COMPLEMENTI SUI PRODOTTI SCALARE

R. BENEDETTI

Fissiamo il contesto e alcune notazioni usati in queste note.

Lavoreremo su un arbitrario campo degli scalari $\mathbb{K}$ di caratteristica diversa da 2 (cioè $1 + 1 := 2 \neq 0$).

(V, Φ) indicherà uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, munito del prodotto scalare *non degenere* Φ. (V, Φ) è detto *anisotropo* se non contiene vettori isotropi non nulli.

Una *isometria* $\beta : (W, \Psi) \to (W', \Psi')$ (tra spazi muniti di prodotti scalare non necessariamente non degeneri) è un isomorfismo lineare che inoltre conserva i prodotti scalare, cioè per ogni $v,\ w \in W$, $\Psi(v, w) = \Psi'(\beta(v), \beta(w))$.

Ogni sottospazio W di V sarà munito del prodotto scalare ristretto $\Phi|W$; anche se non sarà detto esplicitamente, quando parleremo di isometrie tra sottospazi di V, lo intenderemo rispetto a questi prodotti scalari indotti per restrizione da Φ.

Se W è un sottospazio di V, quando scriveremo

$$W = W_1 \perp \cdots \perp W_k$$

intenderemo che

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

ed inoltre per ogni $v_i \in W_i$ e $v_j \in W_j$, $i \neq j$, si ha che $\Phi(v_i, v_j) = 0$. In tal caso diremo che il sottospazio W è *somma diretta/ortogonale* dei sottospazi W_j.

Il *gruppo ortogonale* $O(\Phi)$ è definito come segue:

$$O(\Phi) = \{f \in \mathrm{GL}(V) | \text{per ogni } \ v, w \in V :\ \Phi(v, w) = \Phi(f(v), f(w))\} \ .$$

Se $n = 0$, cioè $V = \{0\}$ allora Φ è anisotropo e $O(\Phi) = \{\mathrm{Id}\}$. Se $n \geq 1$, Φ che in quanto non degenere è in particolare non nullo, ammette vettori non isotropi.

Ricordiamo infine che dato (V, Ψ), con Ψ non necessariamente non degenere, se $V = U_1 \perp \mathrm{Rad}(\Psi) = U_2 \perp \mathrm{Rad}(\Psi)$ allora $\Psi|U_j$ è non degenere e l'applicazione $\beta : U_1 \to U_2$ definita da $\beta(u_1) = u_2$, dove u_2 è l'unico vettore in U_2 tale che $u_1 = u_2 + z$, $z \in \mathrm{Rad}(\Psi)$ è una *isometria canonica* tra i due complementari del radicale di Ψ.

1. Ogni gruppo ortogonale è generato dalle riflessioni

Sia come convenuto (V, Φ) con Φ non degenere. Per ogni vettore $v \in V$ non isotropo, ogni vettore $w \in V$ si scrive in modo unico nella forma

$$w = a(w)v + z(w)$$

dove $\Phi(v, z(w)) = 0$ e lo scalare $a(w)$ è uguale a $\Phi(w, v)\Phi(v, v)^{-1}$. In altre parole questo rende esplicita la decomposizione in somma diretta/ortogonale $V = \mathrm{Span}(v) \perp Z_v$, dove Z_v è lo spazio ortogonale a $\mathrm{Span}(v)$. Possiamo allora definire l'applicazione lineare

$$\rho_v(w) := -a(w)v + z(w) \ .$$

E' facile verificare che

- $\rho_v^2 = \mathrm{Id}$.
- $\rho_v \in O(\Phi)$.

Questa trasformazione ρ_v di V è detta la *riflessione parallela a* v. Vogliamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1.1. *$O(\Phi)$ è generato dalle riflessioni. Precisamente, ogni $f \in O(\Phi)$, $f \neq \mathrm{Id}$, può essere ottenuto come composizione di un numero finito di riflessioni parallele ad opportuni vettori non isotropi:*

$$f = \rho_1 \circ \rho_2 \cdots \circ \rho_k \ .$$

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione sulla dimensione $n = \dim V \geq 0$.

Se $n = 0$ il teorema è banalmente vero. Se $n = 1$, e V è generato da v, necessariamente non isotropo, allora è immediato verificare che se $f \neq \mathrm{Id}$, allora $f = \rho_v$.

Dimostriamo adesso il passo induttivo per $n \geq 1$: "$T(n-1) \to T(n)$". Sia $n = \dim V$. Distinguiamo alcuni sottocasi.

