

## Un risultato di convergenza variazionale per funzionali di tipo Ginzburg-Landau in dimensione qualunque

GIOVANNI ALBERTI (\*)

**Summary.** – *We describe an approach via  $\Gamma$ -convergence to the asymptotic behaviour of (minimizers of) complex Ginzburg-Landau functionals in any space dimension, summarizing the results of a joint research with S. Baldo and G. Orlandi [ABO1], [ABO2].*

SUNTO. – Il comportamento asintotico delle soluzioni di certe equazioni ellittiche variazionali dipendenti da parametro, o meglio dei punti di minimo dei funzionali associati, può essere studiato definendo un opportuno problema variazionale limite, e.g. tramite la nozione di  $\Gamma$ -convergenza. In collaborazione con S. Baldo (\*\*\*) e G. Orlandi (\*\*\*) (cfr. [ABO1], [ABO2]), abbiamo utilizzato questo approccio per studiare i minimi di funzionali di tipo Ginzburg-Landau in dimensione arbitraria, vale a dire

$$F_\varepsilon(u) := \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u),$$

dove  $u$  è definita su un dominio regolare di  $\mathbb{R}^n$  ed ha valori in  $\mathbb{R}^2$  e  $W(u)$  è un potenziale positivo che si annulla solo per  $|u| = 1$ , ottenendo che nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  i minimi di  $F_\varepsilon$ , o, meglio, i determinanti Jacobiani ad essi associati, convergono in senso opportuno ad una superficie minima di codimensione due.

Lo studio del comportamento asintotico di questi funzionali è stato oggetto di molte ricerche in anni recenti, in particolare dopo i risultati di F. Bethuel, H. Brezis e F. Hélein in dimensione due (cfr. [BBH]), per arrivare ai recenti risultati di T. Rivière, F.-H. Lin, E. Sandier ed altri in dimensione superiore (cfr. [LR], [Ri], [Sa]). Una delle caratteristiche salienti dell'approccio variazionale da noi proposto è la quasi immediata riduzione del caso di dimensione generale al caso di dimensione due, che sottolinea la natura essenzialmente bidimensionale del problema. Da questo punto di vista, è assolutamente fondamentale l'analogia con il comportamento dei funzionali di Ginzburg-Landau

---

(\*) Comunicazione presentata a Napoli in occasione del XVI Congresso U.M.I.

(\*\*) Dipartimento di Matematica, Università della Basilicata, 85100 Potenza.

(\*\*\*) Dipartimento Scientifico e Tecnologico, Università di Verona, 37100 Verona.

scalari, o funzionali di Cahn-Hilliard, per cui l'equivalente del nostro risultato di convergenza variazionale è il noto teorema di L. Modica e S. Mortola (cfr. [MM1], [MM2], [Mo]). Risultati di convergenza variazionale analoghi ai nostri sono anche l'oggetto di una ricerca condotta contemporaneamente ed indipendentemente da R. Jerrard e H.M. Soner [JS2].

IL PROBLEMA DI PARTENZA. – L'oggetto di questa ricerca è lo studio del comportamento asintotico, nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , dei minimi  $u_\varepsilon$  dei funzionali

$$F_\varepsilon(u) := \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u) \quad (1)$$

dove

- $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $n \geq 2$ , e  $|\nabla u|$  è la norma euclidea della matrice  $\nabla u$ ,
- $W(u)$  è un potenziale positivo che si annulla solo per  $|u| = 1$ .

Si noti che  $F_\varepsilon$  si annulla su tutte le funzioni costanti di modulo uno, e quindi i minimi sono non banali solo in presenza di un qualche vincolo, tipicamente sul dato al bordo. Tuttavia nei casi considerati, e soprattutto per gli aspetti qualitativi del comportamento dei minimi su cui si pone l'accento, si presuppone che la natura di questo vincolo sia sostanzialmente irrilevante.

ALCUNE VARIANTI. – Il problema summenzionato ammette molte varianti e generalizzazioni, non tutte peraltro facilmente riconducibili al caso base. Tra queste, vorrei ricordare le seguenti:

- $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  con  $n \geq k$ , ed  $F_\varepsilon(u)$  è dato da <sup>(1)</sup>

$$F_\varepsilon(u) := \int |\nabla u|^p + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u); \quad (2)$$

- $F_\varepsilon$  è definito su sezioni di fibrati su una varietà, invece che per funzioni su un dominio di  $\mathbb{R}^n$  (cfr. [BO], [Ri]);
- il luogo di zeri di  $W$  ha una topologia più complessa della sfera  $S^{k-1}$ ;
- sono presenti dei termini aggiuntivi in (1), come succede per quasi tutti i funzionali derivati da modelli fisici;
- il termine  $\int |\nabla u|^2$  in (1), ovvero  $\int |\nabla u|^p$  in (2), viene sostituito da un integrale anisotropo del gradiente, oppure da un termine non-locale (energia di interazione) del tipo

$$\iint J(x' - x) |u(x') - u(x)|^2 dx' dx, \quad (3)$$

opportunamente riscalato in  $\varepsilon$ .

---

<sup>(1)</sup> In particolare, vengono detti funzionali di G.-L. scalari, o anche di Cahn-Hilliard, quelli dati da  $p = 2$  e  $k = 1$ , e funzionali di G.-L. complessi quelli dati da  $p = 2$ ,  $k = 2$ , ovvero quelli in (1).

MOTIVAZIONI. – Le ragioni alla base dello studio di questo tipo di problemi di perturbazione singolare sono di due ordini. Da un punto di vista più strettamente matematico, è stato osservato da tempo che i funzionali di G.-L. scalari, cioè quelli in (2) con  $k = 1$  e  $p = 2$ , approssimano il perimetro, ed i minimi corrispondenti convergono ad insiemi di perimetro minimo (cfr. Teorema 3 e commenti seguenti). Per analogia, ci si aspetta che per  $k$  arbitrario i funzionali in (2) approssimino in qualche senso il funzionale dell'area per varietà di codimensione  $k$ , ovvero di codimensione due nel caso particolare dei funzionali di G.-L. complessi, cioè quelli definiti in (1). Dare una dimostrazione rigorosa di quest'ultimo enunciato è lo scopo principale di questa ricerca.

Da un altro punto di vista, i minimi di (1) in dimensione due con dato al bordo prescritto  $g$  possono essere utilizzati per studiare le mappe armoniche da  $\Omega$  in  $S^1$  nel caso in cui non esistano mappe da  $\Omega$  in  $S^1$  con traccia  $g$  sul bordo ed energia finita<sup>(2)</sup>.

Infine, funzionali del tipo (1) appaiono nella modellizzazione della separazione di fase in certi fluidi (cfr. [CH]<sup>(3)</sup>) e delle transizioni di fase nei superconduttori o in certi superfluidi (cfr. [GL], [GP]<sup>(4)</sup>, vedi anche [JT] per una trattazione di alcuni aspetti più specificamente matematici), come di diversi altri fenomeni fisici<sup>(5)</sup>.

In tutti questi casi il parametro  $\varepsilon$  rappresenta una lunghezza con un preciso

---

<sup>(2)</sup> Ad esempio quando  $\Omega$  è il disco unitario  $B^2$  del piano e  $g : \partial B^2 = S^1 \rightarrow S^1$  ha grado diverso da 0. L'ostruzione è di natura topologica: le mappe nello spazio di Sobolev  $W^{1,2}(B^2, S^1)$ , pur non essendolo necessariamente, si comportano sotto molti aspetti come mappe continue. Il motivo è che  $p = 2$  è l'esponente critico per l'immersione di Sobolev in dimensione due, la situazione infatti cambia per mappe in  $W^{1,2}(B^3, S^2)$ , come ad esempio  $x/|x|$ . Per queste ed altre questioni collegate vedi [BCL], [BZ].

<sup>(3)</sup> In questo caso  $u$  è un parametro d'ordine scalare che rappresenta la densità relativa delle due fasi del fluido in ogni punto, cosicché i valori  $+1$  e  $-1$  corrispondono alla presenza di una sola fase (stati puri). La presenza nell'energia  $F_\varepsilon$  del potenziale  $W$  privilegia gli stati puri  $\pm 1$  (separazione di fase), mentre il termine di gradiente penalizza la variazione di  $u$  (tensione superficiale); l'energia va minimizzata tenendo fisso il rapporto volumetrico tra le fasi, ovvero prescrivendo il valor medio di  $u$  (e non il valore al bordo).

