

November 13, 2013

SULLE FUNZIONI ELEMENTARI DERIVABILI

Svilupperemo e specializzeremo quanto fatto nella nota sulle funzioni elementari continue [EC], a cui ci riferiamo anche per certe notazioni ivi introdotte.

1. GLI INSIEMI DI FUNZIONI $\mathcal{F}^0$ E $\mathcal{C}^0$

Vogliamo definire dei sottoinsiemi $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$ e $\mathcal{C}^0 \subset \mathcal{C}$ rispettivamente, restringendo l'insieme degli insiemi di definizione delle funzioni che prenderemo in considerazione.

Definizione 1.1. Dato un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$, diciamo che $a \in D$ è *interno* se esiste $\epsilon > 0$ tale che $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset D$. Diciamo che $a \in D$ è una *estremità locale sinistra* (risp. *destra* se esiste $\epsilon > 0$ tale che $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap D = [a, a + \epsilon)$ (risp. $(a - \epsilon, a]$). Un sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ si dice *buono* se ogni $a \in D$ è interno oppure è una estremità locale. Se D è buono ed è fatto solo di punti interni, allora diciamo che D è un *aperto* di $\mathbb{R}$.

Per esempio, un intervallo o più in generale l'unione di un numero finito di intervalli sono buoni. Un intervallo è aperto se e solo se è della forma (a, b) , $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Se D è buono, allora ogni punto di D è di accumulazione per D . Poniamo allora $\mathcal{F}^0$ il sottoinsieme di $\mathcal{F}$ formato dalle funzioni definite su sottoinsiemi buoni di $\mathbb{R}$, analogamente $\mathcal{C}^0$ il sottoinsieme di $\mathcal{C}$ formato dalle funzioni continue definite su sottoinsiemi buoni di $\mathbb{R}$.

1.1. Le procedure raffinate $\mathbf{P}^0$. In [EC] abbiamo individuato delle semplici procedure (“somma”, “prodotto”, “valore assoluto”, “reciproco”, “inversa”, “composizione”) che abbiamo genericamente indicato con $\mathbf{P}$. Vogliamo raffinare queste procedure in modo tale che, una volta applicate a partire da funzioni di $\mathcal{F}^0$, producano un'altra funzione di $\mathcal{F}^0$. Indicheremo genericamente come $\mathbf{P}^0$ tali procedure.

Le procedure $\mathbf{P}^0$. Siano $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni in $\mathcal{F}^0$, cioè definite su insiemi buoni.

- Per “somma” e “prodotto”, richiediamo che anche $D \cap D'$ sia buono;
- Per “reciproco” richiediamo che anche $D^* = D \setminus f^{-1}(0)$ sia buono;
- Per “inversa” richiediamo che f sia iniettiva e che $f(D)$ sia buono;
- Per “composizione” richiediamo che per ogni punto interno a di D , $f(a)$ è interno a D' , mentre se a è una estremità locale (destra risp. sinistra) di D allora $f(a)$ è interno a D' , oppure è una estremità locale (destra risp. sinistra) di D' .

Osservazioni 1.2. In effetti per “somma” e “prodotto” la richiesta che $D \cap D'$ sia buono è *sempre* soddisfatta automaticamente (dimostrarlo per esercizio). Se supponiamo che f sia continua, la richiesta per “reciproco” che $D^* = D \setminus f^{-1}(0)$ sia buono è automaticamente verificata; supponiamo per esempio che D sia aperto e che $f(a) \neq 0$, allora per la continuità di f e la “permanenza del segno” esiste $\epsilon > 0$ tale che $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset D^*$ il quale è quindi aperto.

Analogamente a quanto succede per $\mathcal{C}$, per $\mathcal{C}^0$ abbiamo:

Proposizione 1.3. (1) Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{C}^0$ e D' è un sottoinsieme buono di D , allora la restrizione di f a D' appartiene a $\mathcal{C}^0$.

(2) $\mathcal{C}^0$ è chiuso rispetto alle procedure $\mathbf{P}^0$, cioè se applichiamo una procedura $\mathbf{P}^0$ a partire da funzioni che stanno in $\mathcal{C}^0$ allora produciamo un'altra funzione di $\mathcal{C}^0$.