(1) Esiste w non isotropo tale che $f(w) = w$. Allora Z_w è f-invariante, $\Phi|Z_W$ è non degenere, $f|Z_w \in O(\Phi|Z_w)$. Dunque, per ipotesi induttiva, $f|Z_w = \hat{\rho}_1 \circ \cdots \circ \hat{\rho}_k$ per opportune riflessioni $\hat{\rho}_j$ su Z_w, parallele a vettori non isotropi z_j (in Z_w e quindi anche in V), $j = 1, \ldots, k$. Ogni $\hat{\rho}_j$ si estende ad una riflessione ρ_j su tutto V (parallela allo stesso vettore z_j) ed è immediato verificare che $f = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$.

(2) Sia w non isotropo tale che $f(w) \neq w$. I due vettori $f(w) - w$ e $f(w) + w$ sono tra loro ortogonali, inoltre non possono essere entrambi isotropi. Infatti, se lo fossero, seguirebbe che $4\Phi(w, w) = 0$, e questo è assurdo perché w è non isotropo (e $4 \neq 0$ in $\mathbb{K}$). Si osservi anche che

$$w = 2^{-1}(f(w) + w) - 2^{-1}(f(w) - w) \ .$$

Se $u := f(w) - w$ è non isotropo, allora $\rho_u(f(w)) = w$. Quindi, applicando il caso (1), risulta che $\rho \circ f = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$, ed infine $f = \rho \circ \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k$ è ottenuta come composizione di riflessioni.

Se $u = f(w) + w$ è non isotropo, allora, applicando il caso precedente, risulta che $-f = -\mathrm{Id} \circ f = \rho_0 \circ \cdots \circ \rho_k$. Osserviamo che se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una qualsiasi base Φ-ortogonale di V, allora $-\mathrm{Id} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_n}$. Infine risulta che $f = \rho_{v_n} \circ \cdots \circ \rho_{v_1} \circ \rho_0 \circ \cdots \circ \rho_k$ è ancora una volta della forma voluta.

□

Osservazioni 1.1. Seguendo i passi della precedente dimostrazione induttiva, è facile mostrare che per ogni $f \in O(\Phi) \setminus \{\mathrm{Id}\}$, il numero minimo di riflessioni necessario per esprimerlo può essere stimato in funzione della dimensione n unicamente. Quindi, per ogni $n \geq 0$ è ben definito $C(n) \in \mathbb{N}$ come il minimo intero positivo tale che, per ogni (V, Φ), $\dim V = n$, per ogni $f \in O(\Phi)$, $f \neq \mathrm{Id}$, allora f può essere ottenuto come composizione di k riflessioni, con $k \leq C(n)$.

Esercizi 1.2.
(1) Mostrare che $C(n) \geq n$.
(2) Restringiamoci al caso dei prodotti scalari *anisotropi*, e definiamo in modo analogo $C_a(n)$. Mostrare che $C_a(n) = n$.

La determinazione di $C(n)$ in generale non è banale. La risposta è data dal seguente teorema di Cartan-Dieudonné di cui riportiamo solamente l'enunciato.

Teorema 1.2. *Per ogni n, $C(n) = n$.*

2. Teoria di Witt

In questo paragrafo dimostreremo una serie di risultati dovuti a E. Witt (1937), tra loro correlati, che mettono in luce ulteriori proprietà interessanti dei prodotti scalare e dei gruppi ortogonali.

2.1. **Sottospazi congruenti - Teorema di estensione.**

Definizione 2.1. Due sottopazi W_1 e W_2 di (V, Φ) si dicono *congruenti* se esiste $f \in O(\Phi)$ tale che $f(W_1) = W_2$.

E' chiaro che due sottospazi congruenti hanno la stessa dimensione. Indicato con $G_m(V)$, per ogni $0 \leq m \leq n$, l'insieme dei sottospazi di V di dimensione uguale a m, allora la *congruenza* "$\sim$" è una relazione di equivalenza su $G_m(V)$, e vogliamo studiare il quoziente $G_m(V)/\sim$.

Se $f \in O(\Phi)$ realizza una congruenza tra W_1 e W_2, chiaramente $f| : W_1 \to W_2$ è una isometria tra W_1 e W_2. Quindi l'esistenza di un'isometria $\beta : W_1 \to W_2$ (a priori non indotta per restrizione di qualche $f \in O(\Phi)$) è chiaramente una condizione *necessaria* affinché i due sottospazi siano congruenti. Il primo teorema di Witt che incontriamo dice in particolare che tale condizione è anche *sufficiente*.

