Analisi I BM - 2013-14 - Esercizi, foglio 3.

Ricordare che ogni numero reale a ammette un unico sviluppo decimale proprio $a = a_0, a_1 a_2 \ldots$, cioe' tale che per ogni $j \geq 1$, $0 \leq a_j \leq 9$ e la successione di interi a_j non e' definitivamente uguale a 9.

Esercizio 0. Siano $a = 1,2468??? \ldots$ e $b = 0,5631??? \ldots$ due numeri reali di cui conosciamo esattamente solo le cifre iniziali indicate dei rispettivi sviluppi decimali propri. Quali cifre decimali conosciamo sicuramente dello sviluppo decimale proprio di $a + b$? E di ab? (Determinarle esplicitamente.)

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste una successione di numeri razionali a_n (cioe' $a_n \in \mathbb{Q}$ per ogni $n \geq 0$) tale che $a_n \to x$.

Si ricordi che data una successione $a : \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\} \to \mathbb{R}$, $a_n := a(n)$, una sottosuccessione - detta anche una successione estratta - e' della forma $a \circ g$, dove $g : \mathbb{N} \to \{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0\}$ e' crescente; di solito si usa la notazione $g(j) = n_j$, cosi' che $n_j < n_{j+1}$ per ogni j.

Esercizio 2. Discutere se le seguenti affermazioni sono vere o false.

- Per ogni successione a_n, esiste una successione estratta a_{n_j} tale che $\{a_n\} = \{a_{n_j}\}$.
- Se una successione a_n diverge all'infinito (cioe' $a_n \to +\infty$) allora la successione e' definitivamente crescente.
- Se una successione a_n non e' superiormente limitata, allora esiste una sottosuccessione a_{n_j} tale che $a_{n_j} \to +\infty$.
- Se una successione a_n e' superiormente limitata allora esiste una sottosuccesione a_{n_j} tale che $a_{n_j} \to L$, dove $L = \sup\{a_n\}$. Stessa affermazione, supponendo in piu' che L non appartiene a $\{a_n\}$ (cioe' L non e' il massimo di $\{a_n\}$).
- Se una successione a_n e' convergente (cioe' $a_n \to x \in \mathbb{R}$) e a_{n_j} e' una sottosuccessione, allora $a_{n_j} \to x$. Se $a_n \to \pm\infty$, allora $a_{n_j} \to \pm\infty$.

Esercizio 3. Sia $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Sia a_n la successione definita per induzione per ogni $n \geq 0$ come segue: $a_0 = a$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a + a_n^2)$. Dimostrare che per ogni $n \geq 0$, $a_n > 0$ e $a_n < a$. Dimostrare che a_n e' convergente. Dimostrare che $a_n \to 1 - (\sqrt{1-a})$.

Esercizio 4. Dimostrare che la successione $a_n = \dfrac{n^2 - 2n}{1 + n^2}$ e' convergente e calcolarne il limite.

Esercizio 5. Dimostrare che la successione $a_n = \dfrac{n-1}{n\sqrt{n}+2}$ e' convergente e calcolarne il limite.

Esercizio 6. Sia a_n una successione a termini positivi, limitata tale che $L = \sup\{a_n\} > 0$. Dimostrare che $a_n^{1/n} \to 1$.

Esercizio 7. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 1$, $b > 0$. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^b} = +\infty$.

Esercizio 8. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} (2^n + 3^n)^{1/n} = 3$.

Esercizio 9. Sia $a > 1$. Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a(n!)}{n} = +\infty$.

Esercizio 10. Sia $a > 0$. Dimostrare che definitivamente $n! > a^n$.