**Polinomi di Taylor**[1]

# 1 Polinomio di Taylor.

Data una funzione abbastanza regolare in un intorno (unilatero o bilatero) di un punto $x_0$, nel senso che in tale intorno ammette tutte le derivate fino all'ordine $n$, vogliamo approssimarla con un polinomio seguendo un po' la falsariga di quanto fatto quando abbiamo costruito il modello dei decimali illimitati per i Reali.

Per semplicità di scrittura supponiamo che il punto sia l'origine: si otterrà il caso generale traslando il tutto in $x_0$, rimpiazzando cioè $x$ con $x - x_0$.

Sia quindi $f$ una funzione definita in un intorno $(-\delta, \delta)$ o $[0, \delta)$ dell'origine e che sia derivabile in tale intorno fino all'ordine $n$: vogliamo sapere se esiste, e se si, determinarlo, un polinomio di grado $n$ tale che

$$f(x) = p + x^n \varepsilon(x) \text{ con } \deg p = n \text{ e } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Supponiamo che tale polinomio esista e cerchiamo di determinarne i coefficienti. Abbiamo che $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - p(x)}{x^n} = 0$ e quindi applicando reiteratamente $n$ volte la regola dell'Hospital (si noti che siamo nelle condizioni di poterlo fare) si ottiene che $\frac{f^{(n)}(0) - p^{(n)}(0)}{n!} = 0$ da cui $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

In conclusione possiamo riassumere tutto ciò nel seguente teorema, che enunciamo per un punto generico $x_0$

**Teorema 1.1.** *Sia $f$ una funzione derivabile $n-1$ volte nell'intervallo $[x_0, x_0 + \delta)$ ed avente nel punto $x_0$ derivata n-esima. Allora si ha*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$

*con*

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

# 2 Resto.

La differenza tra la funzione ed il polinomio approssimante, che è un infinitesimo di ordine superiore a $n$, viene comunemente detta *resto* e si puo esprimere in diversi

[1] Brook Taylor (Edmonton, 18 agosto 1685 Londra, 29 dicembre 1731)

modi che possono venire più comodi nella pratica: quella utilizzata nella formula precedente è conosciuta come *la forma di Peano*. Un'altra espressione comoda è *la forma di Lagrange*, che in un certo senso generalizza il teorema del valor medio.

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \tfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Indichiamo con $h(x)$ la funzione $f(x) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$.

Consideriamo ora il punto $x_0$ come una variabile e definiamo $\varphi(t)$ in questo modo.

$$\varphi(t) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j - h(x)\frac{x - t^{n+1}}{x - {x_0}^{n+1}}$$

Chiaramente la $\varphi(t)$ è continua in ogni punto dell'intervallo aperto e derivabile in ogni punto distinto da $x_0$, Si verifica facilmente che $\varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$.

- $\varphi(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!}(x-x)^j - h(x)\frac{(x-x)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} = f(x) - f(x) = 0$
- $\varphi(x_0) = f(x) - \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j - h(x)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} = h(x) - h(x) = 0$

Quindi applicando il teorema di Rolle abbiamo che esiste un punto $\xi$ interno all'intervallo $[x, x_0]$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$.

Svolgendo i calcoli otteniamo per $\varphi'(t)$:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = -\tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + (n+1)h(x)\tfrac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = \\ = -\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\Big[\frac{f^{(n+1)}(t)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} - h(x)\Big] \end{aligned}$$

e da $\varphi'(\xi) = 0$ otteniamo che deve essere necessariamente

$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$