Teorema 2.1. (**Teorema di estensione.**) *Data una isometria $\beta : W_1 \to W_2$ tra due sottospazi di V, esiste $f \in O(\Phi)$ tale che $f|W_1 = \beta$. Ne segue che W_1 e W_2 sono congruenti se e solo se sono isometrici una volta muniti della restrizione di Φ.*

Dimostriamo intanto il Teorema di estensione in un caso particolare.

Dimostrazione del Teorema di estensione, sotto l'ipotesi ulteriore che $\Phi|W_1$ e $\Phi|W_2$ siano non degeneri. Per induzione su $m = \dim W_j \geq 0$. Se $m = 0$, allora $W_1 = W_2 = \{0\}$, ed ogni $f \in O(\Phi)$ è tale che $f(0) = 0$. Dimostriamo adesso il passo induttivo "$T(m-1) \to T(m)$". Sia $\dim W_1 = m$ e fissiamo una base di W_1, $w_1, \dots, w_m$, ortogonale rispetto a $\Phi|W_1$. Poiché $\Phi|W_1$ è non–degenere, ogni w_j è non isotropo. Dato che β è una isometria, le stesse considerazioni valgono per la base $u_1 = \beta(w_1), \dots, u_m = \beta(w_m)$ di $(W_2, \Phi|W_2)$. Poniamo $W_1' = \mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ e $W_2' = \mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$. Allora possiamo applicare l'ipotesi induttiva all'isometria $\beta' := \beta| : W_1' \to W_2'$, estendendo così β' per mezzo di qualche $g \in O(\Phi)$. Se vale anche che $g(w_m) = u_m$, allora g estende β e abbiamo finito. Supponiamo invece che $g(w_m) \neq u_m$. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1.1, si osserva che i vettori $g(w_m) - u_m$ e $g(w_m) + u_m$ sono tra loro ortogonali e non possono essere entrambi isotropi. Se $u := g(w_m) - u_m$ è non isotropo, allora $\rho_u(g(w_m)) = u_m$, mentre $\rho_u \circ g|W_1' = g|W_1' = \beta'$. Quindi $\rho_u \circ g$ è una estensione voluta di β. Se $u = g(w_m) + u_m$ è non isotropo, allora $\rho_u \circ g(w_m) = -u_m$, e infine $\rho_{u_m} \circ \rho_u \circ g$ è ancora ancora una volta un'estensione voluta di β. □

2.2. **Completamenti non degeneri di sottospazi.**

Faremo vedere che il caso generale del Teorema di estensione può essere ridotto al caso particolare appena dimostrato. Per fare questo, conviene analizzare la struttura dei *completamenti non degeneri* di ogni sottospazio W di V che andiamo a definire.

Definizione 2.2. Per ogni sottospazio W di V, un *completamento non degenere* di W è un sottospazio $\hat{W}$ di V tale che:

- $W \subset \hat{W}$;
- $\Phi|\hat{W}$ è non degenere;
- $\hat{W}$ è di dimensione minima tra i sottospazi che verificano le due precedenti proprietà.

Se dim$W = 0$, allora banalmente $\hat{W} = W = \{0\}$. Dunque supponiamo qui di seguito che dim$W > 0$. Per studiare questi completamenti è necessario introdurre qualche ulteriore nozione.

Definizione 2.3. Un *piano iperbolico* (P, Ψ) è uno spazio 2-dimensionale, munito di prodotto scalare non degenere Ψ, e tale che esiste un vettore $v \neq 0$ isotropo. Una *base iperbolica* $\mathcal{B} = \{v, t\}$ di un piano iperbolico è tale che

$$M_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P è un piano iperbolico in (V, Φ) se $(P, \Phi|P)$ è un piano iperbolico.