<sup>(4)</sup> In entrambi i casi  $u$  rappresenta un parametro d'ordine complesso; al posto di un vincolo sul dato al bordo si ha un termine aggiuntivo nell'energia, che corrisponde nel secondo caso al contributo del campo magnetico imposto. Il comportamento dei minimi di questi funzionali non è in realtà immediatamente riconducibile a quello dei minimi di (1), ma è stato studiato usando tecniche analoghe.

<sup>(5)</sup> Un funzionale del tipo  $\int |\nabla \nabla u|^2 + \varepsilon^{-2} W(\nabla u)$  è stato recentemente pro-

significato fisico e solitamente molto piccola rispetto agli altri parametri rilevanti, ragion per cui ha senso studiare il comportamento dei minimi nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , invece che per  $\varepsilon$  fissato.

UN SEMPLICE CALCOLO NEL CASO SCALARE. – Vorrei ora illustrare un semplice conto che aiuta a capire cosa ci si debba aspettare dai minimi di  $F_\varepsilon$ . Cominciamo dai funzionali di G.-L. scalari soggetti al vincolo di volume  $\int u = m$ , dove  $m$  è un numero fissato compreso tra  $-1$  ed  $1$  (cfr. Nota 3).

In questo caso, il secondo termine in  $F_\varepsilon$  tende a privilegiare le funzioni  $u$  con valori vicini a  $\pm 1$ , mentre il primo termine penalizza la variazione di  $u$ . Per  $\varepsilon$  piccolo, il secondo prevale, ed il minimo  $u_\varepsilon$  si troverà tra le funzioni che assumono valori vicini a  $\pm 1$ . D'altra parte, per via del vincolo sulla media di  $u$ , devono essere presenti sia la fase  $\{u_\varepsilon \simeq +1\}$  che la fase  $\{u_\varepsilon \simeq -1\}$ , separate da una sottile intercapedine  $T$  dove avviene la transizione di  $u$  tra i valori  $\pm 1$ .

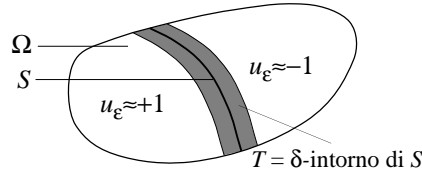


FIGURA 1

Supponendo ora che  $W(u_\varepsilon)$  sia trascurabile fuori di  $T$ , che  $T$  sia il  $\delta$ -intorno di una ipersuperficie  $S$  dipendente da  $\varepsilon$  (cfr. Fig. 1), e che  $u_\varepsilon$  abbia dunque gradiente di ordine  $1/\delta$  in  $T$ , possiamo dare una stima approssimativa di  $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ :

$$\int |\nabla u_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u_\varepsilon) \sim \left( \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \cdot \text{vol}(T) \sim \left( \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \delta \cdot \text{area}(S)$$

(dove “vol” e “area” indicano rispettivamente le misure  $n$ - ed  $(n-1)$ -dimensionale). L'ultimo termine può essere ottimizzato prendendo  $\delta \sim \varepsilon$ , per cui

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon} \text{area}(S). \quad (4)$$

Ne deduciamo che nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  la striscia di transizione del minimo  $u_\varepsilon$  ha larghezza di ordine  $\varepsilon$ , mentre  $S$  minimizza l'area tra tutte le superfici ammissibili, cioè quelle che separano  $\Omega$  in due parti  $\Omega^+$  ed  $\Omega^-$  in modo da soddisfare

---

posto nella modellizzazione delle vescicole (“blisters”) nelle pellicole sottili in presenza di compressione del substrato; ci sono inoltre forti analogie con le energie che modellano alcuni cristalli liquidi o i fenomeni di micromagnetizzazione, in particolare nelle pellicole ferromagnetiche (cfr. [JK]).

il vincolo di volume  $\text{vol}(\Omega^+) - \text{vol}(\Omega^-) = m \text{vol}(\Omega)$ . In altre parole i minimi  $u_\varepsilon$  convergono ad una funzione  $u$  a valori  $\pm 1$  che soddisfa il vincolo di volume  $\int u = m$ , scelta in modo tale da minimizzare l'area dell'interfaccia tra le fasi  $\{u = +1\}$  ed  $\{u = -1\}$ .

Queste conclusioni, pur essendo state ottenute con approssimazioni e semplificazioni assai rozze, sono fondamentalmente corrette, e possono essere facilmente confermate da uno sviluppo asintotico formale meno approssimativo<sup>(6)</sup>. Tuttavia, per quanto più accurato, tale metodo si basa sempre su ipotesi a priori (e.g., che l'insieme di transizione  $T$  si configuri come un  $\delta$ -intorno di una superficie regolare  $S$ ). Una dimostrazione rigorosa di questo enunciato è stata invece data da L. Modica e S. Mortola (cfr. [MM1], [MM2], [Mo]) determinando il limite nel senso della  $\Gamma$ -convergenza dei funzionali  $F_\varepsilon$ .

$\Gamma$ -CONVERGENZA E TEOREMA DI MODICA-MORTOLA. — A questo punto è il caso di richiamare brevemente la nozione di  $\Gamma$ -convergenza, in una versione opportunamente semplificata (cfr. [Al], vedi invece [DM] per un'esposizione più dettagliata).

---

<sup>(6)</sup> In effetti la (4) suggerisce uno sviluppo del tipo  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\Psi(S) + o(\varepsilon^{-1})$ , dove  $\Psi(S)$  è dell'ordine dell'area di  $S$ . Questo non significa necessariamente che  $\Psi(S)$  coincida a meno di costanti con  $\text{area}(S)$ —anche se per ragioni di isotropia ciò sembra assai ragionevole—e non è dunque corretto dedurne la minimalità di  $S$ . L'imprecisione nella (4) è essenzialmente dovuta all'aver maggiorato  $|\nabla u|$  con una stima approssimativa della costante di Lipschitz di  $u$  all'interno della striscia di transizione  $T$ . Si può ottenere uno sviluppo più preciso supponendo che  $u_\varepsilon$  sia della forma  $u_\varepsilon(x) = \phi(\varepsilon^{-1}d_S(x))$ , dove  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$  è una funzione da determinare con limite  $\pm 1$  a  $\pm\infty$ ,  $d_S$  è la distanza orientata da un'ipersuperficie  $S$  da determinare, ed il fattore  $\varepsilon^{-1}$  incorpora il fatto che lo spessore della zona di transizione  $T$  è di ordine  $\varepsilon$ . Si ha allora

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_{\mathbb{R}} |\phi'|^2 + W(\phi) \right] \cdot \text{area}(S) + O(1).$$

Il valore minimo dell'integrale tra parentesi quadre si ottiene quando  $\phi$  coincide a meno di traslazioni con la soluzione del problema di Cauchy  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi' = W^{1/2}(\phi)$ —cioè l'equazione di Eulero-Lagrange  $2\phi'' = W'(\phi)$  opportunamente integrata—e vale  $\sigma := 2 \int_{\mathbb{R}} W^{1/2}(\phi) \phi' = 2 \int_{-1}^1 W^{1/2}$ ; dunque

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{area}(S) + O(1).$$

Questa  $\phi$  viene chiamata *profilo ottimale* per la transizione di fase, ed ha un ruolo fondamentale anche nella dimostrazione del Teorema 3 (cfr. [Al]).

DEFINIZIONE 1. – Sia  $X$  uno spazio metrico, e sia  $F_\varepsilon : X \rightarrow [0, +\infty]$  una successione di funzioni semicontinue inferiormente. Diciamo che  $F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge ad  $F$  se sono verificate le seguenti condizioni<sup>(7)</sup>:

- $\forall x \in X, \forall x_\varepsilon \rightarrow x$  si ha  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x_\varepsilon) \geq F(x)$ ;
- $\forall x \in X, \exists x_\varepsilon \rightarrow x$  tale che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(x_\varepsilon) = F(x)$ .

Diciamo inoltre che le funzioni  $F_\varepsilon$  sono equicoerive se vale la seguente condizione di compattezza:

- se  $F_\varepsilon(x_\varepsilon) \leq C < +\infty$ , allora la successione  $(x_\varepsilon)$  è precompatta in  $X$ .

A partire da questa definizione si deduce facilmente la seguente proprietà fondamentale della  $\Gamma$ -convergenza.

