October 14, 2014

COMPLEMENTI SUGLI ALLINEAMENTI DECIMALI

1. $\pi = 3,14$

Abbiamo visto, per esempio nella dispensa sui numeri reali, che ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, ammette un unico allineamento decimale proprio

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

cioè tale che:

- $a_0 \in \mathbb{Z}$;
- Per ogni $n \geq 1$, $a_n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq 9$;
- La successione delle *cifre decimali* a_n, $n \geq 1$ non è definitivamente uguale a 9.
- Per ogni $n \geq 1$, $0 \leq a - a_0, a_1 a_2 \ldots a_n < \frac{1}{10^n}$, dove

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots \frac{a_n}{10^n} \ .$$

In altre parole, $a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$ è un numero decimale che approssima per difetto a con un *errore* strettamente minore di $\frac{1}{10^n}$.
Per uniformità di notazione, conveniamo che gli allineamenti decimali dei numeri decimali sono quelli per cui la successione delle cifre è definitivamente uguale a 0:

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_n = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots 000 \ldots \ .$$

Sappiamo inoltre che i numeri razionali sono tutti e soli quei numeri reali con allineamenti decimali periodici, cioè della forma

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \overline{p}$$

dove p sta ad indicare un qualche "pacchetto finito" di cifre che si ripete definitivamente.
Ci possiamo aspettare invece che un numero reale irrazionale possa avere allineamento decimale in cui le cifre si susseguono in modo irregolare e imprevedibile. Questa osservazione conduce a problemi sottili, anche di ordine filosofico che forse qualche studente ha incontrato nei suoi studi liceali. Senza alcuna pretesa di completezza (e di competenza), sviluppiamo un po' questo punto. Anche nel nostro corso per esempio, abbiamo incontrato dei numeri reali definiti e caratterizzati *implicitamente* per mezzo di certe loro proprietà. Per esempio, data una circonferenza C, prendiamo un suo diametro come unità di misura dei segmenti. Allora il risultato della misurazione di ogni segmento è un numero reale che chiamiamo la lunghezza del segmento, per cui, naturalmente, la lunghezza del diametro è uguale a 1. Ammettiamo (è non banale ma si può fare) che si possa estendere la misurazione agli archi (orientati) della circonferenza; allora il numero π è definito come la lunghezza della circonferenza (orientata in modo antiorario).
Un altro numero importante è il numero di Nepero, definito come

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

dove l'esistenza di questo limite (quindi la definizione stessa di e) è stata ricavata applicando risultati qualitativi generali sulla convergenza delle successioni monotone. D'altra parte, la nostra conoscenza *esplicita* di π o di e è solo approssimativa. Per esempio, in prima battuta abbiamo ottenuto per e solo la stima $2 < e < 3$, per cui possiamo dire che 2 approssima per difetto e con un errore < 1.
Si può dimostrare che e e π sono numeri irrazionali per cui i rispettivi allineamenti decimali hanno presumibilmente quelle caratteristiche di irregolarità e imprevedibilità di cui dicevamo prima. D'altra parte si possono sviluppare calcoli e migliorare le stime in modo tale che valga la seguente affermazione:

(*) *Esistono metodi effettivi di calcolo che (in linea di principio) per ogni $n \geq 1$ permettono di determinare* con esattezza *le prime n cifre decimali dei rispettivi allineamenti decimali di π o di e.*

Sopra abbiamo detto "in linea di principio", perché se n è troppo grande tale calcolo non puo' essere concretamente eseguito in un tempo ragionevole, anche utilizzando i calcolatori più avanzati attualmente disponibili. Per esempio, per $n = 5$ si trova:

$$\pi = 3,14159??? \dots ??? \dots, \quad e = 2,71828??? \dots ??? \dots \ .$$

In altre parole possiamo dire che possiamo trovare esplicitamente numeri decimali che approssimano per difetto e oppure π con un errore arbitrariamente piccolo, cioè $< \frac{1}{10^n}$, per n arbitrariamente grande.

Proviamo ad enunciare adesso qualcuna delle questioni sottili a cui alludevamo prima:

- Il fatto di avere caratterizzato implicitamente in modo non ambiguo i numeri reali π o e, rende "accettabile" considerare come effettivamente esistenti i rispettivi allineamenti decimali, di cui d'altra parte possiamo avere solo una conoscenza paziale che riguarda comunque un numero finito (seppure potenzialmente arbitrariamente grande) di cifre? Con una terminologia che rimonta agli antichi greci, è accettabile l' "infinito attuale" dei termini della successione delle cifre dell'allineamento di π o di e? Oppure, è accettabile solo l' "infinito potenziale" che qualifica la nostra conoscenza degli allineamenti alla luce di (*)? (Questa era per esempio la posizione di Aristotele).
- Se accettiamo l' "infinito attuale" di questi sviluppi decimali, dobbiamo in qualche modo accettare che questi esistano di per sé, indipendentemente dalla nostra esperienza conoscitiva. Ma la nozione stessa di allineamento decimale non è in fondo niente altro che un prodotto dell'attività speculativa del cervello umano?
- Nella stessa vena:

  - Dato l'allineamento $\pi = 3,14.....a_n.....$, definiamo l'insieme $A = \{n \in \mathbb{N} |\ a_n = 1\}$. A è davvero un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ "accettabile"?

  - Definiamo $\phi : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, ponendo per ogni $a \in \mathbb{R}$, $\phi(a) = 0$ se e solo se 9 compare tra le cifre dell'allineamento decimale di a. ϕ è davvero una funzione "accettabile"?