Lemma 2.4. *Per ogni piano iperbolico (P, Ψ) ed ogni $v \neq 0$ isotropo, v si estende ad una base iperbolica $\mathcal{B} = \{v, t\}$ di P.*

Dimostrazione. Sia $\{v, w\}$ una qualsiasi base di P. Poiché Ψ è non degenere, lo scalare $a := \Psi(v, w) \neq 0$. Allora $\{v, t := -(2a^2)^{-1}\Phi(w, w)v + a^{-1}w\}$ è una base iperbolica voluta. □

Dimostreremo:

Teorema 2.2. *(***Teorema sui completamenti non degeneri.***) Per ogni (V, Φ) con Φ non degenere, ed ogni sottospazio W di V:*

(1) *Per ogni decomposizione in somma diretta/ortogolale*
$$W = U \perp \mathrm{Rad}(\Phi|W)$$
ed ogni base $\{z_1, \dots, z_k\}$ di $\mathrm{Rad}(\Phi|W)$, esiste un completamento non degenere $\hat{W}$ di W della forma
$$\hat{W} = U \perp P_1 \perp \cdots \perp P_k$$
dove ogni P_j è un piano iperbolico in V, e ogni z_j fa parte di una base iperbolica $\{z_j, t_j\}$ di P_j.

(2) *Tutti i completamenti non degeneri di W sono tra loro congruenti.*

(3) *Per ogni completamento non degenere di W,*
$$\dim\hat{W} = \dim W + \dim\mathrm{Rad}(\Phi|W) \ .$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che, nelle stesse ipotesi, esiste un "ampliamento" non degenere $W \subset W^0$ di W che verifichi tutte le proprietà di $\hat{W}$ come nel punto (1) del Teorema, ma senza richiedere a priori che la dimensione di W^0 sia minima. Giustifichiamo intanto questa affermazione. Poichè l'esistenza di un W^0 di quella forma sarebbe assicurata in ogni $(V', \Phi|V')$ non degenere tale che $W \subset V' \subset V$, prendendo come V' un qualsiasi completamento non degenere $\hat{W}$, si avrebbe $W \subset W^0 \subset \hat{W}$. Poichè $\Phi|W^0$ è non degenere e la dimensione di $\hat{W}$ è minima tra le dimensioni di tutti gli ampliamenti non degeneri di W, segue necessariamente che $W^0 = \hat{W}$. Abbiamo così dimostrato che ogni W^0 di quella forma ha in effetti dimensione minima, per cui sia il punto (1) sia il punto (3) sarebbero dimostrati. Per dimostrare il punto (2), consideriamo due completamenti non degeneri $\hat{W}_1$ e $\hat{W}_2$ di W. Fissiamo $W = U \perp \mathrm{Rad}(\Phi|W)$ e una base $\{z_1, \dots, z_k\}$ come in (1). Applicando il punto (1), si avrebbe
$$\hat{W}_j = U \perp P_{1,j} \perp \cdots \perp P_{k,j}, \ j = 1, 2$$
dove ogni piano iperbolico $P_{i,j}$ è munito di una base iperbolica $\{z_i, t_{i,j}\}$. Definiamo allora l'applicazione lineare $\beta : \hat{W}_1 \to \hat{W}_2$ tale che $\beta|W = \mathrm{Id}$, $\beta(t_{i,1}) = t_{i,2}$, $i = 1, \dots k$. E' facile verificare che β è una isometria. Applicando infine il caso particolare del Teorema di

estensione già dimostrato, possiamo concludere che i due completamenti di W sono tra loro congruenti.

Resta quindi da dimostrare l'esitenza degli ampliamenti non degeneri $W \subset W^0$, come specificato all'inizio della dimostrazione. Procediamo per induzione su $k = \mathrm{dimRad}(\Phi|W) \geq 0$. Se $k = 0$, allora $\hat{W} = W$ e abbiamo finito. Supponiamo $k = 1$ e sia $W = U \perp \mathrm{Rad}(W)$, $\mathrm{Rad}(W) = \mathrm{Span}(z)$. Sia $\{u_1, \dots u_r\}$ una base di U e consideriamo una base $\{u_1, \dots, u_r, z, v_1, \dots v_s\}$ di V. Consideriamo la base duale di V^* e rappresentiamo il funzionale z^* tramite Φ per mezzo di un vettore d. Abbiamo che $\Phi(z, z) = 0$, $\Phi(z, d) = 1$, $\Phi(d, u_j) = \Phi(d, v_i) = 0$, $j = 1, \dots r$, $i = 1, \dots, s$. Affermiamo che $\{u_1, \dots, u_r, z, d\}$ sono linearmente indipendenti. Infatti se fosse $d = \sum_j a_j u_j + az$, si avrebbe $1 = \Phi(d, z) = 0$ che è assurdo. Dunque $P = \mathrm{Span}\{z, d\}$ è un piano iperbolico, che grazie al Lemma 2.4 può essere munito di una base iperbolica $\{z, t\}$ e risulta che