PROPOSIZIONE 2. – Se  $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$  in  $X$ , allora i corrispondenti valori minimi (o gli estremi inferiori dei valori) convergono. Se inoltre  $x_\varepsilon$  è un punto di minimo di  $F_\varepsilon$  per ogni  $\varepsilon$ , ed  $x$  è un punto d'accumulazione di  $x_\varepsilon$ , allora  $x$  è un punto di minimo di  $F$ .

Dunque il comportamento asintotico dei minimi di una successione di funzionali  $F_\varepsilon$  (su uno spazio di funzioni  $X$ ) può essere almeno in parte descritto individuando il  $\Gamma$ -limite di  $F_\varepsilon$ . Va qui sottolineato che la conoscenza del  $\Gamma$ -limite si traduce in informazioni sul comportamento dei minimi solo se quest'ultimi sono precompatti in  $X$ . Questa condizione influenza in modo determinante la scelta della topologia su  $X$ , e di conseguenza anche la forma del  $\Gamma$ -limite<sup>(8)</sup>, e spiega la necessità di verificare, oltre alla  $\Gamma$ -convergenza, anche la condizione di compattezza data nella Definizione 1.

Infine, il  $\Gamma$ -limite  $F$  deve avere una forma non banale: se per esempio risultasse identicamente uguale ad una costante, ogni punto sarebbe di minimo per  $F$ , e quindi non otterremmo alcuna informazione sul comportamento dei minimi di  $F_\varepsilon$ . A questo proposito è importante osservare che riscalarare i funzionali  $F_\varepsilon$  moltiplicandoli per un'opportuna costante positiva (dipendente da  $\varepsilon$ ) non cambia i punti di minimo, ma può alterare in maniera significativa il  $\Gamma$ -limite; tipicamente si cerca di far sì che i valori minimi non divergano né tendano a zero.

---

<sup>(7)</sup> Dette rispettivamente disuguaglianza del  $\Gamma$ -liminf e del  $\Gamma$ -limsup. Insieme equivalgono alla convergenza nel senso di Kuratowski degli epigrafici delle funzioni  $F_\varepsilon$ , intesi come insiemi chiusi di  $X \times \mathbb{R}$ .

<sup>(8)</sup> Per esempio, se  $\phi$  è una funzione periodica su  $\mathbb{R}$  compresa tra due costanti positive, il  $\Gamma$ -limite di  $F_\varepsilon(u) := \int_0^1 \phi(t/\varepsilon)|\dot{u}|^2 dt$  sullo spazio  $W_g^{1,2}(0,1)$  delle funzioni di Sobolev con dato al bordo uguale a  $g$  cambia a seconda che si consideri la metrica indotta dalla norma  $W^{1,2}$  oppure dalla norma  $L^2$ ; peraltro solo la seconda assicura la necessaria compattezza dei minimi.

Tornando ai funzionali di G.-L. scalari, nel paragrafo precedente abbiamo ottenuto uno sviluppo indicativo del tipo  $F_\varepsilon(u) = \varepsilon^{-1} \cdot \text{area}(S)$  (cfr. formula (4) e Nota 6); questo suggerisce che, una volta riscaldati i funzionali  $F_\varepsilon$  di un fattore  $\varepsilon$ , il  $\Gamma$ -limite corrispondente sia finito solo sulle funzioni  $u$  = tali che  $|u| = 1$  q.o., e risulti in tal caso proporzionale all'area dell'interfaccia tra le fasi  $\{u = +1\}$  ed  $\{u = -1\}$ , cioè l'area dell'insieme singolare  $Su$ . Vale infatti il seguente teorema (cfr. [MM1], [MM2], [Mo]):

TEOREMA 3. – *I funzionali riscaldati  $\varepsilon F_\varepsilon$  sono equicoercivi in  $L^1(\Omega)$ , e  $\Gamma$ -convergono a*

$$F(u) := \begin{cases} \sigma \cdot \text{area}(Su) & \text{se } |u| = 1 \text{ q.o.}, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad (5)$$

dove  $\sigma$  è la costante  $2 \int_{-1}^1 W^{1/2}$ , cfr. Nota 6.

Da questo risultato<sup>(9)</sup> e dalla Proposizione 2 segue che i minimi di  $F_\varepsilon$  con il solito vincolo di volume convergono a minimi di  $F$ , ovvero, come già detto, a funzioni  $u$  a valori  $\pm 1$  scelte in modo da soddisfare il vincolo di volume  $\int u = m$  e minimizzare l'area dell'interfaccia tra le fasi.

OSSERVAZIONE 4. – Si rende qui necessaria un'importante precisazione. Per com'è formulato in (5),  $F$  è ben definito per le funzioni  $u$  a valori  $\pm 1$  il cui insieme singolare è una varietà di codimensione uno sufficientemente regolare. D'altra parte l'approccio variazionale si basa su un lemma di compattezza in  $L^1(\Omega)$ , e presuppone quindi che  $F$  sia definito per ogni funzione misurabile  $u : \Omega \rightarrow \pm 1$ , e non è così ovvio cosa si debba intendere per area dell'insieme singolare di una tale funzione, o equivalentemente per perimetro di un generico insieme misurabile<sup>(10)</sup> quale infatti è  $\{u = +1\}$ . Nel caso specifico si deve

---

<sup>(9)</sup> Più precisamente, da questo stesso teorema di  $\Gamma$ -convergenza per lo spazio  $X$  delle funzioni  $u \in L^1(\Omega)$  che soddisfano il vincolo di volume  $\int u = m$ . Si osservi che questo enunciato non segue automaticamente dal Teorema 3 perché in generale la  $\Gamma$ -convergenza non si eredita ai sottospazi (non è detto infatti che sia ancora soddisfatta la disuguaglianza del  $\Gamma$ -limsup). Nel caso specifico, tuttavia, il passaggio da uno spazio all'altro richiede solo minime modifiche della dimostrazione.

<sup>(10)</sup> Infatti, quale che sia la nozione di misura  $(n - 1)$ -dimensionale utilizzata, definendo il perimetro di un insieme in  $\mathbb{R}^n$  semplicemente come la misura  $(n - 1)$ -dimensionale della frontiera topologica si avrebbero insiemi di perimetro infinito che sono però approssimabili da insiemi regolari con perimetri equilimitati (per esempio un'unione disgiunta di palle  $B_i$  di raggio  $2^{-i}$  la cui frontiera ha misura di Lebesgue positiva). In altre parole, questo perimetro non sarebbe semicontinuo inferiormente (e.g., rispetto alla metrica  $L^1$ ), mentre sappiamo che  $F$  deve esserlo, come ogni  $\Gamma$ -limite.

prendere il perimetro nel senso di Caccioppoli di  $\{u = +1\}$  all'interno di  $\Omega$ , cioè metà della variazione totale  $\int |Du|$  della derivata distribuzionale di  $u$ , che corrisponde anche alla misura (di Hausdorff)  $(n-1)$ -dimensionale dell'insieme delle singolarità *essenziali* di  $u$ , ovvero dei punti in cui  $u$  non ammette limite in senso approssimato.

UN SEMPLICE CALCOLO NEL CASO COMPLESSO. – Consideriamo adesso i minimi dei funzionali di G.-L. complessi quando  $\Omega$  è un dominio semplicemente connesso del piano e si prescrive il dato al bordo  $g$ , dove  $g : \partial\Omega \rightarrow S^1$  è una funzione regolare di grado  $d > 0$ . Si vede che per  $\varepsilon$  piccolo, il secondo termine in  $F_\varepsilon$  forza i minimi  $u_\varepsilon$  ad assumere valori di modulo assai vicino ad 1. D'altra parte, preso qualunque  $\rho < 1$  positivo, l'insieme  $T$  dei punti di  $\Omega$  dove  $|u_\varepsilon| \leq \rho$  non può essere vuoto: se infatti così fosse, la mappa  $u_\varepsilon/|u_\varepsilon|$  sarebbe ben definita e continua, e composta con un'omotopia di  $\partial\Omega$  ad un punto (che esiste perché  $\Omega$  è semplicemente connesso) permetterebbe di costruire un'omotopia di  $g$  ad una costante (come mappe da  $\partial\Omega$  in  $S^1$ ), violando l'invarianza del grado per omotopia<sup>(11)</sup>.

