Analisi I - IngBM - 2013-14
COMPITO – 18.12.2013

COGNOME .... MATRICOLA ....

NOME.................................... VALUTAZIONE ...... + ... = ...

Istruzioni

Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge 19$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v/30$, dove $v = \min(28, x + y)$.

Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1 (punti 1). Sia A un insieme finito con 7 elementi ($|A| = 7$). Sia $P = \{X \subset A | \ |X| \le 3\}$. Determinare il numero di elementi $|P|$ di P.

$|P| =$ perché

Esercizio 2 (3 punti).

a) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la formula $f(x) = \log(|x| - |x - 1|)$ definisce una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.
b) D è un aperto di $\mathbf{R}$?

a) D= Perché b) Si No Perché

Esercizio 3 (2 punti). Calcolare la derivata f' della funzione $f : \{x > 0\} \to \mathbf{R}$ definita da

$$f(x) = e^x \sin(\log(x)) + \log(e^x(1 + x^2)) \ .$$

$f' =$

Esercizio 4 (4 punti).

a) Calcolare gli integrali definiti $I_1 = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)dt$, $I_2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(t)dt$.

b) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione integrale definita da

$$f(x) = \int_1^x \cos(t)dt \ .$$

Esiste $L \in \overline{\mathbf{R}}$ tale che $L = \lim_{x \to +\infty} f(x)$?

a) $I_1 =$ $\qquad\qquad$ $I_2 =$

b) SI. $\qquad$ L=

NO. $\qquad$ Perché

1. Seconda parte

Esercizio 1 (punti 2). Calcolare il limite L

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x}$$

$L =$

Esercizio 2 (punti 12). Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione così definita

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^3}{x^2+1} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Determinare il massimo $k \geq 0$ tale f è k volte derivabile e $f^{(k)}$ è continua (cioè f è di classe $\mathcal{C}^k$.

perché

$k =$

- Dire se la funzione $f(x)$ è surgettiva

Si perché

No perché

- Determinare se esistono un punto $x_0 \in [-1, 1]$ di minimo assoluto e tutti i punti $x_r \in (-1, 1)$ di minimo locale per la restrizione di f.

$x_0 =$

$x_r =$

Perché

- Determinare l'insieme D di definizione della funzione $g(x) = \log(f(x))$ e discutere se g è continua su D.

D=
□ g è continua su D perché
□ g non è continua su D perché

- Calcolare $I = \int_1^2 g(x)dx$

$I =$

Esercizio 3 (punti 10).
Si consideri $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(t,x) = 2x + 3t$ e l'equazione differenziale associata

$$y' = 2y + 3t$$

- Esistono soluzioni costanti del tipo $y =$ costante?

No, non esistono.
Si. Esse sono $y =$

- Determinare l'integrale totale dell'equazione.

$y =$