

COGNOME ..... NOME .....  
 MATRICOLA ..... VALUTAZIONE .... + .... = .....

1. ISTRUZIONI

*Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di  $0 \leq x \leq 10$  punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che  $x \geq 6$ . In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di  $0 \leq y \leq 24$  punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se  $x + y \geq 18$ . In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà  $v = \min(28, x + y)$ .*

**Attenzione.** Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. PRIMA PARTE

**Esercizio 0 (punti 0).** Leggere e capire le istruzioni.

**Esercizio 1. (3 punti)** Dire se esiste e in caso positivo calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin 2x|}{\log(1 + 2x)}$$

SOLUZIONE.

Il limite L non esiste

Il limite L esiste e vale

Che il limite non esista si può vedere mostrando che il limite destro e sinistro sono diversi e questo può esser provato in molti modi. Ad esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin 2x|}{\log(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{2x}{\log(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\log(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{2x} \log(1 + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}}}$$

Quest'ultimo si calcola (cfr DISPENSE sui limiti) osservando che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x)^{\frac{1}{2x}} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e \text{ e quindi } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin 2x|}{\log(1 + 2x)} = 1.$$

In modo del tutto analogo, ricordando che per  $x < 0$   $|\sin 2x| = -\sin 2x$ , si ottiene che

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin 2x|}{\log(1 + 2x)} = -1, \text{ da cui la conclusione.}$$

**Esercizio 2. (3,5 punti)** Si indichi con  $S(n)$  la somma dei cubi dei primi  $n$  numeri naturali, cioè

$$S(n) = \sum_{k=1}^n k^3$$

Provare per induzione che  $S(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

SOLUZIONE. La formula è vera per  $n = 1$ . Infatti  $1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = S(1)$ .

Dimostriamo che  $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = S(n) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ &= (n+1)^2 \left( \frac{n^2}{4} + (n+1) \right) = \frac{(n+1)^2((n+2)^2)}{4} = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} \end{aligned}$$

**Esercizio 3. (3,5 punti)** Si consideri la funzione continua  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definita dalla formula

$$f(x) = \frac{-\sin(x) \cos(x)}{1 + \cos(x)^2}.$$

Siano  $F_1$  e  $F_2$  le seguenti funzioni integrali di  $f$ :

$$F_1 = \int_0^x f(t) dt, \quad F_2 = \int_{\pi/2}^x f(t) dt.$$

Determinare la funzione differenza  $F_1 - F_2$ .

SOLUZIONE

Come visto nelle relative DISPENSE,  $F_1 - F_2 = \int_0^{\pi/2} f(t) dt$  e questo integrale si calcola immediatamente osservando che  $\int_0^{\pi/2} f(t) dt = \left| \frac{1}{2} \log(1 + \cos(x)^2) \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} (\log 1 - \log 2) = -\frac{1}{2} \log 2$ .

## 3. SECONDA PARTE

**Esercizio 1. (10 punti)** Si considerino le due funzioni definite su tutto  $\mathbf{R}$  mediante le formule  $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$  e  $g(x) = x^3$  rispettivamente. Si indichi con  $k = g \circ f$

- (1) Dire se la funzione  $k$  è iniettiva
- (2) Dire se la funzione  $k$  è surgettiva
- (3) Determinare il più grande sottoinsieme  $C$  di  $\mathbf{R}$  tale che la funzione  $k$  sia continua su  $C$ .
- (4) Determinare il più grande sottoinsieme  $D$  di  $\mathbf{R}$  tale che la funzione  $k$  sia derivabile su  $D$ .
- (5) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di  $k$ .
- (6) Determinare i punti di massimo e minimo locali di  $k$ .
- (7) Determinare gli eventuali asintoti del grafico di  $k$ .

SOLUZIONE. La funzione  $k = g \circ f$  può essere descritta come

$$k(x) = \frac{x^3 + 3x^2|x| + 3x|x|^2 + |x|^3}{8} = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(Un altro modo di arrivare a questa descrizione era di osservare che  $f = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ .)

