Analisi I BM - 2013-14 - Esercizi, foglio 5.

Le nozioni che intervengono negli esercizi sono definite nelle dispense messe in rete.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \max(\sin(x), 1/2)$. 1) Discutere se f è continua.

2) Discutere se f è derivabile.

Esercizio 2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita nel modo seguente: per ogni $x < 0$, $f(x) = \min(0, x^n)$, per ogni $x \geq 0$, $f(x) = \max(0, x^n)$. Al variare di n, determinare il massimo $k \geq 0$ tale che f è di classe $\mathcal{C}^k$.

Esercizio 3. Discutere se la formula $f(x) = \log(\sin(x) - 2)$ definisce una funzione elementare continua definita su $\mathbb{R}$.

Esercizio 4. Discutere se la la seguente affermazione è vera o falsa:

Per ogni funzione elementare continua f definita su $\mathbb{R}$ esiste un'unica successione di procedure $\mathbf{P}$ *che produce f a partire dalle funzioni fondamentali.*

Esercizio 5. Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ tale che la formula $f(x) = \log(\sqrt{|x| - 1} - 1)$ definisce una funzione elementare definita su D. Determinare l'insieme $\mathrm{Int}(D)$ dei punti interni di D. Discutere se la restrizione di f a $\mathrm{Int}(D)$ è derivabile.

Esercizio 6. Discutere se la funzione $f(x) = x^2$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

Esercizio 7. Dimostrare che la funzione $f(x) = x\sin(\dfrac{1}{x})$ definita su $D = \{x \neq 0\}$ è continua. Dimostrare che f si estende ad una funzione continua F definita su tutto $\mathbb{R}$. Discutere se F è derivabile.

Esercizio 8. Dimostrare che la restrizione della funzione esponenziale $f(x) = e^x$ all'intervallo $(-\infty, 0)$ è uniformemente continua.

Esercizio 9. Consideriamo la funzione polimomiale $f(x) = x^6 - x - 1$ definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare che f ha almeno uno zero positivo e uno zero negativo.

Esercizio 10. Consideriamo la funzione polimomiale $f(x) = x^3 - x + 1$ definita su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $f(x)$ ha un unico zero x_0 e dimostrare che $-2 < x^0 < -1$.

Esercizio 11. Siano f e g due funzioni continue definite sull'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Supponiamo che $f(a) > g(a)$ e $f(b) < g(b)$. Dimostrare che esiste $c \in [a, b]$ tale che $g(c) = f(c)$.

Esercizio 12. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$. Dimostrare che f è superiormente limitata ed esiste un punto di massimo assoluto $M \in \mathbb{R}$ per f, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq f(M)$.