Regola dell'Hospital

La regola dell'Hospital[1] è un procedimento che ci permette, sovente, di calcolare un limite che si presenta in forma indeterminata.

Supponiamo di voler calcolare $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e di essere nel caso di una forma indeterminata del tipo $\dfrac{0}{0}$.

Supponiamo inoltre che esista il $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e sia uguale ad l: allora il limite $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ esiste ed è anche lui uguale ad l.

Questo enunciato resta valido anche quando $x \to x_0^+$ o $x \to x_0$ o $x \to \pm\infty$ sia nel caso che l sia finito o non sia finito.

Daremo la prova nel solo caso $l \neq \pm\infty$ e x_0 finito ed x vi tenda da sinistra: la prova generale si ottiene adattando questa con facili cambiamenti.

Supponiamo quindi che esista finito il limite $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e sia l e che $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = 0$. Ciò significa in particolare che vicino a x_0, in un intorno sinistro, $g'(x)$ non cambia segno infinite volte e che quindi possiamo fissare un intorno (sinistro) ove ha segno costante, segno che senza perdita di generalità, penseremo positivo.

Quindi fissato ε esiste δ tale che per $x_0 - \delta < x$ si ha $|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - l| < \varepsilon$, cioè che per x in tale intervallo risulta

$0 < f'(x) - (l - \varepsilon)g'(x)$ e $f'(x) - (l + \varepsilon)g'(x) < 0$, Indicate con $F_{\mp}$ le funzioni $f(x) - (l \mp \varepsilon)g(x)$ si ha

$$F'_{\mp} = f'(x) - (l \mp \varepsilon)g'(x)$$

.

Quindi le due funzioni $F_{\mp}$ vicino ad x_0 sono entrambe monotone, una crescente e l'altra decrescente.

Supponiamo che $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} g(x) = 0$: allora anche $\lim\limits_{x \to x_0^-} F_-(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} F_+(x) = 0$ e per la monotonia delle due funzioni nonché della $g(x)$ (crescente poiché $g'(x) > 0$ a sinistra di x_0) si avrà, a sinistra di x_0, $F_-(x) < 0$ e $F_+(x) > 0$

$$f(x) - (l - \varepsilon)g(x) < 0 \text{ e } f(x) - (l + \varepsilon)g(x) > 0.$$

Pertanto tenendo conto del segno di $g(x)$ (che a sinistra di x_0 sarà negativa) si

[1]Guillaume François Antoine de Sainte Mesme, marchese de l'Hôpital, o de l'Hospital (Parigi, 1661 Parigi, 2 febbraio 1704)

ottiene che nell'intervallo in questione che anche $\frac{f(x)}{g(x)}$ verifica

$$l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$$

e quindi che anche il rapporto $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tenda al limite l per $x \to x_0^-$.

Gli altri risultati si ottengono con ragionamenti analoghi ottenuti da questo apportando le dovute modifiche.