_d è linearmente indipendente esso è finito (con al più $d+1$ elemeti). Ne segue che H è numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti.

□

Fatto 4 *I funzionali (detti* **di valutazione***) della famiglia $\{\psi_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{K}}$, dove per ogni polinomio $P \in V$, $\psi_\lambda(P) := P(\lambda)$, sono linearmente indipendenti.*

Sia $\psi = a_1\psi_{\lambda_1} + \cdots + a_k\psi_{\lambda_k} = 0$. Per ogni $h = 1, \dots, k$ indichiamo con P_h il polinomio ottenuto dal polinomio

$$(X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_k)$$

omettendo il fattore $(X - \lambda_h)$. Allora $0 = \psi(P_h) = a_h P_h(\lambda_h)$ e $P_h(\lambda_h) \neq 0$.

□

Fatto 5 V^* non ammette una base numerabile e quindi non è isomorfo a V.

Se $\mathbf{K}$ è infinito più che numerabile (per esempio $\mathbf{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) , allora per il Fatto 4 lo spazio duale V^* contiene sottoinsiemi più che numerabili di funzionali linearmente indipendenti, quindi per il Fatto 3 non può avere una base numerabile. Se $\mathbf{K}$ è finito o numerabile (per esempio $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$), allora $V = \cup_{d=1}^{\infty} \mathbf{K}_d[X]$ è un isieme numerabile in quanto unione numerabile di insiemi finiti o numerabili. D'altra parte, poiché $\mathbf{K}$ ha almeno due elementi, per l'argomento diagonale di Cantor $V^* \sim \mathbf{K}^{\mathbb{N}}$ è più che numerabile e quindi non può essere isomorfo a V.

□

Segue da questa discussione che anche $\hat{V} \neq (V^*)^*$ e che anzi il biduale è molto più "grosso" di questo suo sottospazio canonicamente isomorfo a V. Questo indica anche come non sia affatto evidente che in dimensione finita si possa dimostrare 'direttamente' che Φ è surgettiva senza usare sostanzialmente che 'iniettiva $\Rightarrow$ surgettiva'.

Concludiamo con una osservazione che fa riferimento a nozioni che affronteremo più avanti nello svolgimento del corso. Muniamo $\mathbb{R}^n$ della usuale *norma euclidea* per cui

$$||(x_1, \dots, x_n)^t|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \ .$$

La norma induce una *topologia* ed è allora evidente che ogni funzionale $\phi \in (\mathbb{R}^n)^*$ è *continuo*. Consideriamo ora il sottospazio l^2 di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formato dalle successioni $x = x_n$ tali che

$$||x|| := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}$$

sia finito. Per esempio $V(\mathcal{B}^*) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è in effetti contenuto in l^2, dove $\mathcal{B} = \{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la base canonica di $\mathbb{R}[X]$ come sopra. Questo definisce una norma e quindi una topologia su l^2 e possiamo considerare il suo *duale topologico* $(l^2)'$ formato dai funzionali continui. Si verifica allora che

$$f : l^2 \to (l^2)',\ f(b_n)(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n$$

ben definisce un isomorfismo di spazi vettoriali con inverso

$$f^{-1} : (l^2)' \to l^2,\ f^{-1}(\phi) = \phi(v_n)\ .$$

Vediamo quindi, almeno nell'esempio, che munendo gli spazi vettoriali di opportune topologie e considerando i duali topologici, è possibile ristabilire isomorfismi con lo spazio duale, ritrovando in dimensione finita i fatti usuali. Questo è per esempio un ingrediente importante della formulazione matematica della meccanica quantistica.