

COGNOME NOME
MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 0. (punti 0) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (punti 3)

Determinare il minimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$, sia vera la disuguaglianza

$$7^n \geq 2^n + 6^n$$

SOLUZIONE

Indichiamo con $d(n)$ la disuguaglianza. La disuguaglianza non è vera per $n = 0, 1$ mentre è vera per $n = 2$ in quanto $49 \geq 4 + 36$. Essendo la disuguaglianza induttiva, cioè $d(n) \Rightarrow d(n + 1)$ la disuguaglianza è vera per ogni $n \geq 2$. Per provare l'induttività si osservi che

$$7^{n+1} = 7^n \cdot 7 \geq (2^n + 6^n)7 = 2^n \cdot 7 + 6^n \cdot 7 \geq 2^n \cdot 2 + 6^n \cdot 6 \geq 2^{n+1} + 6^{n+1}$$

Esercizio 2. (punti 4) Dire se esiste e nel caso calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right)^{x^2}$$

SOLUZIONE

□ NO il limite non esiste

☒ SI il limite esiste e vale $\frac{1}{e}$

Con le usuali manipolazioni algebriche otteniamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2 + 2} \right)^{(x^2+2)-2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{-1}{y} \right)^y}{\left(1 + \frac{-1}{y} \right)^2} = e^{-1}$$

Esercizio 3. (punti 3)

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{\pi}^{2\pi} x^2 \sin(x) dx$$

SOLUZIONE

Con reiterate integrazioni per parti otteniamo

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin(x) dx &= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = \\ &= (-x^2 + 2) \cos x + 2x \sin x + c \end{aligned}$$

Per cui

$$\int_{\pi}^{2\pi} x^2 \sin(x) dx = \left| (-x^2 + 2) \cos x + 2x \sin x \right|_{\pi}^{2\pi} = -5\pi^2 + 4$$

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (punti 8) Si consideri la formula

$$f(x) = x \log \left| \frac{x+2}{3-x} \right|$$

- (1) Determinare il più grande sottoinsieme X di \mathbf{R} tale che la formula definisca una funzione $f : X \rightarrow \mathbf{R}$.
- (2) Determinare il più grande sottoinsieme C di X tale che f sia continua su C .
- (3) Determinare il più grande sottoinsieme D di C tale che f sia derivabile su D .
- (4) Determinare, se ne esistono, i punti di minimo e massimo assoluti di f .
- (5) Determinare gli asintoti del grafico di f .

SOLUZIONE

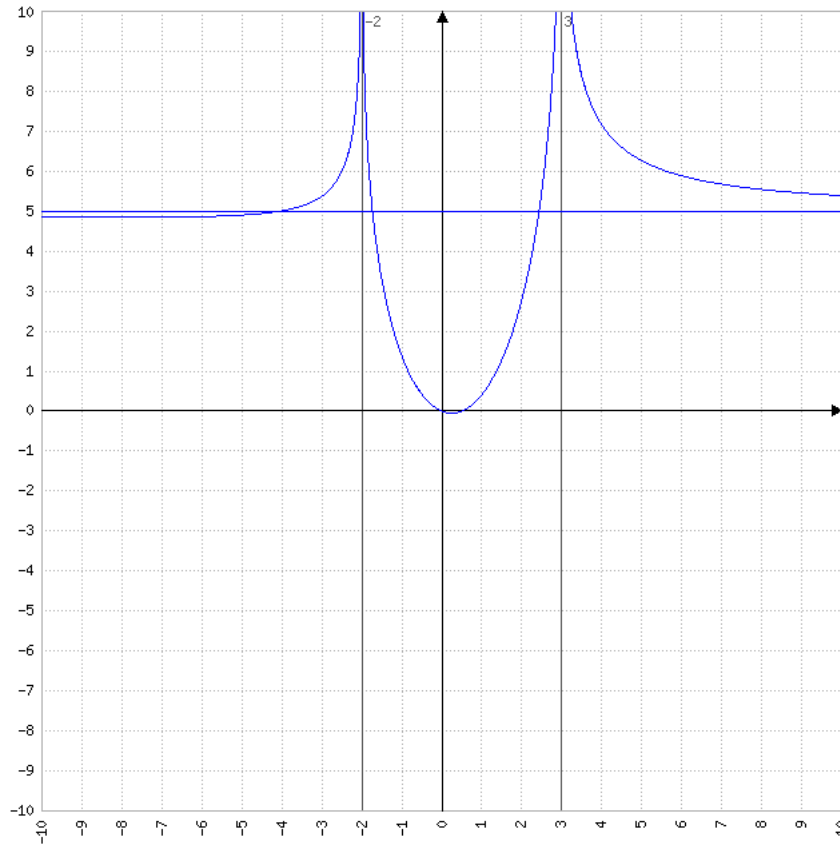
- (1) $X = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$
- (2) $C = X$
- (3) $D = X$
- (4) Vi è almeno un punto di minimo assoluto nell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$, mentre non vi sono massimi assoluti.