2. FUNZIONI DERIVABILI

Richiamiamo alcuni fatti relativi alle funzioni derivabili, cominciando con la definizione. Intanto richiediamo che $f : D \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{F}^0$, cioè che D sia buono. Allora:

Sia $f : D \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{F}^0$. Diciamo che f è *derivabile su* D se:

- (1) Per ogni punto interno $a \in D$ si ha che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

- (2) Per ogni estremità locale sinistra $a \in D$ si ha che:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = (f')^+(a) \in \mathbb{R}$$

- (3) Per ogni estremità locale destra $a \in D$ si ha che:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = (f')^-(a) \in \mathbb{R}.$$

Nel primo caso $f'(a)$ è detta la derivata di f in a ; nel secondo $(f')^+(a)$ è la derivata destra di f in a ; nel terzo $(f')^-(a)$ è la derivata sinistra di f in a . Per uniformità di notazione, a volte scriveremo semplicemente $f'(a)$ anche nel caso in cui a è una estremità locale. C'è un altro modo equivalente molto espressivo di dire le stesse cose. Per semplicità limitiamoci a considerare il caso di un punto interno a . Indichiamo con $Df(a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione lineare definita da $Df(a)(h) = f'(a)h$, cioè $Df(a)$ è data dalla moltiplicazione per lo scalare $f'(a)$. $Df(a)$ è detta il *differenziale* di f in a . E' chiaro che la derivata e il differenziale in a si ricavano l'una dall'altro in modo automatico, però sono oggetti diversi perchè la derivata è uno scalare mentre il differenziale è una funzione. Possiamo allora riscrivere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) - f(a)) - Df(a)(h)}{h} = 0$$

o, ancora, usando la notazione “o-piccolo” di Landau,

$$(f(a+h) - f(a)) - Df(a)(h) = o(h).$$

Si noti che $g(h) = f(a+h) - f(a)$ considerata come funzione di h è tale che $g(0) = Df(a)(0) = 0$. L'espressione precedente esprime bene l'idea intuitiva che $Df(a)(h)$ è la funzione lineare di h che meglio approssima la $g(h)$ in un intorno di 0 (a volte si dice anche che $Df(a)$ linearizza g in un intorno di 0). Nella letteratura si trovano diverse altre notazioni per indicare la derivata oltre $f'(a)$, per esempio

$$\frac{d}{dx}f(a), \quad \dot{f}(a)$$

Anche noi useremo liberamente l'una o l'altra di queste notazioni.

Se f è derivabile su D , allora la funzione derivata $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow f'(x)$, è un'altra funzione di $\mathcal{F}^0$. Ammesso che esista, possiamo definire la derivata seconda $f'' = (f')'$. Più in generale, per induzione, possiamo definire (ammesso che esista) la derivata n -esima $f^{(n)}$, $n \geq 0$, di f ponendo

- $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$
- $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Definizione 2.1. Diciamo che una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{F}^0$ è di classe $\mathcal{C}^0$ se è continua. Diciamo che è di classe $\mathcal{C}^k$ (e scriveremo $f \in \mathcal{C}^k$) se per ogni $0 \leq m \leq k$ la funzione derivata m -esima $f^{(m)}$ esiste ed è *continua*. Diciamo che f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ se è di classe $\mathcal{C}^k$ per ogni $k \geq 0$.

Vale la seguente importante proposizione.

Proposizione 2.2. Se $f \in \mathcal{F}^0$ è derivabile allora $f \in \mathcal{C}^0$. Più in generale se esistono le funzioni derivata m -esima $f^{(m)}$ per ogni $0 \leq m \leq k+1$, allora $f \in \mathcal{C}^k$. Se esistono le funzioni derivata m -esima $f^{(m)}$ per ogni $m \geq 0$, allora $f \in \mathcal{C}^\infty$.

2.1. Procedure che preservano la derivabilità. Torniamo alle nostre procedure $\mathbf{P}^0$ definite qui sopra. Ci chiediamo se tali procedure, una volta applicate a funzioni derivabili producano un'altra funzione derivabile. Si vede subito che bisogna escludere la procedura “valore assoluto”. Infatti, per esempio, la funzione identità di $\mathbb{R}$, $x \rightarrow x$, è derivabile, ma la funzione $x \rightarrow |x|$ non è derivabile in 0. Consideriamo ora la procedura “inversa”. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è derivabile con derivata $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$; f è bigettiva con funzione inversa data da $f^{-1}(0) = 0$, $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ se $y > 0$, $f^{-1}(y) = -|y|^{1/3}$ se $y < 0$. Si verifica che f^{-1} non è derivabile in 0 (infatti la retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(0, 0)$ è verticale e dunque ha “coefficiente angolare” infinito).

Allora le procedure $\mathbf{P}'$ si ottengono dalle procedure $\mathbf{P}^0$ nel modo seguente:

- Si elimina la procedura “valore assoluto”.
- Per la procedura “inversa” si rafforzano le richieste, richiedendo inoltre che *per ogni* $a \in D$, $f'(a) \neq 0$.
- Le altre procedure restano uguali.

La seguente proposizione riassume importanti proprietà strutturali delle funzioni derivabili.

Proposizione 2.3. (1) Se $f : D \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{F}^0$ è derivabile, D' è un sottoinsieme buono di D , allora la restrizione di f a D' è derivabile.

(2) Le funzioni derivabili sono chiuse rispetto alle procedure $\mathbf{P}'$, cioè se applichiamo una procedura $\mathbf{P}'$ a partire da funzioni derivabili, allora produciamo un'altra funzione derivabile.

