Analisi I BM - 2013-14 - Esercizi, foglio 2.

Gli esercizi muniti di $(*)$ *sono più impegnativi. In certi casi gli esercizi diventano con* $(*)$ *se non si tiene di conto dei suggerimenti.*

Esercizio 1. Dati tre insiemi A, B e C, dimostrare che $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Esercizio 2. Dati due insiemi A e B, dimostrare che $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Esercizio 3. Sia $h = f \circ g$ una funzione composta; dimostrare che:

- Se h è iniettiva allora g è iniettiva;
- Se h e' surgettiva allora f è surgettiva.
- Se $f = g$, h è bigettiva se e solo se f è bigettiva.

Esercizio 4. Si ricordi che $\Delta(A)$ denota la *diagonale* di $A \times A$. Data una funzione $f : A \to A$, dimostrare che esiste un *punto fisso* a per f (cioè esiste $a \in A$ tale che $f(a) = a$) se e solo se $G(f) \cap \Delta(A) \neq \emptyset$.

Esercizio 5. Sia $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza sull'insieme A. Siano $\alpha, \beta \subset A$ due classi di equivalenza rispetto a $\mathcal{R}$. Dimostrare che se $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, allora $\alpha = \beta$.

Ricordare che $|A|$ *denota la cardinalità dell'insieme* A*;* $|A| \leq |B|$ *se esiste un'applicazione iniettiva* $f : A \to B$*;* $|A| = |B|$ *se esiste un'applicazione bigettiva* $f : A \to B$*. Se* A *è finito* $|A|$ *è uguale al numero degli elementi di* A*. Se* A *e* B *sono insiemi finiti è intuitivo e facile da dimostrare che se* $|A| \leq |B|$ *e* $|A| \geq |B|$ *allora* $|A| = |B|$*. La cosa resta vera se* A *e* B *sono insiemi infiniti* (Teorema di Bernstein)*, ma la dimostrazione è difficile.*

Esercizio 6. Su $\mathbb{Z}$ consideriamo la relazione per cui $x\mathcal{R}y$ se e solo se $x - y$ è un multiplo di 5.

- Verificare che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza.
- Dimostrare che le classi di equivalenza formano un insieme finito e determinarne il numero.
- Siano $\alpha, \beta \subset \mathbb{Z}$ due classi di equivalenza; dimostrare che $|\alpha| = |\beta|$.

Esercizio 7. Siano A e B due insiemi (non necessariamente finiti).

- Dimostrare che se esiste un'applicazione surgettiva $f : A \to B$, allora $|A| \geq |B|$).

- Dimostrare che se $|A| = |B|$ allora $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Esercizio 8.($*$) Sia A un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$. Definire esplicitamente applicazioni biunivoche $f : \mathbb{N} \to X$ dove X è uguale rispettivamente a $\mathbb{N} \setminus A$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$,$\mathbb{Q}$ - da cui risulterà che in tutti questi casi $|X| = |\mathbb{N}|$.

Esercizio 9. Sia A un insieme infinito.

- Dimostrare che esiste un'applicazione iniettiva $f : \mathbb{N} \to A$ - da cui segue che $|A| \geq |\mathbb{N}|$. (Suggerimento: definire f per induzione a partire da una funzione di scelta $\phi : \mathcal{P}(A)' \to A$ - cioè tale che per ogni $Y \in \mathcal{P}(A)'$ si ha che $\phi(Y) \in Y$ - definita sull'insieme $\mathcal{P}(A)' \subset \mathcal{P}(A)$ delle parti non vuote di A, ponendo $f(0) = \phi(A)$).

- Dimostrare che esiste un sottoinsieme proprio B di A (cioè $B \subset A$ e $B \neq A$) tale che $|A| = |B|$. (Suggerimento: usare il punto precedente e il fatto già noto che l'affermazione è vera quando $A = \mathbb{N}$).

Dati due insiemi X e Y, ricordare che Y^X denota l'insieme delle applicazioni definite su X a valori in Y; $i(X,Y)$ denota il sottoinsieme di Y^X formato dalle applicazioni iniettive; $s(X,Y)$ denota il sottoinsieme di Y^X formato dalle applicazioni surgettive.

Esercizio 10. Supponiamo che $|X| = 5$ e $|Y| = 3$. Determinare (giustificando la risposta) $|\mathcal{P}(X)|$, $|X^X|$, $|Y^X|$, $|s(X,Y)|$ e $|i(Y,X)|$.

Esercizio 11. Sia A un insieme (non necessariamente finito).

- Dimostrare che $|\mathcal{P}(A)| \geq |A|$.

- ($*$) Dimostrare che non esiste alcuna applicazione surgettiva $g : A \to \mathcal{P}(A)$, da cui segue che $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. (Suggerimento: sia $A \neq \emptyset$ e sia $g : A \to \mathcal{P}(A)$ una qualsiasi applicazione; poniamo $Y = \{x \in A;\ x \notin g(x)\}$. Verificare che non esiste alcun $x \in A$ tale che $g(x) = Y$).

Esercizio 12.($*$)

- Costruire un'applicazione iniettiva $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) - > \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (Suggerimento: ricordare una delle dimostrazione del fatto che $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ quando X è finito e $|X| = n$).

- Costruire un'applicazione iniettiva $g : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$

- Dimostrare che $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}|$. (Suggerimento: usare quanto visto negli esercizi 7 e 8 e applicare il Teorema di Bernstein).

- Supponiamo che un insieme A abbia almeno due elementi distinti $a_0,\ a_1$. Dimostrare che le prime due affermazioni continuano a valere sostituendo $\mathbb{N}$ con A. Resta sempre vera anche la terza affermazione?