$$W^0 = U \perp P$$

è un ampliamento non degenere di W con tutte le proprietà volute. La dimostrazione del passo induttivo "$T(k-1) \to T(k)$" si ottiene in modo simile a quanto fatto nel caso $k = 1$. Avendo fissato come al solito

$$W = U \perp \mathrm{Rad}(\Phi|W)$$

ed una base $\{z_1, \dots, z_k\}$ di $\mathrm{Rad}(\Phi|W)$ osserviamo che possiamo precisare la costruzione del caso $k = 1$ applicata a $W^0(1) = U \perp \mathrm{Span}(z_1)$, ottenendo alla fine $U \perp P_1$ con l'ulteriore proprietà che i vettori $z_2, \dots, z_k$ sono ortogonali a $W^0(1)$. Per fare questo basta avere cura di usare nella costruzione precedente una base di V che contenga $\{u_1, \dots, u_r, z_1, \dots, z_k\}$. Per induzione, possiamo allora assumere di avere costruito $W^0(k-1) = U \perp P_1 \perp \dots \perp P_{k-1}$ con le proprietà volute relativamente ai vettori $\{z_1, \dots, z_{k-1}\}$, e in modo tale che z_k sia ortogonale a $W^0(k-1)$. Si conclude iterando ancora una volta la costruzione. Il Teorema sui completamenti non degeneri è così completamente dimostrato.

□

Possiamo adesso completare anche la dimostrazione del Teorema di estensione.

Dimostrazione del Teorema di estensione - caso generale. Data una isometria $\beta : W_1 \to W_2$, basta dimostrare che esistono completamenti non degeneri $\hat{W}_1$ e $\hat{W}_2$, ed una isometria $\hat{\beta} : \hat{W}_1 \to \hat{W}_2$ che estende β, cioè tale che $\hat{\beta}|W_1 = \beta$. In tal caso, concluderemo estendendo ulteriormente $\hat{\beta}$ per mezzo di qualche $f \in O(\Phi)$, come sappiamo fare in accordo con il caso particolare del Teorema già dimostrato prima. La costruzione di una tale $\hat{\beta} : \hat{W}_1 \to \hat{W}_2$ ricalca quanto fatto nella dimostrazione del punto (2) del Teorema sui completamenti non degeneri. Fissiamo allora una decomposizione $W_1 = U_1 \perp \mathrm{Rad}(\Phi|W_1)$, e una base $z_1, \dots, z_k$ di $\mathrm{Rad}(\Phi|W_1)$. Prendiamo un completamento non degenere $\hat{W}_1 = U_1 \perp P_1 \perp \dots \perp P_k$ in accordo con il punto (1) del Teorema sui completamenti non degeneri. Quindi per ogni piano iperbolico P_j disponiamo della base iperbolica $\{z_j, t_j\}$. Posto $U_2 = \beta(U_1)$, $s_j = \beta(z_j)$, $j = 1, \dots, k$, poiché β è una isometria, abbiamo che questi s_j formano una base del radicale di $\Phi|W_2$, e possiamo applicare ancora lo stesso Teorema per ottenere un completamento non degenere $\hat{W}_2 = U_2 \perp P'_1 \perp \dots \perp P'_k$ di W_2 tale che ogni piano iperbolico P'_j è munito di una base iperbolica $\{s_j, t'_j\}$. Consideriamo infine l'applicazione lineare $\hat{\beta} : \hat{W}_1 \to \hat{W}_2$ tale che $\hat{\beta}|W_1 = \beta$, $\hat{\beta}(t_j) = t'_j$, $j = 1, \dots, k$. E' facile verificare che $\hat{\beta}$ è una isometria voluta.

□

Esercizi 2.5. (1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mostrare che due sottospazi W_1 e W_2 di V sono congruenti se e solo se hanno la stessa dimensione e $\dim \mathrm{Rad}(\Phi|W_1) = \dim \mathrm{Rad}(\Phi|W_2)$.

(2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, mostrare che due sottospazi W_1 e W_2 di V sono congruenti se e solo dim $\mathrm{Rad}(\Phi|W_1) =$ dim $\mathrm{Rad}(\Phi|W_2)$ e hanno la stessa segnatura: $(i_-(\Phi|W_1), i_+(\Phi|W_1)) = (i_-(\Phi|W_2), i_+(\Phi|W_2))$.