Siccome il ruolo di  $T$  è, per così dire, di distruggere la semplice connessione di  $\Omega$  (e non la connessione, come invece succede nel caso scalare), è ragionevole assumere in prima approssimazione che  $T$  sia l'unione di un numero imprecisato di dischi  $T_i$  di raggio  $\delta_i$  sul cui bordo  $u_\varepsilon$  ha grado  $d_i$  (cfr. Fig. 2). Ovviamente si ha  $\sum d_i = d$ .

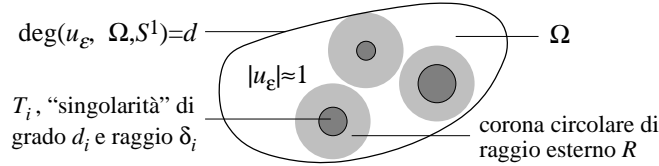


FIGURA 2

Nello stimare il valore di  $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$  si assume che  $|\nabla u_\varepsilon|$  sia di ordine  $1/\delta_i$  all'interno di ciascun  $T_i$  e che il valore di  $W(u_\varepsilon)$  sia trascurabile in  $\Omega \setminus T$ . Siccome la restrizione di  $u_\varepsilon$  ad una circonferenza di raggio  $r$  concentrica ad un qualche  $T_i$  è una mappa a valori in  $S^1$  di grado  $d_i$ , l'integrale del quadrato della sua derivata tangenziale deve essere almeno  $2\pi d_i^2/r$ . Preso quindi  $R$  in modo tale che i dischi di raggio  $R$  concentrici a ciascun  $T_i$  siano disgiunti e contenuti in  $\Omega$  (cfr. Fig. 2), si ottiene

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim \sum_i \pi \delta_i^2 \left( \frac{1}{\delta_i^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) + \int_{\delta_i}^R \frac{2\pi d_i^2}{r} dr \sim \pi \sum_i 1 + \frac{\delta_i^2}{\varepsilon^2} - 2d_i^2 \log \delta_i.$$

<sup>(11)</sup> Nella sua formulazione usuale, questa argomentazione richiede che  $u_\varepsilon$  sia continua, ma vale anche per mappe nello spazio di Sobolev  $W^{1,2}$  (cfr. Nota 2).



Ciascun addendo nell'ultimo termine può essere ottimizzato prendendo  $\delta_i \sim \varepsilon$ , da cui

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim 2\pi |\log \varepsilon| \sum_i d_i^2; \quad (6)$$

infine la somma  $\sum d_i^2$  può essere ottimizzata rispetto al vincolo  $\sum d_i = d$  prendendo  $d_i = 1$  per ogni  $i$ . Ne deduciamo che nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  l'insieme di transizione di  $u_\varepsilon$  è costituito da un numero  $d$  di "singolarità" di grado 1 e raggio di ordine  $\varepsilon$ . In altre parole, i minimi  $u_\varepsilon$  convergono ad una funzione  $u : \Omega \rightarrow S^1$  armonica e regolare al di fuori di  $d$  punti singolari di grado 1.

Pur essendo frutto di drastiche semplificazioni<sup>(12)</sup>, queste conclusioni sono sostanzialmente corrette; un'analisi accurata del comportamento di questi minimi, contenente una dimostrazione rigorosa di queste ed altre affermazioni<sup>(13)</sup>, è l'oggetto della fondamentale monografia di F. Bethuel, H. Brezis e F. Hélein [BBH], a cui rimandiamo anche per una bibliografia dettagliata.

PASSAGGIO ALLA DIMENSIONE SUPERIORE. – Vediamo ora cosa succede in dimensione tre. Preso un dominio  $\Omega$  convesso, si considerano tipicamente i minimi di  $F_\varepsilon$  con dato al bordo  $g_\varepsilon$ , dove  $g_\varepsilon : \Omega \rightarrow B^2$  è una funzione regolare di modulo uguale ad 1 al di fuori di un numero finito di "singolarità"  $U_i$  di raggio  $\varepsilon$ , i cui centri  $x_i$  e gradi  $d_i = \pm 1$  non dipendono da  $\varepsilon$  (essendo  $\partial\Omega$  semplicemente connesso, il numero delle singolarità +1 deve essere pari alle -1).

Procedendo come nel caso precedente, ci si convince facilmente del fatto che per  $\varepsilon$  piccolo  $u_\varepsilon$  avrà modulo vicino ad 1 al di fuori di un insieme di transizione  $T$  strutturato all'incirca come un  $\varepsilon$ -intorno di una 1-varietà  $S$  (unione di curve orientate) il cui bordo corrisponde ai punti  $x_i$  (cfr. Fig. 3), e

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) \sim 2\pi |\log \varepsilon| \cdot \text{lunghezza}(S) \quad (7)$$

(tralasciamo per il momento la presenza di una molteplicità collegata al grado di "avvolgimento" di  $u$  attorno ad  $S$ ).

Ci si aspetta dunque che le  $u_\varepsilon$  convergano (a meno di sottosuccessioni) a funzioni  $u : \Omega \rightarrow S^1$  regolari (ed armoniche) al di fuori di un insieme singolare

---

<sup>(12)</sup> Lo sviluppo dato in (6), a differenza di quello in (4), è molto preciso; si potrebbe infatti dimostrare che  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) = 2\pi |\log \varepsilon| \sum d_i^2 + O(1)$ . Questa sorprendente accuratezza è dovuta al fatto che l'energia non si concentra nella zona di transizione—cioè sui dischetti  $T_i$ , dove abbiamo usato stime molto rozze—quanto sulle corone circolari attorno, dove invece le stime usate risultano assai precise. Dunque nel caso complesso il problema dell'individuazione del profilo ottimale per la transizione di fase non si pone, e per lo stesso motivo  $W$  non interviene nella determinazione della sviluppo in (6) (cfr. Nota 6).

<sup>(13)</sup> Cfr. le osservazioni dopo il Teorema 10.

$S$  di dimensione uno, scelto in modo da minimizzare la lunghezza tra tutte le 1-varietà con bordo dato dai punti  $x_i$  (contati con la loro molteplicità).

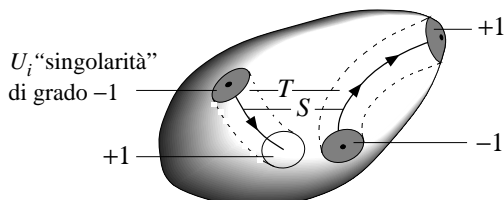


FIGURA 3

A questo punto è inevitabile congetturare che in dimensione qualunque i minimi  $u_\varepsilon$  dei funzionali di G.-L. complessi con opportuni vincoli al bordo convergono a funzioni  $u : \Omega \rightarrow S^1$  regolari (armoniche) al di fuori di un insieme singolare  $S$  di codimensione due scelto in modo da minimizzarne la misura  $(n-2)$ -dimensionale. Ed infatti un risultato in questa direzione è stato dato da F.H. Lin e T. Rivière [LR] (cfr. anche [Ri], [Sa]). L'approccio seguito in questo lavoro, come nella quasi totalità dei lavori sui funzionali di G.-L. complessi, consiste essenzialmente in un'analisi diretta del comportamento dei minimi  $u_\varepsilon$ .

L'APPROCCIO VARIAZIONALE. – Nella ricerca in collaborazione con S. Baldo e G. Orlandi abbiamo deciso di seguire una strada diversa, basata sull'analisi del comportamento asintotico di  $F_\varepsilon$  piuttosto che dei corrispondenti minimi—abbiamo cioè dato un teorema à la Modica-Mortola per i funzionali di G.-L. complessi<sup>(14)</sup>. Se molte sono le analogie tra il risultato di  $\Gamma$ -convergenza nel caso scalare e quello nel caso complesso, altrettante sono le differenze, e (purtroppo!) ad un enunciato ed una dimostrazione relativamente semplici come quelli del teorema di Modica-Mortola corrispondono nel caso complesso un enunciato complicato e meno incisivo (cfr. i Teoremi 9 e 10 da una parte ed il Teorema 3 dall'altra) accompagnato da una dimostrazione nettamente più tecnica—il che spiega almeno in parte gli oltre vent'anni trascorsi dai primi risultati di Modica e Mortola [MM1], [MM2].

Nel seguito cercherò di illustrare le principali difficoltà di una corretta formulazione del risultato di  $\Gamma$ -convergenza per i funzionali di G.-L. complessi, e di accennare brevemente i punti nodali della dimostrazione. Prima, vorrei però aggiungere un breve commento per giustificare la nostra scelta di metodo.

