Qualche limite e serie standard svolti.

Queste note contengono lo studio di qualche limite e di qualche serie trattato nel corso con qualche suggerimento per richiamare le idee delle prove.

1 Successioni

1.1 Confronti di crescita di esponenziali.

Abbiamo visto, come conseguenza della diseguaglianza di Bernoulli, che la successione a^n per $a > 1$ diverge, mentre converge a 0 se $|a| < 1$ e non ha limite se $a < -1$. Confrontiamola, quando diverge, con qualche altra successione, anche essa divergente.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty \text{ con } a > 1 \text{ e } k > 0$$

  L'idea per comprendere il comportamento di questa successione è di confrontarla con una successione di coefficienti binomiali. Il coefficiente binomiale $\binom{n}{k+1} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}$ è un polinomio in n di grado $k+1$, pertanto

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{k+1}}{n^k} = \infty$$

  Quindi per n abbastanza grande, diciamo $n \geq k+1$

  $$a^n = (1 + (a-1))^n = \sum_{h=0}^{\infty} \binom{n}{h} (a-1)^h > \binom{n}{k+1} (a-1)^{k+1}$$

  Quindi si ha $\dfrac{a^n}{n^k} > \dfrac{\binom{n}{k+1}}{n^k}(a-1)^{k+1}$ e pertanto, se $a > 1$ e $k > 0$

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \text{ con } a > 1$$

  Si ottiene osservando che

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$ perché se $n \geq k+1$ $n! \geq n(n-1)\cdots(n-k)$ e quindi $\frac{n^k}{n!} \leq \frac{n^k}{n(n-1)\cdots(n-k)} \to 0$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$ perché $\frac{n}{n}\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{1} > n$

e osservando che tutti i fattori $\frac{a}{n}$ con $n > [a]$ sono minori di 1, quindi $\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n}\frac{a}{n-1}\cdots\frac{a}{1}$. la quantità a secondo membro risulta essere una costante $C(a)$, che dipende solo da a, per $\frac{a}{n}$ che tende a 0. $\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n}\frac{a}{n-1}\cdots\frac{a}{1} = C(a)\frac{a}{n}$.

Possiamo riassumere quanto visto dicendo che *definitivamente* si ha, se $a > 1$ e k intero positivo fissato,

$$n^k < a^n < n! < n^n.$$

1.2 Qualche criterio

- *La successione* $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ *ha lo stesso comportamento della successione* a_n*; in particolare se* $a_n \to l$ *allora anche* $\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \to l$*. Come conseguenza si ha che* $\frac{\log n!}{n}$ *diverge.*

  Diamo un cenno della dimostrazione solo per il caso $l = 0$ lasciando al lettore la cura di trattare gli altri casi e di evidenziare i dettagli anche per il caso che diamo.

  Indichiamo con $b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$: vogliamo mostrare che $b_n \to 0$. Sappiamo che $a_n \to 0$ e quindi che fissato un xε esiste un n_0 tale che per $n > n_0$ $|a_n| < \varepsilon$. Il termine b_k della successione è somma di due termini $b_k = \frac{a_1 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots a_k}{k} = \frac{a_1 + \ldots + a_{n_0}}{k} + \frac{a_{n_0+1} + \ldots a_k}{k} = b_k^1 + b_k^2$
  Ora il termine b_k^2 viene maggiorato da $\varepsilon\frac{k-n_0}{k}$, quantità quest'ultima che tende ad 1; facendo crescere opportunamente k si ottiene che, essendo n_0 fissato, anche il termine b_k^1 diventa definitivamente piccolo, diciamo minore di ε. Quindi in definitiva il termine b_k diviene definitivamente piccolo.

- *Sia* a_n *una successione tale che* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$*. Se* $l < 1$ *allora* $a_n \to 0$*, se* $l > 1$ *allora* $a_n \to \infty$*.*

  Se $l < 1$ si può scegliere un ε in modo che $l+\varepsilon < 1$. Indichiamo con $M = l+\varepsilon$. Per definizione di limite si ha che per $n > \nu$, $|\frac{an+1}{a_n}| < M$, quindi si ha che definitivamente $a_{n+1} < Ma_n$ e cioè che per $n > \nu$ $|a_{n+\nu}| < M^\nu a_\nu$. La tesi si ottiene dal fatto che essendo $M < 1$ $M^j \to 0$ e per confronto $a_{m+\nu} \to 0$.