2.3. **Teorema di cancellazione.** . Come applicazione dei risultati così ottenuti, diamo una descrizione dello spazio ortogonale di un dato sottospazio W di V. Sia come al solito $W = U \perp \mathrm{Rad}(\Phi|W)$ e consideriamo un completamento non degenere $\hat{W} = U \perp P_1 \perp \cdots \perp P_k$; sappiamo che $\mathrm{Rad}(\Phi|W)$ è contenuto nella somma diretta/ortogonale dei piani iperbolici P_j. Poiché Φ e $\Phi|\hat{W}$ sono entrambi non degeneri

$$V = \hat{W} \perp \hat{W}^\perp$$

e anche $\Phi|\hat{W}^\perp$ è non degenere. E' chiaro che $\mathrm{Rad}(\Phi|W) \perp \hat{W}^\perp \subset W^\perp$. D'altra parte, ancora poiché Φ è non degenere

$$\mathrm{dim}W^\perp = \mathrm{dim}V - \mathrm{dim}W = \mathrm{dim}V - (\mathrm{dim}U + k) = \mathrm{dim}\hat{W}^\perp + k \ .$$

Ne segue che

$$W^\perp = \mathrm{Rad}(\Phi|W) \perp \hat{W}^\perp$$

$$\mathrm{Rad}(\Phi|W^\perp) = \mathrm{Rad}(\Phi|W)$$

$$(W^\perp)^\perp = W \ .$$

Ricordiamo che per ogni spazio munito di prodotto scalare (Z, Ψ), tale che $Z = U_1 \perp \mathrm{Rad}(\Psi) = U_2 \perp \mathrm{Rad}(\Psi)$, allora i prodotti $\Psi|U_j$ sono non degeneri e i due spazi $(U_j, \Psi|U_j)$ sono *canonicamente* isometrici tra loro. L'insieme di queste considerazioni ci permette di concludere che dati due sottospazi W_1 e W_2 di V, questi sono isometrici (quindi congruenti per il teorema di estensione) se e solo se i rispettivi spazi ortogonali $W_1^\perp$ e $W_2^\perp$ sono isometrici (quindi conguenti). Abbiamo così dimostrato il seguente Teorema.

Teorema 2.3. *(***Teorema di cancellazione.***) Se $V = U_1 \perp V_1 = U_2 \perp V_2$ e V_1 e V_2 sono tra loro isometrici, allora anche U_1 e U_2 sono isometrici.*

2.4. **Indice e decomposizione di Witt.** Dato (V, Φ) come al solito, *l'indice di Witt* $w(\Phi)$ è definito come il massimo intero maggiore o uguale a zero per cui esista un sottospazio W di V tale che $\Phi|W = 0$. Chiaramente Φ è anisotropo se e solo se $w(\Phi) = 0$, inoltre $w(\Phi)$ *è invariante a meno di isometrie.*

Poniamo $w = w(\Phi)$ e sia $W \subset V$ tale che $\mathrm{dim}W = w$ e $\Phi|W = 0$. Allora i completamenti non degeneri di W sono della forma

$$\hat{W} = P_1 \perp \cdots \perp P_w$$

così che in particolare

Lemma 2.6. $2w(\Phi) \leq \mathrm{dim}V$.

Poiché $\hat{W}$ è non degenere

$$V = A \perp \hat{W}, \quad A = \hat{W}^\perp \ .$$

Sicuramente $\Phi|A$ è non degenere, ma vale di più:

Lemma 2.7. $\Phi|A$ *è anisotropo.*

Dimostrazione. Se A contenesse un vettore isotropo non nullo z, allora $W' = \mathrm{Span}(z) \perp W$ sarebbe un sottospazio di V tale che $\dim W' = w(\Phi)+1$ e $\Phi|W' = 0$, ma questo è in contrasto con la definizione dell'indice di Witt.

□

L'ultimo Lemma suggerisce la seguente

Definizione 2.8. Una *decomposizione di Witt* di (V,Φ) è una decomposizione in somma diretta/ortogonale

$$V = A \perp P_1 \perp P_2 \perp \cdots \perp P_h$$

dove ogni P_j è un piano iperbolico e A è anisotropo.

Lemma 2.9. *Per ogni decomposizione di Witt di V che includa h piani iperbolici, si ha che $h \leq w(\Phi)$*

Dimostrazione. Prendendo un vettore z_j di una base iperbolica $\{z_j, t_j\}$ per ogni P_j, $j = 1,\dots,h$, è facile verificare che posto $W = \mathrm{Span}(\{z_1,\dots,z_h\}$ questo sottospazio ha dimensione uguale ad h, e $\Phi|W = 0$. Segue quindi dalla definizione dell'indice che $h \leq w(\Phi)$.

