November 25, 2013

CENNI SULLE SOLUZIONI DI ALCUNI ESERCIZI DEI FOGLI 3-4-5

In questa scheda si trovano soluzioni semilavorate e in certi casi solo la risposta non giustificata per alcuni degli esercizi dei fogli 3-4-5. Lo studente dovrebbe invece fornire tutti i dettagli. Parecchi esercizi dei fogli 1-3 sono stati diffusamente discussi a lezione. Scrivendo **(X,Y)** ci riferiamo all'esercizio Y del foglio X.

(3,3) Dopo avere osservato che tutti i termini della successione sono > 0, si dimostra per induzione che per ogni n, $a_n \leq a$ e che la successione è decrescente. Quindi $a_n \to L \leq a$. Passando al limite per $n \to +\infty$, la formula che definisce a_n per induzione implica che $L = \frac{1}{2}(a + L^2)$, e si determina che $L = 1 - \sqrt{1-a}$, perché $L \leq a$.

(4,2(2)) $\mathbb{R} = \cup_n [-n, n]$ non è compatto (perché ogni sottosuccessione di $a_n = n$ diverge a $+\infty$ e quindi non converge ad un punto di $\mathbb{R}$). Se a_n è a valori in B allora è a valori in ogni $[\alpha_m, \beta_m]$. Fissato un m sia a_{n_j} una sottosuccesione che converge a un certo b in $[\alpha_m, \beta_m]$. Dimostriamo che $b \in B$. Altrimenti esisterebbe $[\alpha_k, \beta_k] \subset [\alpha_m, \beta_m]$ tale che b non appartiene a $[\alpha_k, \beta_k]$, esisterebbe allora un $\epsilon > 0$ tale che $(b-\epsilon, b+\epsilon) \cap [\alpha_k, \beta_k] = \emptyset$. Ma questo é assurdo perché a_n è a valori in $[\alpha_k, \beta_k]$ e definitivamente in $(b-\epsilon, b+\epsilon)$.

(4,3) Se $c_n \to a$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $n > n_0$, $c_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon) \cap D$. Viceversa, per ogni $n > 1$, esiste $c_n \in (a - 1/n, a + 1/n) \cap D$, dunque $c_n \neq a$ per ogni n e $c_n \to a$.

(4,4) Dato b sia $y = \arcsin(b)$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\sin(y + 2n\pi) = b$. Posto $x_n = 1/(y + 2n)$, $x_n \to 0$, $\sin(1/x_n) \to b$.

(4,6) Posto $y = 5x$, $\sin(y)/y \to 1$ quando $y \to 0$. Dunque $\sin(5x)/x = 5\sin(y)/y \to 5$.

(4,8) E' una forma indeterminata $f(x)^{g(x)}$ di tipo 1^∞. Riscriviamo nella forma $((1 + (f(x) - 1))^{1/(f(x)-1)})^{(f(x)-1)g(x)}$ e riconduciamoci allo studio del limite di $e^{(f(x)-1)g(x)}$. Nel caso dell'esercizio $(f(x)-1)x = -2x/(x^2+1)$, quindi tende a 0. In conclusione il limite cercato vale $e^0 = 1$.

(5,1) f è continua e non è derivabile nei punti x tali che $(x, 1/2) = (x, \sin(x)$.

(5,2) Se $n = 0$ f è continua ma non derivabile. Se $n > 0$ è pari, f è di classe $\mathcal{C}^{n-1}$ ma non $\mathcal{C}^n$. Se $n > 0$ è dispari, f è $\mathcal{C}^\infty$.

(5,3) $\sin(x) - 2 < 0$ dunque non si può comporre con log, il dominio di definizione è vuoto.

(5,4) No. Per esempio $f(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ e le due scritture di f corrispondono a due successioni diverse di procedure **P**.

(5,6) Non lo è.

(5,7) Non è derivabile in 0.

(5,9) $f(0) = -1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Per la permanenza del segno esistono $a < 0$ e $b > 0$ tali che $f(a), f(b) > 0$. f è continua. Per il teorema degli zeri ne esiste almeno uno in $(a, 0)$ e almeno uno in $(0, b)$.

(5,10) Poiché f è di grado dispari esiste almeno uno zero. Si verifica che $f(x) > 0$ se $x \geq -1$ e $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$ dunque crescente se $x \leq -1$. Ne segue che c'è un solo zero e questo sta in $(-\infty, -1]$.

(5,11) $h(x) = f(x) - g(x)$ verifica le ipotesi del teorema degli zeri.

(5,12) *ERRATA: c'erano degli errori di stampa nel testo che ora sono stati corretti.* f è superiormente limitata: fissiamo $a \in \mathbb{R}$; poiché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ esiste un intervallo $I = [-k, k]$ tale che $f(x) < a$ se $x \in \mathbb{R} \setminus I$. Su I f prende un valore massimo b. Dunque $f(x) \leq \max\{a, b\}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $\sup f = m \in \mathbb{R}$. Sia x_n, tale che $f(x_n) \to m$. La successione x_n è limitata, altrimenti esisterebbe una sottosuccessione $x_{n_j} \to \pm\infty$ e dunque $f(x_{n_j}) \to -\infty$, mentre $f(x_{n_j}) \to m$. Dunque esiste una sottosuccessione $x_{n_j} \to c \in \mathbb{R}$. Siccome f è continua, $f(c) = m$ e così c è un punto di massimo.