- *Sia a_n una successione. Se* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$ *allora anche* $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{\frac{1}{n}} = l$

  Ripercorrere la prova precedente osservando che definitivamente (cioè per $n > \nu$) $|\frac{a_{n+1}}{a_n} - l| < \varepsilon$ da cui si ha che definitivamente vale

  $$(l-\varepsilon)a_n < a_{n+1} < (l+\varepsilon).$$

  Quindi ricorsivamente otteniamo

  $$(l-\varepsilon)^m a_\nu < a_{m+\nu} < (l+\varepsilon)^m a_\nu.$$

  Prendendo le radici $(m+\nu)$-esime si ha

  $$(l-\varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} a_\nu^{\frac{1}{m+\nu}} \leq (a_{m+\nu})^{\frac{m}{m+\nu}} \leq (l+\varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} a_\nu^{\frac{1}{m+\nu}}.$$

  Da questo si conclude osservando che $a_\nu^{m+\nu} \to 1$, $(l-\varepsilon)^{\frac{m}{m+\nu}} \to l+\varepsilon \ldots$e che quindi definitivamente si ha

  $$l - 2\varepsilon < a_j^{\frac{1}{j}} < l + 2\varepsilon$$

  per cui converge a l.

1.3 Altri confronti.

Sappiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ Calcolare

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} a_n$

1.4 Varie.

Determinare il comportamento delle successioni seguenti

- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(n+1)}{\log(n-1)}$

  Sol. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(n+1)}{\log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(n-1)(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(n-1)+\log(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} =$
  $1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+\frac{2}{n-1})}{\log(n-1)} = 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)\log(1+\frac{2}{n-1})}{(n-1)\log(n-1)} = 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{\log(1+\frac{2}{n-1})^{n-1}}{(n-1)\log(n-1)} =$
  $1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{e^2}{(n-1)\log(n-1)} = 1$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

  Sol. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$ 0

- Se $0 < a < b$ allora $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$ perché $b^n < a^n + b^n < 2b^n$, quindi $b \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2}b$ e per confronto il risultato.

2 Serie

2.1 Qualche nota sulle serie

Le prime serie numeriche cha abbiamo trattato e che ci sono servite come confronto per stabilire la natura di altre serie sono state

1. *La serie geometrica* $\sum a^j$
2. *La serie armonica* $\sum \frac{1}{n}$
3. *La serie armonica generalizzata* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$

1. *La serie geometrica* $\sum a^j$

   Per stabilire la natura di questa serie basta ricordare

   $$(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^n) = 1 - a^{n+1}$$

   da cui abbiamo immediatamente che

   $$\sum_0^n a^j = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

   e quindi che se $|a| < 1$ la serie converge a $\frac{1}{1-a}$ mentre diverge se $a \geq 1$ e non converga se $a < -1$.

2. *La serie armonica* $\sum \frac{1}{n}$

   Per stabilire la natura di questa serie maggioriamo opportunamente le ridotte spezzando il numero di elementi su cui sommiamo in opportuni tronconi.

   $$1 < 1$$
   $$\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
   $$\frac{1}{2} = 4\frac{1}{8} < \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{2} = 2^k \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots \frac{1}{2^k+2^k-1}$$

Da cui sommando

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + +\frac{1}{2} < 1 + \sum_{2}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{n}$$

per cui la serie armonica diverge.

3. *La serie armonica generalizzata.*

   Per studiare questa serie utilizziamo la stessa idea del punto precedente, cioè un opportuno spezzamento della lunghezza delle ridotte.

   Lemma 2.1. *Sia a_n una serie a termini positivi decrescenti. Allora vale*

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^{j+1}} < \sum_{j=0}^{n} a_j < \sum_{j=1}^{n} 2^j a_{2^j}$$

   Prova Procediamo come prima

$$\begin{gathered} a_2 < a_1 < a_1 \\ 2a_4 < a_2 + a_3 < 2a_2 \\ 2^2 a_8 < a_4 + a_5 + a_6 + a_7 < 2^2 a_4 \\ 2^3 a_{16} < a_8 + a_9 + a_{10} + \cdots + a_{15} < 2^3 a_8 \\ \cdots \\ 2^j a_{2^{j+1}} < a_{2^j} + \quad \cdots \quad + a_{2^{j+1}-1} < 2^j a_{2^j} \end{gathered}$$

   Sommando otteniamo

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^{j+1}} < \sum_{j=0}^{n} a_j < \sum_{j=0}^{n} 2^j a_{2^j}$$

   Applicando questo alla serie armonica generalizzata abbiamo

$$\sum_{j=0}^{n} 2^j \frac{1}{2^{(j+1)\alpha}} < \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{j=1}^{n} 2^j \frac{1}{2^{j\alpha}}$$

   quindi $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{j=0}^{n} \big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\big)^j$ e quindi essendo quest'ultima una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$ converge se $\alpha > 1$

2.2 Miscellanea.

Studiare il comportamento delle serie seguenti

1. $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)$
2. $\sum \frac{n\sqrt{n}}{n^3+1}$
3. $\sum \frac{\sqrt{n}+1}{n^3+1}$
4. $\sum \frac{2n}{\sqrt{n^3+1}}$
5. $\sum \frac{1}{n^2-n}$
6. $\sum \frac{n!}{n^n}$
7. $\sum \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n^3}}$
8. $\sum \frac{\log n!}{n^3}$