□

Il seguente Teorema esprime le proprietà strutturali delle decomposizioni di Witt.

Teorema 2.4. *(***Decomposizione di Witt: esistenza e unicità.***)*

- Esistenza: *Dato (V,Φ), Φ non degenere, e posto $w = w(\Phi)$, esiste una decomposizione di Witt di V della forma*

  $$V = A \perp P_1 \perp \cdots \perp P_w \ .$$

- Unicità: *Date due decomposizioni di Witt di V*

  $$V = A \perp P_1 \perp P_2 \perp \cdots \perp P_h$$

  $$V = A' \perp P'_1 \perp P'_2 \perp \cdots \perp P'_{h'}$$

  queste sono tra loro congruenti, cioè $h = h' = w(\Phi)$ ed esiste $f \in O(\Phi)$ tale che $A' = f(A)$, $P'_j = f(P_j)$, $j = 1,\dots,w(\Phi)$.

Dimostrazione. L'enunciato di esistenza è già stato dimostrato qui sopra. Per quanto riguarda l'unicità, non è restrittivo supporre che $h' = w = w(\Phi)$, e che $h \leq w$ secondo il Lemma precedente. Vogliamo intanto escludere che $h < w$. Supponiamo per assu rdo che lo sia. Chiaramente i sottospazi $Z := \perp_{j=1}^{h} P_j$ e $Z' := \perp_{j=1}^{h} P'_j$ sono tra loro isometrici e quindi congruenti per il teorema di estensione. Si ha che $A = (Z)^{\perp}$, mentre $A' \perp (\perp_{i=h+1}^{w} P'_i) = (Z')^{\perp}$. Per il teorema di cancellazione A e $A' \perp (\perp_{i=h+1}^{w} P'_i)$ sono tra loro congruenti. Poiché $h < w$, $A' \perp (\perp_{i=h+1}^{w} P'_i)$ contiene almeno un piano iperbolico e quindi almeno un vettore isotropo non nullo, ma questo è assurdo perché A è anisotropo. Dunque $h = w$. Adesso Z e Z' sono tra loro congruenti per mezzo di qualche $f \in O(\Phi)$ e $f(A) = A'$. Quindi le due decomposizioni sono congruenti come volevamo dimostrare.

□

Il seguente Corollario è di dimostrazione adesso evidente.

Corollario 2.10. *Dati (V,Φ) e (V',Φ'), con prodotti scalare entrambi non degeneri e tali che $w(\Phi) = w(\Phi')$, allora essi sono isometrici tra loro se e solo se lo sono le parti anisotrope A e A' delle rispettive decomposizioni di Witt.*

Osservazioni 2.11. Un primo approccio allo studio degli spazi muniti di prodotto scalare (non degenere) considerati a meno di isometrie utilizza l'esistenza di basi ortogonali. Nel caso in cui il campo degli scalari è sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora, sfruttando alcune notevoli proprietà algebriche di questi campi, è stato possibile completare per questa via la classificazione a meno di isometrie. Ricordiamo che su $\mathbb{C}$ la dimensione di V è un invariante completo, mentre su $\mathbb{R}$ l'invariante completo è dato dalla segnatura $(i_-(\Phi), i_+(\Phi))$, che tra l'altro incorpora la dimensione n di V, perché $n = i_- + i_+$. Per campi arbitrari $\mathbb{K}$ (comunque di caratteristica diversa da 2), è molto meno evidente come proseguire secondo questo approccio. D'altra parte la teoria dell'indice e della decomposizione di Witt funziona tranquillamente su ogni campo $\mathbb{K}$. Possiamo dire che questa teoria fa emergere un addendo diretto/ortogonale "facile" di ogni (V, Φ) (la somma dei piani iperbolici della decomposizione), mentre il senso del Corollario 2.10 è che tutta la difficoltà è concentrata nella classificazione (a meno di isometrie) degli spazi *anisotropi*. E' plausibile che questa dipenderà pesantemente dalle proprietà algebriche del campo $\mathbb{K}$.

Esercizi 2.12. Ritroviamo la classificazione su $\mathbb{C}$ e su $\mathbb{R}$, secondo l'approccio via la teoria di Witt.