Vale la pena di osservare che una volta ottenuta la dimostrazione della compattezza e della disuguaglianza del  $\Gamma$ -liminf in dimensione due, questa può essere estesa a dimensione superiore utilizzando un principio generale di

<sup>(14)</sup> La stessa direzione è stata seguita indipendentemente da R. Jerrard e H.M. Soner [JS2].

“affettamento”, o “slicing”, cosa che mette in rilievo la natura essenzialmente bidimensionale del problema (vedi [Al] per l’illustrazione di questo principio nel caso dei funzionali di G.-L. scalari). Nessun principio di riduzione della dimensione per slicing si può invece applicare ai soli minimi. Più in generale, a differenza dell’analisi diretta del comportamento asintotico dei minimi, che si basa di solito su stime ellittiche sofisticate ed estremamente specifiche, lo studio del  $\Gamma$ -limite dei funzionali utilizza solo stime di carattere generale e per certi versi più elementari; per questo motivo le dimostrazioni sono meno vincolate alla forma specifica del funzionale e possono essere adattate (più o meno facilmente) a diverse varianti del problema di partenza.

Se tuttavia i risultati di  $\Gamma$ -convergenza sono in un certo senso più “robusti” di quelli ottenuti con l’analisi diretta dei minimi, sono anche inevitabilmente più deboli; per esempio, la compattezza dei minimi è solitamente più forte di quella che si deduce dall’equicoercività dei funzionali (cfr. Nota 22).

RISCALAMENTO OTTIMALE. – Preliminare ad un risultato di  $\Gamma$ -convergenza è la scelta del riscaldamento ottimale per i funzionali in oggetto. Le stime (6) e (7) suggeriscono chiaramente per  $F_\varepsilon$  il riscaldamento  $|\log \varepsilon|^{-1}$ . Pertanto ridefiniamo i funzionali  $F_\varepsilon$  come segue:

$$F_\varepsilon(u) := \frac{1}{|\log \varepsilon|} \int |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(u), \quad (8)$$

con  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ , come al solito.

IDENTIFICAZIONE DEL  $\Gamma$ -LIMITE. – Sappiamo già che il  $\Gamma$ -limite  $F$  dovrebbe essere un funzionale finito solo sulle funzioni  $u : \Omega \rightarrow S^1$ , e dovrebbe corrispondere, a meno di un fattore  $2\pi$ , alla misura  $(n-2)$ -dimensionale dell’insieme singolare  $Su$  delle stesse<sup>(15)</sup>, contata con la dovuta molteplicità. Dunque  $F$  è chiaramente definito per le funzioni  $u$  regolari al di fuori di una varietà di codimensione due, ma poiché questa classe non è sufficientemente ampia da potervi dimostrare un risultato di compattezza per i minimi  $u_\varepsilon$ , dobbiamo affrontare un problema analogo a quello discusso in precedenza per il caso scalare (cfr. Osservazione 4), vale a dire, come definire in modo appropriato la nozione di misura dell’insieme singolare per mappe da  $\Omega$  in  $S^1$ . Almeno in dimensione due, la soluzione è fornita dalla nozione di Jacobiano *distribuzionale* (cfr. [Ba]).

DEFINIZIONE 5. – *Data una funzione  $u = (u^1, u^2) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  limitata e di classe  $W^{1,1}$ , si definisce lo Jacobiano di  $u$  come la distribuzione*

$$Ju := \frac{\partial}{\partial x_1} \left( u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( u^1 \frac{\partial u^2}{\partial x_1} \right). \quad (9)$$

---

<sup>(15)</sup> Insieme singolare la cui presenza, lo ricordo, è imposta dai dati al bordo per  $F_\varepsilon$ , che nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  si traducono in un vincolo di bordo per  $Su$ .

Si vede immediatamente che  $Ju$  coincide con l'usuale  $\det(\nabla u)$  per ogni funzione di classe  $C^2$ , ed in effetti lo stesso vale anche per funzioni di classe  $W^{1,2}$ . Per funzioni di classe  $W^{1,1}$ , invece, questo determinante potrebbe non essere ben definito, mentre  $Ju$  lo è sempre, almeno come distribuzione; l'esempio tipico è la funzione  $x/|x|$ , che appartiene a  $W_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^2)$  per ogni  $p < 2$  ed il cui Jacobiano è la delta di Dirac  $\pi \cdot \delta_0$ .

OSSERVAZIONE 6. – Se  $u : \Omega \rightarrow S^1$  è regolare al di fuori di un insieme singolare finito  $S = \{x_i\}$  <sup>(16)</sup>, allora  $Ju$  è una misura della forma

$$Ju = \sum_i \pi d_i \cdot \delta_{x_i}, \quad (10)$$

dove  $d_i$  è il grado della restrizione di  $u$  ad una qualunque circonferenza che contiene  $x_i$  e nessuno degli altri punti di  $S$ . Se ne deduce la seguente formula generale: dato un dominio regolare  $A$  relativamente compatto in  $\Omega$  tale che  $\partial A \cap S = \emptyset$

$$\int_A Ju = \pi \deg(u, \partial A, S^1) = \pi \text{link}(\partial A, S), \quad (11)$$

dove  $\text{link}(\partial A, S)$  indica l'indice di allacciamento della curva  $\partial A$  attorno all'insieme dei punti  $x_i$ , contati con la molteplicità  $d_i$ . Viceversa, data  $u : \Omega \rightarrow S^1$  tale che  $Ju$  è una misura finita, allora  $Ju$  si rappresenta come in (10) per opportuni  $x_i$  in  $\Omega$  e  $d_i$  interi; vale anche la formula (11), a patto di interpretarne correttamente il termine di mezzo.

Quest'osservazione suggerisce dunque di candidare a  $\Gamma$ -limite  $F(u)$  in dimensione due un opportuno multiplo di  $\|Ju\|$ , cioè la massa di  $Ju$  quando questa è una misura finita, e  $+\infty$  altrimenti. Questo funzionale è effettivamente semicontinuo inferiormente <sup>(17)</sup> e coincide per le funzioni sufficientemente regolari con il numero delle singolarità (contate con la dovuta molteplicità).

Le Definizione 5 può essere generalizzata a dimensione superiore utilizzando le nozioni di forma e corrente—cfr. [Si], Capitolo 6 <sup>(18)</sup>.

<sup>(16)</sup> Come ad esempio  $u(x) := \prod_i (x - x_i)/|x - x_i|$ , dove il prodotto è dato dall'identificazione di  $\mathbb{R}^2$  con il campo complesso.

<sup>(17)</sup> Rispetto alla convergenza debole in  $W^{1,1}$ ; segue infatti facilmente dalla (9) che  $Ju$  è un operatore debolmente continuo da  $W^{1,1}$  nello spazio delle distribuzioni.

<sup>(18)</sup> Le  $k$ -correnti generalizzano il concetto di  $k$ -superficie orientata come le distribuzioni quello di funzione, e sono infatti definite come il duale delle  $k$ -forme di classe  $C_c^\infty$ , essendo l'azione di un'usuale  $k$ -superficie orientata su una

DEFINIZIONE 7. — *Data una funzione  $u = (u^1, u^2) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  limitata e di classe  $W^{1,1}$ , si definisce lo Jacobiano 2-dimensionale di  $u$  come la 2-forma (a coefficienti nelle distribuzioni)*

$$Ju := d(u^1 \cdot du^2) \quad (12)$$

*Si indica inoltre con  $\star Ju$  la  $(n-2)$ -corrente senza bordo<sup>(19)</sup> ottenuta applicando a  $Ju$  l'identificazione canonica  $\star$  dei 2-covettori di  $\mathbb{R}^n$  con gli  $(n-2)$ -vettori<sup>(20)</sup>.*

La classe delle funzioni  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  per cui  $Ju$  è una misura di Radon è stata introdotta da R. Jerrard e H.M. Soner in [JS1], e denominata  $B2V(\Omega, \mathbb{R}^2)$  per analogia con lo spazio  $BV(\Omega)$  delle funzioni a variazione limitata. In questo contesto, le funzioni a valori in  $S^1$  giocano un ruolo assai simile a quello degli insiemi di perimetro finito, ed in particolare vale un teorema di rettificabilità analogo a quello di De Giorgi: data  $u : \Omega \rightarrow S^1$  di classe  $B2V$ , allora  $Ju$  è supportata su un insieme rettificabile di codimensione due, e più precisamente  $\star Ju$  è, a meno di un fattore  $\pi$ , una corrente intera senza bordo in  $\Omega$ —cfr. Note 18 e 19.

