Analisi I BM - 2013-14 - Esercizi, foglio 4.

Esercizio 0. Giustificare in almeno due modi diversi che $n^{1/n} \to 1$. Giustificare in almeno tre modi diversi che per ogni $a > 0$, $a^{1/n} \to 1$.

Si ricordi che un sottoinsieme K di $\mathbb{R}$ è compatto per successioni se per ogni successione $a : \mathbb{N} \to K$, esistono una successione estratta a_{n_j} e $b \in K$ tali che $a_{n_j} \to b$. A volte diremo semplicemente che K è compatto, omettendo di dire "per successioni".

Esercizio 1. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, cioè I ha una delle seguenti forme, per qualche $\alpha \leq \beta \in \mathbb{R}$: $I = [\alpha, \beta], (\alpha, \beta], [\alpha, \beta), (\alpha, \beta)(-\infty, \beta], (-\infty, \beta), [\alpha, +\infty), (\alpha, +\infty)$. Dimostrare che se I è compatto per successioni allora è necessariamente chiuso e limitato, cioè $I = [\alpha, \beta]$.

Esercizio 2. (1) Siano $I = [\alpha, \beta]$ e $I' = [\alpha', \beta']$ due intervalli chiusi e limitati. Dimostrare che la loro unione $A = I \cup I'$ e la loro intersezione $B = I \cup I'$ sono sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$.

(2) Supponiamo ora che A sia l'unione di una successione di intervalli chiusi e limitati, cioè $A = \cup_{n\in\mathbb{N}}[\alpha_n, \beta_n]$. E' vero ancora che A è compatto? Stessa domanda per l'intersezione $B = \cap_{n\in\mathbb{N}}[\alpha_n, \beta_n]$.

Esercizio 3. Sia $D \subset \mathbb{R}$. Sia $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dimostrare che i seguenti due fatti sono tra loro equivalenti (ricordiamo che se sono verificati allora si dice che *a è di accumulazione per D*):

- Esiste una successione $c : \mathbb{N} \to D \setminus \{a\}$ tale che $c_n \to a$.
- Per ogni $\epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (D \setminus \{a\}) \neq \emptyset$.

Esercizio 4. Sia $f(x) = \sin(1/x)$ definita su $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dimostrare che per ogni $b \in (-1, 1)$ esiste una successione $a : \mathbb{N} \to D$, tale che $f(a_n) \to b$.

Esercizio 5. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/2} - 1}{(1+x)^{1/3} - 1}$.

Esercizio 6. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(5x)}{x}$.

Esercizio 7. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x^2}{\sin(\pi x)}$.

Esercizio 8. Calcolare, se esiste, $\lim\limits_{x\to +\infty} (\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1})^x$.

Esercizio 9. Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$.

Esercizio 10. Calcolare, se esiste, $\lim_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$.