

December 10, 2013

CENNI SULLE SOLUZIONI DI ALCUNI ESERCIZI DEL FOGLIO 6

In questa scheda si trovano soluzioni semilavorate e in certi casi solo la risposta non giustificata per alcuni degli esercizi del foglio 6. Lo studente dovrebbe invece fornire tutti i dettagli. Scrivendo **(X,Y)** ci riferiamo all'esercizio Y del foglio X.

(6,1) $f(x) = x|x-1|$ è continua e non derivabile in $x = 1$. $f(x) = (x-2|x|)^2$ è $\mathcal{C}^1$; f' non è derivabile in $x = 0$. Il terzo esempio è $\mathcal{C}^0$, derivabile ma f' non è continua in $x = 0$. Il quarto esempio è $\mathcal{C}^2$, f'' non è derivabile in $x = 1$.

(6,2) $D = \{x > 0\}$.

(6,3) D è unione di intervalli aperti disgiunti. Su ogni intervallo f ha segno costante, per cui $|f| = f$ oppure $|f| = -f$. In entrambi i casi g è derivabile e $g' = \frac{f'}{f}$. Se f è elementare anche g lo è.

(6,4) Usare il fatto che $h(x)^{k(x)} = e^{\log(h(x))k(x)}$, a condizione che $h > 0$.

(6,5) Su $(0, 3)$, $f'(x) = (2x - 5 + x^2 - 5x + 7)e^x = (2 - 3x + x^2)e^x$ che si annulla se e solo se $x = 1$ e $x = 2$. $f(0) = 7, f(1) = 3e, f(2) = e^2, f(3) = e^3$. Dunque 0 è un punto di minimo assoluto, 3 è di massimo assoluto. $f''(x) = (-3 + 2x + 2 - 3x + x^2)e^x = (-1 - x + x^2)e^x$. $f''(1) = -e < 0$, $f''(2) = e^2 > 0$. Dunque $x = 1$ è un punto di massimo locale, $x = 2$ è un punto di minimo locale.

(6,7) Per il teorema di Rolle, tra due zeri consecutivi di f su (c, d) esisterebbe z tale che $f'(z) = 0$ contro l'ipotesi.

(6,8) (1) Almeno uno zero esiste per il Teorema degli zeri di [C-INTER]. Ne esiste uno solo grazie all'argomento usato sopra per (6,7). (2) La derivata $p'(x)$ si annulla esattamente in $x = \pm 1$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty, p(-1) = 3, p(1) = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = -\infty$. Dunque $p(x)$ ha esattamente uno zero in ciascuno degli intervalli di $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

(6,9) f ha almeno uno zero in (a, b) per il teorema degli zeri. Se ci fossero due zeri, per il teorema di Rolle, esisterebbe $z \in (a, b)$ tale che $f'(z) = 0$. Se $f'' > 0$ allora z è un punto di minimo assoluto e quindi $f(a) \geq f(z), f(b) \geq f(z), f(a)f(b) \geq f^2(z) \geq 0$, contro l'ipotesi. Analogamente se $f'' < 0$.