---

$k$ -forma data dall'integrazione. Si dice intera una corrente  $T$  della forma

$$\langle T; \omega \rangle := \int_S \xi \cdot \langle \omega; \tau \rangle \cdot d\mathcal{H}^k,$$

dove  $S$  è un insieme rettificabile  $k$ -dimensionale, ovvero è contenuto in un'unione numerabile di  $k$ -varietà immerse di classe  $C^1$ ,  $\tau$  è un'orientazione, ovvero un  $k$ -vettore unitario che identifica lo spazio tangente ad  $S$  in (quasi) ogni punto,  $\xi$  è una molteplicità intera, ed infine  $\mathcal{H}^k$  denota la misura (di Hausdorff)  $k$ -dimensionale. Nell'ambito delle correnti, quelle intere rappresentano in un certo senso la chiusura delle varietà regolari (più precisamente delle catene poliedrali). Se la corrente  $T$  è rappresentabile da una misura (a valori nei  $k$ -vettori), si dice massa la sua variazione totale  $\|T\|$ ; per le correnti intere si tratta della misura  $k$ -dimensionale di  $S$ , contata con la molteplicità  $\xi$ .

<sup>(19)</sup> Come la derivata distribuzionale viene definita tramite la formula di integrazione per parti, così il bordo di una  $k$ -corrente  $T$  viene definito tramite il teorema di Stokes, ovvero ponendo  $\langle \partial T; \omega \rangle := \langle T; d\omega \rangle$  per ogni  $(k-1)$ -forma  $\omega$  di classe  $C_c^\infty$ . Nel caso specifico si ha  $\partial(\star Ju) = 0$  perché  $d(Ju) = d^2(u^1 \cdot du^2) = 0$  (essendo  $d^2\omega = 0$  per ogni  $\omega$ ).

<sup>(20)</sup> Ovvero quella definita da  $\star(dx_i \wedge dx_j) := (-1)^{i+j} e_{\widehat{ij}}$  per ogni  $i < j$ , dove  $e_{\widehat{ij}}$  indica l'  $(n-2)$ -vettore dato dal prodotto di  $e_1, \dots, e_n$ , esclusi  $e_i$  ed  $e_j$ .

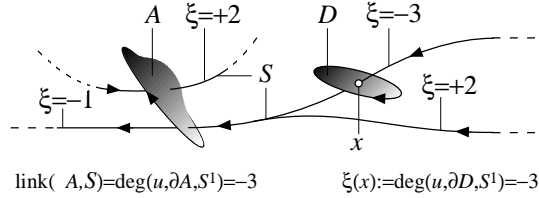


FIGURA 4

OSSERVAZIONE 8. – Per chiarire meglio questo concetto, vediamo cosa succede in dimensione tre. In questo caso,  $\star Ju$  coincide col prodotto vettoriale  $\nabla u^1 \times \nabla u^2$  per ogni  $u$  sufficientemente regolare (e.g. di classe  $W^{1,2}$ ); se invece  $u$  è una mappa a valori in  $S^1$  regolare al di fuori di una 1-varietà  $S$  senza bordo in  $\Omega$  (cioè un'unione finita di curve rettificabili contenute in  $\Omega$  e con bordo contenuto in  $\partial\Omega$ ), allora  $\star Ju$  è una misura vettoriale singolare supportata su  $S$  del tipo

$$\star Ju = \pi \xi \cdot \tau \cdot \mathcal{H}^1 \llcorner S, \quad (13)$$

dove  $\mathcal{H}^1 \llcorner S$  indica la misura (di Hausdorff) 1-dimensionale su  $S$ ,  $\tau(x)$  è il vettore tangente a  $S$  in  $x$ , e la molteplicità  $\xi(x)$  è data da  $\deg(u, \partial D, S^1)$  dove  $D$  è un qualunque disco immerso la cui intersezione con  $S$  è costituita dal solo punto  $x$  <sup>(21)</sup>, cfr. Fig. 4.

Il funzionale  $\|Ju\|$ , ovvero  $\|\star Ju\|$ , è debolmente semicontinuo inferiormente su  $W^{1,1}$  (cfr. Nota 17) e coincide con la misura  $(n-2)$ -dimensionale della singolarità di  $u$  nei casi sufficientemente regolari (cfr. (13)); è dunque un buon candidato a  $\Gamma$ -limite dei funzionali in (8) in qualunque dimensione (a meno di un opportuno fattore moltiplicativo).

IL PROBLEMA DELLA COMPATTEZZA. – A questo punto si presenta però una difficoltà fondamentale: è possibile dimostrare la  $\Gamma$ -convergenza dei funzionali  $F_\varepsilon$  in (8) ad un funzionale del tipo  $F(u) := \sigma \| \star Ju \|$  rispetto alla topologia debole  $W^{1,1}$  (o a qualche metrica più o meno equivalente), ma non dimostrarne l'equicoercività nel senso della Definizione 1.

Data infatti una successione  $(u_\varepsilon)$  tale che  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ , se ne può al più dimostrare la compattezza *debole* in un qualche  $L^p$  <sup>(22)</sup>. D'altra parte,

<sup>(21)</sup> In particolare, vale il seguente analogo della formula (11): data una qualunque 2-varietà  $A$  relativamente compatta in  $\Omega$  e tale che  $\partial A \cap S = \emptyset$  (cfr. Fig. 4), si ha che  $\int_A \eta \cdot \star Ju = \pi \cdot \deg(u, \partial A, S^1) = \pi \cdot \text{link}(\partial A, S)$ , dove  $\eta$  denota la normale unitaria ad  $A$ , e dunque il primo integrale rappresenta il flusso di  $\star Ju$  attraverso  $A$ .

<sup>(22)</sup> In realtà per la successione dei minimi  $u_\varepsilon$  è possibile dimostrare qual-

il  $\Gamma$ -limite di  $F_\varepsilon$  rispetto ad una qualunque metrica  $L^p$  (quindi persino nella topologia *forte*) è identicamente nullo sulle funzioni  $u$  tali che  $|u| = 1$  q.o. <sup>(23)</sup>, ed è quindi inutile, nel senso che non implica nessun criterio di selezione tra le funzioni a valori in  $S^1$ .

IL TEOREMA DI  $\Gamma$ -CONVERGENZA, VERSIONE CORRETTA. – A ben pensarci, la mancanza di equicoercività in una topologia sufficientemente forte non deve sorprendere: se la nostra aspettativa sul  $\Gamma$ -limite di  $F_\varepsilon$  è corretta, un controllo del tipo  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$  implica al massimo l'equilimitatezza  $L^1$  degli Jacobiani  $Ju_\varepsilon$ , che notoriamente non induce nessuna forma di compattezza delle funzioni. Questo significa semplicemente che non si deve puntare alla compattezza delle funzioni, bensì a quella degli Jacobiani <sup>(24)</sup>, ed il risultato di  $\Gamma$ -convergenza per i funzionali  $F_\varepsilon$  va riformulato di conseguenza. Cominciamo per semplicità dalla dimensione due.

TEOREMA 9. – *Siano  $F_\varepsilon$  i funzionali dati in (8), ed  $n = 2$ . Si ha allora che:*

---

cosa di più (cfr. [LR]), ma la dimostrazione è assai complessa, e dipende in modo determinante dal fatto che le  $u_\varepsilon$  risolvono un certo sistema ellittico—esattamente il tipo di difficoltà che si vorrebbe aggirare usando l'approccio variazionale.

<sup>(23)</sup> Infatti ogni funzione  $u : \Omega \rightarrow S^1$  misurabile è il limite puntuale q.o. di una successione di funzioni  $u_h : \Omega \rightarrow S^1$  di classe  $C^\infty$ . In generale  $\int |\nabla u_h|^2$  diverge per  $h \rightarrow +\infty$ , ma posto  $u_\varepsilon := u_{h(\varepsilon)}$ ,  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) = |\log \varepsilon|^{-1} \int |\nabla u_{h(\varepsilon)}|^2$  è infinitesimo se  $h(\varepsilon)$  tende a  $+\infty$  in modo sufficientemente lento per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il discorso cambia se consideriamo la convergenza  $W^{1,1}$  debole: la funzione  $x/|x|$ , ad esempio, non è approssimabile con funzioni regolari a valori in  $S^1$ , e.g., perché lo Jacobiano di  $x/|x|$  è non banale, a differenza di quello di ogni funzione regolare a valori in  $S^1$ . Il punto è che la convergenza quasi ovunque (a differenza di quella  $W^{1,1}$  debole) è talmente debole da non essere sensibile ad ostruzioni topologiche di sorta—non a caso l'operatore Jacobiano definito in (9) e (12) non è continuo rispetto a questa convergenza.

