Alcuni limiti.

In questa scheda sono raccolti alcuni limiti di successioni o di funzioni, o esempi di serie numerica, che saranno considerati noti e che, in buona parte, sono stati discussi a lezione. Se necessario, lo studente dovrebbe essere in grado di ri-ottenerli. Comunque questa scheda potrà essere consultata e a volte essere di aiuto per lo studio di altri limiti. Nel caso di successioni utilizzeremo anche la notazione abbreviata $a_n \to a$ al posto di $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- La successione $a_n = (-1)^n$ è irregolare e limitata. La sottosuccessione $a_{n_j} = a_{2j}$ è convergente.
- La successione $a_n = (-1)^n n$ è irregolare e illimitata. La sottosuccessione $a_{n_j} = a_{2j}$ è divergente a $+\infty$.
- Per ogni $a > 0$, $n^a \to +\infty$.
- Per ogni $a > 1$, $a^n \to +\infty$. Per ogni $a \in (-1, 1)$, $a^n \to 0$. Per $a \leq -1$, a^n non e' regolare.
- $n! \to +\infty$.
- $n^{1/n} \to 1$. Per ogni $a > 0$, $a^{1/n} \to 1$.
- $\dfrac{\sin(n)}{n} \to 0$.
- Per ogni $a > 1$, per ogni $b > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^b} = +\infty$.
- Per ogni $a > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.
- $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty} (n!)^{1/n} = +\infty$.
- Data una successione a_n, se $(a_n - a_{n-1}) \to a$, allora $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = a$.
- se $a_n > 0$ per ogni $n \geq 0$ e $(a_n/a_{n-1}) \to a$, allora $a_n^{1/n} \to a$.
- $\log(n!)/n \to +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty} (1 + \dfrac{1}{n})^n = e = 2,71828...$ (per definizione e è la *costante di Nepero*).

- Se $a \in (-1, 1)$, allora la *serie geometrica* converge e ha somma $\sum_{n\geq 0} a^n = 1/(1-a)$. Se $a > 1$ la serie geometrica diverge a $+\infty$. Se $a \leq -1$ la serie è indeterminata.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

- La *serie armonica* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$. La *serie armonica a segni alterni* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ è convergente.

- Se $a \in (0,1]$, allora la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ è divergenre a $+\infty$; se $a > 1$, allora la serie è convergente.

- La funzione $f(x) = \sin(1/x)$ definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non ha alcun limite per $x \to 0$.

- $\lim_{x\to\pm\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2,71828...$.

- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e = 2,71828...$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$;

- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1$.

- Per ogni $a > 1$ e $b > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$. Per ogni $a > 0$ e $b > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x))^a}{x^b} = 0$.

- $\lim_{x\to 0^+} x\log(x) = 0$;

- $\lim_{x\to 0} (\cos(x))^{1/x} = \lim_{x\to 0} ((1 + (\cos(x)-1))^{\frac{1}{\cos(x)-1}})^{\frac{\cos(x)-1}{x}} = e^0 = 1$.