In effetti, per ogni procedura $\mathbf{P}'$, conosciamo la formula esplicita per la derivata della funzione risultante. Siano come al solito $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni in $\mathcal{F}^0$ e supponiamo inoltre che siano entrambe derivabili.

Regole di derivazione:

- (“Somma”) Per ogni $a \in D \cap D'$, $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- (“Prodotto”) Per ogni $a \in D \cap D'$, $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.
- (“Reciproco”) Per ogni $a \in D^* = D \setminus f^{-1}(0)$, $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$.
- (“Composizione”) Per ogni $a \in D$, $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.
- (“Inversa”) Per ogni $b = f(a)$, $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Nel caso di “composizione” e “inversa” le formule diventano particolarmente espressive se riformulate in termini delle funzioni differenziali; infatti si ha:

- Per ogni $a \in D$, $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$ cioè “il differenziale della composizione è la composizione dei differenziali”.
- $Df^{-1}(f(a)) = (Df(a))^{-1}$, cioè il “differenziale dell'inversa è l'inversa del differenziale”.

2.2. Funzioni elementari derivabili. Consideriamo lo stesso insieme di funzioni fondamentali che abbiamo usato in [EC] per definire le funzioni elementari continue. Vale il seguente fatto che dimostreremo dopo.

Lemma 2.4. Ogni funzione fondamentale è una funzione $\mathcal{C}^\infty$.

Definiamo $\mathcal{E}'$ l'insieme delle funzioni che si ottengono a partire dalle funzioni fondamentali applicando in successione un numero finito (che però può essere arbitrariamente grande) di procedure $\mathbf{P}'$. Poiché le funzioni derivabili sono chiuse rispetto alle procedure $\mathbf{P}'$, ne segue che ogni funzione in $\mathcal{E}'$ è derivabile; chiameremo quindi $\mathcal{E}'$ l'insieme delle *funzioni elementari derivabili*. Tutte le funzioni elementari continue *polinomiali*, *razionali*, etc. descritte alla fine di [EC] sono anche funzioni elementari derivabili. Vale il seguente Lemma che dimostreremo dopo.

Lemma 2.5. La derivata di ogni funzione fondamentale è elementare derivabile.

Infine possiamo enunciare

Theorem 2.6. Ogni funzione elementare derivabile è $\mathcal{C}^\infty$. L'insieme $\mathcal{E}'$ è chiuso rispetto alla derivazione, cioè se $f \in \mathcal{E}'$ allora anche $f' \in \mathcal{E}'$.

Dim. Il teorema segue dalle proprietà sopra enunciate delle funzioni fondamentali e dalle regole di derivazione enunciate qui sopra. $\square$

Ci resta da trattare le derivate delle funzioni fondamentali.

- Se f è una funzione costante, allora $f'(a) = 0$ per ogni a .
- Se f è la funzione inclusione di un intervallo I , $x \rightarrow x$ (in particolare se f è l'identità di $\mathbb{R}$) allora $f'(a) = 1$ per ogni $a \in I$.
- Calcoliamo per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$(\exp)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(a+h) - \exp(a)}{h}$$

si ha che

$$\exp(a+h) - \exp(a) = \exp(a)(\exp(h) - 1)$$

Dunque

$$(\exp)'(a) = \exp(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(a)$$

abbiamo così verificato che $(\exp)' = \exp$.

- Calcoliamo per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$(\sin)'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}$$

per note formule trigonometriche sappiamo che

$$\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h)$$

da cui

$$\frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h} = \sin(a) \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(a) \frac{\sin(h)}{h}$$

Passando al limite per $h \rightarrow 0$ e ricordando gli opportuni limiti notevoli (vedi la scheda [LIMITI]) si conclude che

$$(\sin)'(a) = \cos(a) .$$

D'altra parte $\cos(a) = \sin(a + \pi/2)$ è composizione di funzioni elementari derivabili; infatti $\cos'(a) = \sin'(a + \pi/2) = \cos(a + \pi/2) = -\sin(a)$.

Abbiamo così completato la nostra discussione. Vedi [DE] per una scheda con le derivate delle principali funzioni elementari derivabili. Concludiamo enunciando (senza dare la dimostrazione) un'altra proprietà interessante delle funzioni elementari derivabili, la cosiddetta *proprietà del prolungamento analitico*.

Proposizione 2.7. *Se f e g sono due funzioni elementari definite su un intervallo aperto I che coincidono su un sotto-intervallo aperto $I' \subset I$, allora f e g coincidono su tutto I .*

Si noti che la proposizione è chiaramente vera per le funzioni fondamentali. Questo suggerisce che potrebbe esserci una dimostrazione per induzione sul numero minimo di procedure $\mathbf{P}'$ necessarie per produrre una funzione data a partire dalle funzioni fondamentali. Comunque questa proprietà può essere dimostrata (con altri metodi) per una classe più ampia di funzioni, dette *analitiche*, che contiene le funzioni elementari. Non avremo però tempo di sviluppare questa importante teoria in questo corso.