<sup>(24)</sup> Qui sta la differenza rispetto ai funzionali di G.-L. scalari: per quest'ultimi, infatti, il  $\Gamma$ -limite  $F(u)$  corrisponde alla massa della derivata distribuzionale  $Du$  (cfr. Osservazione 4), ed infatti un controllo del tipo  $\varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$  implica (quasi) l'equilimitatezza  $L^1$  delle derivate  $\nabla u_\varepsilon$ , e quindi la compattezza  $L^1$  delle funzioni  $u_\varepsilon$  per via del teorema di Rellich. Sottolineo il “quasi”: il controllo delle energie non implica esattamente l'equilimitatezza  $L^1$  delle derivate nel caso scalare, né quella degli Jacobiani nel caso complesso, ed infatti gli Jacobiani  $Ju_\varepsilon$  non risultano compatti nella topologia debole delle misure, bensì in quella flat (cfr. Teoremi 9 e 10), ragione questa di non poche difficoltà tecniche.

◦ data una successione  $(u_\varepsilon)$  tale che  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ , le funzioni  $Ju_\varepsilon$  convergono flat<sup>(25)</sup> a misure  $\mu$  della forma

$$\mu = \sum \pi d_i \cdot \delta_{x_i} \quad (14)$$

con  $x_i \in \Omega$  e  $d_i$  intero;

◦ per ogni  $\mu$  della forma (14) ed ogni  $(u_\varepsilon)$  tale che  $Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} \mu$ , vale

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 2\pi \sum |d_i| = 2\|\mu\|; \quad (15)$$

◦ per ogni  $\mu$  della forma (14) esiste  $(u_\varepsilon)$  tale che  $Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} \mu$  e vale la (15) con il limite al posto del limite inferiore, e l'uguaglianza al posto della disuguaglianza.

In dimensione maggiore di due abbiamo invece:

TEOREMA 10. – Siano  $F_\varepsilon$  i funzionali dati in (8), ed  $n \geq 2$ . Si ha allora che:

◦ data una successione  $(u_\varepsilon)$  tale che  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ , le correnti  $\star Ju_\varepsilon$  convergono flat, a meno di un fattore  $\pi$ , a correnti rettificabili intere  $T$  di codimensione due senza bordo in  $\Omega$  (cfr. Note 18 e 19);

◦ per ogni corrente  $T$  del tipo suddetto ed ogni  $(u_\varepsilon)$  tale che  $\star Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} T$ , vale

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 2\pi \|T\|, \quad (16)$$

dove  $\|T\|$  è la massa della corrente  $T$ ;

◦ per ogni corrente  $T$  rettificabile intera esiste  $(u_\varepsilon)$  tale che  $\star Ju_\varepsilon \xrightarrow{\text{flat}} \pi T$  e vale la (16) con il limite al posto del limite inferiore, e l'uguaglianza al posto della disuguaglianza.

CONSEGUENZE DEL TEOREMA DI  $\Gamma$ -CONVERGENZA ED OSSERVAZIONI. – Se  $u_\varepsilon$  converge debolmente in  $W^{1,1}$  ad  $u : \Omega \rightarrow S^1$ , allora la corrente  $T$  è esattamente  $\star Ju$ ; detto questo non è difficile riconoscere negli ultimi due enunciati del Teorema 10 (oppure 9) delle disuguaglianze del  $\Gamma$ -liminf e del  $\Gamma$ -limsup, con  $\|\star Ju\|$  rimpiazzato da  $\|T\|$ . Anche così vale una versione opportunamente modificata della Proposizione 2, da cui si deducono enunciati di questo tenore: se le funzioni  $u_\varepsilon$  sono minimi dei funzionali  $F_\varepsilon$  soggetti ai vincoli al bordo già discussi, allora gli Jacobiani  $\star Ju_\varepsilon$  convergono (a meno di  $\pi$ ) ad una

---

<sup>(25)</sup> Cioè convergono gli integrali rispetto a tutte le funzioni test di classe  $C^1$ ; si tratta quindi di una convergenza più debole dell'usuale convergenza debole di misure, analoga alla convergenza  $W^{-1,p}$  per le funzioni.



$(n - 2)$ -corrente rettificabile intera  $T$  di area localmente minima, e le energie  $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$  convergono a  $2\pi$  volte la massa di  $T$  (cioè, con la notazione introdotta in Nota 18,  $\int_S |\xi| d\mathcal{H}^{n-2}$ ). Quest'ultimo enunciato può essere localizzato, ottenendo un risultato di concentrazione per le energie: la densità di energia riscalata  $e_\varepsilon$  associata al minimo  $u_\varepsilon$ , vale a dire la funzione integranda in (8) con  $u_\varepsilon$  al posto di  $u$ , converge nel senso delle misure a  $2\pi|\xi| \cdot \mathcal{H}^{n-2} \llcorner S$ .

La rilevanza di questi risultati in dimensione due è limitata. In tal caso, infatti, si ha semplicemente che gli Jacobiani dei minimi  $u_\varepsilon$  convergono ad una misura  $\mu$  della forma (14) che minimizza la massa tra tutte quelle il cui integrale è  $d$  (grado del dato al bordo). Questo significa che  $\mu$  minimizza  $\sum |d_i|$  con il vincolo  $\sum d_i = d$ , ovvero semplicemente che i  $d_i$  sono concordi. Ma sappiamo già dall'analisi in [BBH] che i gradi  $d_i$  delle singolarità sono non solo concordi, ma tutti uguali a  $+1$  (o  $-1$ ), e che inoltre le singolarità  $x_i$  sono situate in modo da minimizzare l'energia data da un certo potenziale repulsivo che tende ad allontanare una singolarità dall'altra e dal bordo. Il punto è che il nostro  $\Gamma$ -limite costituisce in un certo senso solo il termine principale di  $F_\varepsilon$  (quello di ordine  $|\log \varepsilon|$  per il funzionale non riscalato in (1)), che in dimensione due non basta a determinare univocamente il comportamento dei minimi  $u_\varepsilon$ , ed in particolare non descrive l'effetto di repulsione tra le singolarità (dovuto ad un termine di ordine inferiore). Il discorso cambia in dimensione superiore; a meno di particolari geometrie del dominio  $\Omega$ , infatti, il criterio di minima area individua un numero finito di correnti intere, se non addirittura una sola, e quindi descrive adeguatamente il comportamento dei minimi.

Si consideri ad esempio questa situazione:  $\Omega$  è un cilindro retto in  $\mathbb{R}^3$  della forma  $x^2 + y^2 < 1$ ,  $0 < z < 1$ , e si impone che i minimi  $u_\varepsilon$  coincidano sulla superficie laterale  $S^1 \times (0, 1)$  con una funzione assegnata che dipende solo dalla prima variabile, cioè  $g : S^1 \rightarrow S^1$  di grado  $d > 1$ .

Dal risultato di  $\Gamma$ -convergenza si deduce solo che il limite  $T$  degli Jacobiani  $\star J u_\varepsilon$  è una 1-corrente intera che minimizza la massa tra tutte quelle il cui bordo consiste di  $d$  delte di Dirac sulla faccia superiore, e  $-d$  su quella inferiore—in altre parole,  $T$  è un'unione di  $d$  segmenti verticali in posizione arbitraria (cfr. Fig. 5). Tuttavia una riduzione al caso due dimensionale ci dice che le posizioni dei segmenti non sono affatto arbitrarie, ma scelte in modo da minimizzare un preciso potenziale repulsivo.