- (1) La funzione  $k$  non è iniettiva perché per ogni  $x < 0$   $k(x) = 0$
- (2) La funzione  $k$  non è surgettiva perché non assume mai valori negativi.
- (3)  $C = \mathbf{R}$ . La funzione  $k$  risulta continua in tutto  $\mathbf{R}$  perché fuori dell'origine è composizione di funzioni elementari e in 0 risulta che  $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = k(0) = 0$ .
- (4)  $D = \mathbf{R}$ . Fuori dallo 0 la cosa è evidente. In 0, il limite del rapporto incrementale della funzione  $h$  esiste e vale 0.
- (5) Punti di massimo e minimo assoluti di  $k$ :
  - ) massimi assoluti non ve ne sono in quanto  $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$
  - ) tutti i punti dell'insieme  $x \leq 0$  sono punti di minimo assoluto (la funzione vale zero in ognuno di essi e non assume mai valori negativi in tutto il dominio).
- (6) Punti di massimo e minimo locali di  $k$ :
  - ) tutti i punti dell'insieme aperto  $M = \{x < 0\}$  sono punti di massimo locale poiché essendo la funzione in tale insieme costante, ogni punto  $\bar{x} \in M$  ha un intorno  $U$  ove  $k(x) \leq k(\bar{x})$ ;
  - ) tutti i punti dell'insieme  $\bar{M} = M \cup \{0\}$  sono punti di minimo locale perché per ogni punto  $\bar{x} \in \bar{M}$  esiste un intorno risulta  $k(x) \geq k(\bar{x})$ .
- (7) L'asse delle  $x$  risulta un asintoto orizzontale (per  $x \rightarrow -\infty$ ). Non vi sono altri asintoti.

**Esercizio 2 (4 punti)**

Sia  $h$  un numero naturale. Dire per quali valori di  $h$  esiste il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (h + (-1)^n)n$$

e nel caso calcolarlo.

SOLUZIONE.

Esplicitando il termine  $n$ -esimo della successione abbiamo

$$a_n = \begin{cases} (h-1)n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ (h+1)n & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Pertanto si ha che  $a_n \geq (h-1)n$  per ogni  $n$  e quindi se  $h \neq 0, 1$ , per il teorema del confronto la successione diverge.

Se  $h = 0$  il termine generico  $a_n$  della successione è  $(-1)^n n$  mentre se  $h = 1$  tutti i termini di indice dispari  $a_{2n+1}$  sono nulli, e quindi in entrambi i casi la successione non converge.

**Esercizio 3. (5 punti)**

Sia  $n$  un intero positivo e  $X_n = \{z \in \mathbf{C} | z^n = 1\}$ . Dimostrare che per ogni  $n \geq 5$  esiste almeno un elemento di  $X_n$  nel terzo quadrante aperto, cioè nell'insieme  $Z = \{z = x + iy | x < 0, y < 0\}$ .

SOLUZIONE

Se nessun elemento di  $X_n$  cadesse nel III quadrante la distanza angolare tra due elementi consecutivi sarebbe maggiore di  $\frac{\pi}{2}$ .

Ricordando che, fissato  $n$ , le  $n$  radici  $n$ -esime dell'unità sono  $\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$  per  $k = 0, 1, \dots, n-1$  lo scarto angolare tra due radici  $n$ -esime consecutive è  $\frac{2\pi}{n}$  radianti e

per  $n \geq 5$  risulta  $\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$ .

Si osservi in passant che per  $n = 2, 4$  nessuna radice  $n$ -esima cade nel III quadrante aperto mentre per  $n = 3$  ve ne è una.

**Esercizio 4. (5 punti)**

Si consideri la funzione positiva  $f : [10, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  definita dalla formula

$$f(x) = \frac{6}{x^2 - 9}.$$

Per ogni  $a \in [10, +\infty)$ , consideriamo il trapezoide  $T(f)$  con i lati paralleli all'asse delle Y, racchiuso tra il segmento  $[a, a+1]$  contenuto nell'asse delle ascisse e il grafico della restrizione della funzione su questo intervallo. Provare che l'area di questo trapezoide decresce e tende a 0 per  $a$  che tende a  $+\infty$ .

SOLUZIONE.

L'area del trapezoide  $T(f)$  è espressa

$$m(T(f)) = \int_a^{a+1} \frac{6}{x^2 - 9} dx = \left| \log \frac{x-3}{x+3} \right|_a^{a+1} = \log \frac{a-2}{a+4} - \log \frac{a-3}{a+3} = \log \frac{(a+3)(a-2)}{(a+4)(a-3)}$$

Da questa espressione risulta evidente che  $\lim_{a \rightarrow \infty} m(T) = 0$  e che essendo per  $a \geq 10$

$$\frac{d}{da}m(T(f)) = \frac{-6}{(a+4)(a-3)(a+3)(a-2)} < 0$$

l'area del trapezoide è, per  $a \geq 10$ , una funzione decrescente di  $a$ .