Osserviamo che massimi assoluti non esistono in quanto $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$.

Per i minimi si può osservare che la funzione al di fuori dell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$ è strettamente positiva mentre all'interno di tale intervallo è strettamente negativa. Quindi, essendo tale intervallo compatto, la funzione in tale intervallo ha un minimo che quindi risulta essere il minimo assoluto della funzione.

- (5) Gli asintoti del grafico di f sono le rette $x = -2$ e $x = 3$ e la retta $y = 5$ poiché risulta $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left| \frac{x+2}{3-x} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left| \frac{x+2}{3-x} \right|^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left(1 + \frac{5}{x-3} \right)^{x-3+3} = 5$ e analogamente per $x \rightarrow -\infty$

Al fine di rendere più chiara la situazione visualizziamo il grafico della funzione f .



Esercizio 2. (punti 6) Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbf{R}$. Esplicitare completamente (con tutti gli ϵ , δ e quantificatori che servono) il fatto che f non sia derivabile in x_0 .

SOLUZIONE

La funzione f non è derivabile nel punto x_0 se per x tendente a x_0 il limite del rapporto incrementale $RI(x_0, h)$ della funzione o non esiste o esiste ma non è finito.

Quindi dobbiamo esprimere il fatto che ogni numero reale $r \in \mathbf{R}$ non è limite per x tendente a x_0 del rapporto incrementale, cioè che per ogni numero reale esiste un intorno $V_\epsilon = \{y \mid |y - r| < \epsilon\}$ per cui non esiste un intorno $U_\delta = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ di x_0 tale che $RI(U_\delta) \subset V_\epsilon$, cioè esista in U_δ almeno un punto x tale che $RI(x) \notin V_\epsilon$. Quindi

$$\forall r \in \mathbf{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \mid |x - x_0| < \delta \text{ e } |RI(x) - r| > \epsilon$$

Esercizio 3. (punti 6) Si determinino tutte le soluzioni complesse dellequazione

$$z^2 = -4\bar{z}$$

SOLUZIONE

Ponendo $z = a + ib$ l'equazione diventa

$$a^2 - b^2 + 2abi + 4(a - ib) = a^2 - b^2 + 4a + 2ib(a - 2) = 0$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 4a = 0 \\ b(a - 2) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che o $b = 0$, nel qual caso la prima equazione implica o $a = 0$ oppure $a = -4$ mentre se $a = 2$ la prima equazione implica $b = \pm 2\sqrt{3}$. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $0, -4, 2 + 2i\sqrt{3}, 2 - 2i\sqrt{3}$.

Esercizio 4. (punti 4) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(t - 1)y' = -2y$$

Determinare se esiste una soluzione tale che $y(0) = 1$.

SOLUZIONE

La funzione $y = 0$ è soluzione dell'equazione. Supponiamo $y \neq 0$: l'equazione, a variabili separabili, risulta equivalente in $t \neq 1$ a $\frac{dy}{y} = \frac{-2dt}{t-1}$.

Passando alle funzioni integrali abbiamo $\ln |y| = -2 \ln |t - 1| + c$ da cui, eliminando i moduli tenendo conto della costante arbitraria c , otteniamo, per $t \neq 1$.

$$y = \frac{k}{(t - 1)^2}$$

Prendendo $k = 1$ si ha una soluzione tale che $y(0) = 1$.