(1) Su $\mathbb{C}$. Dimostrare che (V, Φ) è anisotropo se e solo se ha dimensione uguale a 1 e due spazi anisotropi sono tra loro isometrici. Dimostrare che se V ha dimensione $n = 2m$ oppure $n = 2m + 1$, allora $w(\Phi) = m$. Osserviamo che ritroviamo il fatto che la dimensione di V è un invariante completo, ma la teoria di Witt è più precisa perché mette anche in evidenza un diverso comportamento strutturale a seconda che la dimensione sia pari (in tal caso la parte anisotropa è banale), o dispari (in tal caso la parte anisotropa è non banale).

(2) Su $\mathbb{R}$. Dimostrare che (V, Φ) è anisotropo se e solo se Φ è definito, e che due spazi anisotropi sono isometrici se e solo hanno la stessa dimensione e lo stesso *segno* τ ($\tau = 1$ $(= -1)$ se e solo se il prodotto è definito > 0 (< 0)). Dimostrare che la terna $(w(\phi), \tau(\Phi), a(\Phi))$ è un invariante completo, dove $\tau(\phi)$ indica il segno della componente anisotropa nella decomposizione di Witt, mentre $a(\Phi)$ indica la sua dimensione. Dimostrare che Φ ha segnatura $(i_-(\Phi), i_+(\Phi))$ se e solo se valgono le seguenti relazioni:

$$w(\Phi) = \min\{i_-(\Phi), i_+(\Phi)\}$$

$$a(\Phi) = \max\{i_-(\Phi), i_+(\Phi)\} - \min\{i_-(\Phi), i_+(\Phi)\}$$

$$\tau(\Phi) = 1 \leftrightarrow i_+(\Phi) = \max\{i_-(\Phi), i_+(\Phi)\} \ .$$

Si osservi che $w(\Phi) = w(\lambda\Phi)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(3) Dimostrare che su $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ un prodotto scalare definito è anisotropo, ma che (a differenza di $\mathbb{R}$) esistono prodotti scalare indefiniti e anisotropi.

Concludiamo osservando che la definizione dell'indice di Witt $w(\Psi)$ ha senso anche se Ψ non è necessariamente non degenere. In tal caso scriviamo $V = U \perp \mathrm{Rad}(\Psi)$ e ricordiamo ancora una volta che $\Psi|U$ è non degenere e che due complementari del radicale di Ψ sono canonicamente isometrici tra loro. Allora vale

Proposizione 2.13. *Per ogni (V, Ψ) (Ψ non necessariamente non degenere) si ha*

$$w(\Psi) = w(\Psi|U) + \mathrm{dimRad}(\Psi) \ .$$

Dimostrazione. Sia $W \subset U$ tale che $\mathrm{dim}W = w(\Psi|U)$ e $\Psi|W = 0$. E' chiaro allora che $Z := W \perp \mathrm{Rad}(\Psi)$ verifica $\Phi|Z = 0$. Ne segue la disuguaglianza

$$w(\Psi) \geq w(\Psi|U) + \mathrm{dimRad}(\Psi) \ .$$

Mostriamo che non può valere la disuguaglianza stretta. Supponiamo per assurdo che esista $H \subset V$, tale che $\dim H > w(\Psi|U) + \dim \mathrm{Rad}(\Phi)$ e $\Psi|H = 0$. $H \cap U$ è un sottospazio di U su cui Φ si annulla quindi $w(\Phi|U) \geq \dim(H \cap U)$. D'altra parte, usando la formula di Grassmann e la disuguaglianza dell'ipotesi per assurdo, abbiamo che

$$\begin{gathered} \dim(H \cap U) = \dim H + \dim U - \dim(H + U) > \\ w(\Psi|U) + \dim \mathrm{Rad}(\Psi) + \dim U - \dim(H + U) = \\ w(\Phi|U) + \dim(V) - \dim(H + U) \geq \\ w(\Phi|U) \ . \end{gathered}$$

Mettendo insieme queste disuguaglianze otteniamo infine

$$w(\Phi|U) \geq \dim(H \cap U) > w(\Phi|U)$$

che è impossibile.

□

Osservazioni 2.14. Il caso Hermitiano. La teoria di Witt si adatta in modo diretto al caso dei prodotti Hermitiani sugli spazi vettoriali complessi e produce risultati che ricalcano formalmente quelli del caso dei prodotti scalare sugli spazi vettoriali reali.