Non insistiamo ulteriormente, sperando soltanto che almeno qualche lettore interessato possa convenire che non si tratti di fumisterie ma di problemi concettuali seri.

Qual è l'atteggiamento prevalente tra i matematici "militanti" a proposito di questi problemi? In modo parecchio grossolano possiamo dire che:

- Nello sviluppo delle teorie matematiche, prevalentemente i matematici (che in generale non sono filosofi e nemmeno "logici") accettano senza troppi problemi l' "infinito attuale" (ed altre ben più allarmanti "mostruosità").
- L' "infinito potenziale" e un atteggiamento generalmente più "costruttivo", si impongono per esempio quando si usa la matematica per modellizzare aspetti concreti della realtà (fisica, economica, biologica), soprattutto quando si manipolano i risultati di misurazioni che rappresentano numericamente le grandezze in gioco, necessariamente in modo approssimato, a meno di un determinato errore. Svilupperemo un po' questo punto nel paragrafo successivo.

2. Sulla propagazione dell'errore

Come sopra fissiamo $n = 5$,

$$\pi = 3,14159??? \dots ??? \dots, \quad e = 2,71828??? \dots ??? \dots \ .$$

Con questo vogliamo dire che in questo momento conosciamo esattamente le prime 5 cifre decimali dei due allineamenti, ma siamo del tutto ignoranti riguardo alle cifre successive. Cosa possiamo dire con certezza dell'allineamento di $\pi + e$? Consideriamo intanto i due numeri decimali

$$3,14159, \ 2,71828 \ .$$

Probabilmente fin dalle scuole elementari sappiamo calcolare "in colonna" la loro somma senza problemi, per cui

$$3,14159 + 2,71828 = 5,85987 \ .$$

Vediamo in che misura, tenendo conto della nostra attuale ignoranza, possiamo estrarre da quest'ultimo numero decimale informazioni certe sull'allineamento di $\pi + e$. Abbiamo che

$$0 < (\pi + e) - 5,85987 < \frac{2}{10^5}$$

ne segue che non possiamo decidere tra

$$\pi + e = 5,85987????????\ldots$$

e

$$\pi + e = 5,85988????????\ldots$$

per cui il massimo che possiamo concludere sicuramente è che

$$\pi + e = 5,8598?????????\ldots\ .$$

Se prendiamo $n = 6$ si può calcolare che

$$\pi = 3,141592????\ldots\quad e = 2,718281???????\ldots$$

e ragionando in modo simile si conclude che sicuramente:

$$\pi + e = 5,85987????????\ldots\ .$$

E' inoltre chiaro che quanto abbiamo fatto qui sopra per $n = 5$ non vale solo per π, e, ma anche per tutte le coppie di numeri reali a, b tali che:

$$a = 3,14159???\ldots???\ldots,\quad b = 2,71828???\ldots???\ldots$$

e analogamente per $n = 6$. Una lezione generale che possiamo trarre da questi esempi è che se vogliamo determinare esattamente l'allineamento di una somma $a + b$ a meno di un errore minore di $\frac{1}{10^n}$, occorre conoscere gli allineamenti di a e b a meno di errori strettamente piu' piccoli (oppure che l'errore per gli addendi si propaga in generale in un errore piu' grande per la somma). Considerazioni simili valgono anche per il prodotto di due numeri.

Nel descrivere in modo affidabile i risultati numerici di un'esperienza di laboratorio in cui per esempio si sono misurate certe grandezze a meno di un determinato errore, e si considerano poi i valori di altre grandezze composite ottenute, per esempio, "sommando" le grandezze iniziali, è essenziale tenere bene sotto controllo questi fenomeni di propagazione dell'errore. Se si usano strumenti di calcolo automatico, bisogna essere ben certi che queste preoccupazioni siano incorporate e soddisfatte nei programmi utilizzati. Probabilmente questi temi saranno studiati in modo approfondito in corsi futuri del corso di laurea.

3. $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$

Sappiamo in generale che se A è un insieme infinito, allora $|A| \geq |\mathbb{N}|$. Un'applicazione classica degli allineamenti decimali permette di dimostrare che $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$, cioè non esiste alcuna applicazione bigettiva $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Poichè $\mathbb{R}$ è in corrispondenza biunivoca con l'insieme D degli allineamenti decimali propri, basta dimostrare che ogni applicazione iniettiva $\phi : \mathbb{N} \to D$ non è surgettiva. Per ogni $n \geq 0$, sia

$$\phi(n) = a_{0,n}, a_{1,n}a_{2,n}\ldots a_{m,n}\ldots\ .$$

La seguente costruzione "lungo la diagonale" (dovuta a Cantor) produce un allineamento decimale proprio $b_0, b_1b_2\ldots$ che non appartiene all'immagine di ϕ. Allora b_0 è qualsiasi intero diverso da $a_{0,0}$. Per ogni $n \geq 1$, la cifra b_n è definita secondo la seguente regola:

- Se $a_{n,n} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, allora $b_n = 7$.
- Se $a_{n,n} \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$, allora $b_n = 3$.

L'allineamento così costruito è proprio perché addirittura 9 non appare tra le sue cifre decimali. Inoltre non può essere uguale ad alcuno degli allineamenti $\phi(n)$ perché per ogni $n \geq 0$ $b_n \neq a_{n,n}$.

$\square$