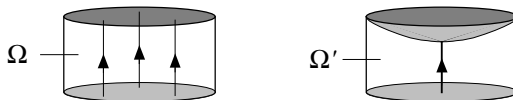


FIGURA 5

Se però rimpiazziamo  $\Omega$  con un cilindro  $\Omega'$  con la base superiore leggermente concava, ad esempio ponendo  $0 < z < 1 - \delta(1 - x^2 - y^2)$  invece di  $0 < z < 1$ ,

allora il criterio di minimalità individua univocamente  $T$ , che consiste infatti in un unico segmento verticale al centro, congiungente dunque i due punti di minima distanza tra la base superiore e quella inferiore, con molteplicità  $d$ .

Questa differenza tra la dimensione due e quella superiore si riscontra anche nel comportamento asintotico delle soluzioni delle equazioni paraboliche associate ai funzionali di Ginzburg-Landau (opportunamente riscalate nel tempo): in dimensione maggiore di due si ritrova, nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , un'evoluzione per curvatura media della singolarità, cioè il flusso gradiente della misura  $(n-2)$ -dimensionale (cfr. [AS]); in dimensione due, invece, il flusso gradiente della misura 0-dimensionale lascerebbe i punti singolari fermi, mentre l'evoluzione di questi è determinata dal potenziale repulsivo summenzionato, ed è quindi di natura radicalmente diversa da ogni evoluzione per curvature (cfr. [Li]).

Un breve commento infine sulle possibili generalizzazioni del Teorema 10. Se si considerano i funzionali  $F_\varepsilon$  definiti in (2) per funzioni a valori in  $\mathbb{R}^k$ , si vede innanzitutto che il problema è rilevante per  $p \geq k$ , cioè quando le funzioni di classe  $W^{1,p}$  non ammettono singolarità topologiche di codimensione  $k$  <sup>(26)</sup>. In tal caso è ragionevole attendersi (per un opportuno riscaldamento) un risultato analogo al Teorema 10. Dovrebbe tuttavia esserci una certa differenza tra il caso  $p > k$  ed il caso limite  $p = k$ . Per  $p > k$ , infatti, l'energia dei minimi si concentra nella zona di transizione, e non in un suo intorno (cfr. Nota 12), e la costante che appare di fronte a  $\|T\|$  nella generalizzazione della (16) viene determinata da un problema di profilo ottimale analogo a quello che dà la costante  $\sigma$  nel Teorema 3 (cfr. Nota 6). Invece il caso  $p = k$  dovrebbe essere sostanzialmente equivalente a quello dei funzionali di G.-L. complessi.

Non è chiaro infine cosa ci si debba aspettare per  $k > 1$  quando si sostituisce l'integrale del gradiente in (2) con un'energia di interazione non locale del tipo (3); si sa solo che nel caso scalare vale un teorema di  $\Gamma$ -convergenza analogo al Teorema 3 (cfr. [AB]).

COMPATTEZZA E DISUGUAGLIANZA DEL  $\Gamma$ -LIMINF. – Accenno ora brevemente l'idea base della dimostrazione dell'enunciato di compattezza nel Teorema 9. Per semplicità mi limito dunque alla dimensione due, assumendo inoltre che il potenziale  $W$  abbia simmetria radiale, ovvero sia della forma  $W(|u|)$ . Prendiamo dunque una successione di funzioni  $u_\varepsilon$  tali che  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ , ed indichiamo con  $e_\varepsilon$  le densità di energia ad esse associate, vale a dire  $e_\varepsilon := |\log \varepsilon|^{-1} [|\nabla u_\varepsilon|^2 + \varepsilon^{-2}W(|u_\varepsilon|)]$ .

---

<sup>(26)</sup> Preso infatti  $p < k$  e fissato un dato al bordo  $g : \partial\Omega \rightarrow S^{k-1}$ , il  $\Gamma$ -limite di  $F_\varepsilon$  è semplicemente uguale a  $\int |\nabla u|^p$  per tutte le funzioni in  $W_g^{1,p}(\Omega, S^{k-1})$  e a  $+\infty$  altrimenti, e a differenza di quello che succede per  $p \geq k$ , questa classe non è vuota per ogni  $g$  sufficientemente regolare, cioè nello spazio delle tracce  $W^{1-1/p,p}$ .

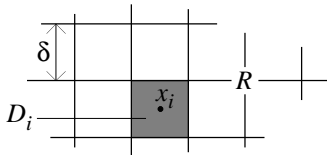


FIGURA 6

Per ogni  $\varepsilon$  fissiamo un numero positivo  $\delta = \delta_\varepsilon$  infinitesimo per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , e scegliamo una griglia 1-dimensionale  $R = R_\varepsilon$  di passo  $\delta$  (cfr. Fig. 6) in modo tale che

$$F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_\Omega e_\varepsilon \geq \delta \int_R e_\varepsilon. \quad (17)$$

La prima osservazione da fare è che se  $\delta \gg \varepsilon |\log \varepsilon|$  allora  $|u_\varepsilon|$  tende a 1 uniformemente su  $R$  <sup>(27)</sup>. Limitandoci allora ai valori di  $\varepsilon$  per cui  $|u_\varepsilon| \geq 1/2$  su  $R$ , possiamo parlare di grado  $d_i$  di  $u_\varepsilon$  sul bordo di ogni cella  $D_i$  della griglia, intendendo con ciò  $d_i := \deg(u_\varepsilon/|u_\varepsilon|, \partial D_i, S^1)$ .

La seconda osservazione, che segue da una splendida stima di R. Jerrard [Je], è che per  $\delta \gg \varepsilon$ , l'energia in ciascuna cella  $D_i$  deve essere maggiore o uguale, nel limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , di  $2\pi|d_i|$  <sup>(28)</sup>, e dunque

$$C \geq F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq 2\pi \sum_i |d_i| - o(1). \quad (18)$$

Ponendo allora  $\mu_\varepsilon := \sum_i \pi d_i \cdot \delta_{x_i}$ , dove  $x_i$  è il centro della cella  $D_i$  (e come

---

<sup>(27)</sup> La (17) e l'equilimitatezza dell'energie implicano  $\int_R W(|u_\varepsilon|) \rightarrow 0$ , e siccome  $W$  si annulla solo in 1, le funzioni  $|u_\varepsilon|$  convergono a 1 in misura su  $R$ ; per ottenere la convergenza uniforme basta dunque mostrare che l'oscillazione delle  $|u_\varepsilon|$  su  $R$  tende a 0. Posto  $v_\varepsilon := |u_\varepsilon|$ , ed indicando con  $v'_\varepsilon$  la derivata di  $v_\varepsilon$  nella direzione tangente alla griglia  $R$ , dalla (17) otteniamo

$$C \geq \delta \int_R e_\varepsilon \geq \frac{\delta}{|\log \varepsilon|} \int_R |v'_\varepsilon|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} W(v_\varepsilon) \geq \frac{\delta}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_R 2W^{1/2}(v_\varepsilon) |v'_\varepsilon|$$

dove nell'ultimo passaggio si è applicata la disuguaglianza  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  con  $a := |v'_\varepsilon|$  e  $b := \varepsilon^{-1}W^{1/2}(v_\varepsilon)$ . Indicando allora con  $H$  una primitiva di  $2W^{1/2}$ , si ha

$$C \geq \frac{\delta}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \int_R |(H(v_\varepsilon))'| \geq \frac{\delta}{\varepsilon |\log \varepsilon|} \text{osc}(H(v_\varepsilon), R)$$

e quindi se  $\delta \gg \varepsilon |\log \varepsilon|$  l'oscillazione di  $H(v_\varepsilon)$  su  $R$  tende a 0, e lo stesso succede per  $v_\varepsilon = |u_\varepsilon|$  perché  $H$  è strettamente crescente.

<sup>(28)</sup> In realtà vale solo una versione opportunamente raffinata di questo enunciato.

$d_i$  e  $D_i$  dipende da  $\varepsilon$ ), otteniamo una successione equilimitata di misure i cui punti limite (nella topologia debole) sono misure  $\mu$  del tipo (14).

Si osservi ora che l'integrale dello Jacobiano di  $u_\varepsilon$  su  $D_i$  è uguale a  $\pi d_i + o(1)$  perché  $|u_\varepsilon|$  converge uniformemente ad 1 su  $R$ . Dunque  $Ju_\varepsilon$  e  $\mu$  hanno (quasi) lo stesso integrale su ogni cella della partizione  $R$ , che diventa sempre più fine per  $\varepsilon \rightarrow 0$ ; partendo da questo si può dimostrare che queste due successioni di misure sono asintoticamente equivalenti nella distanza flat, per cui  $(Ju_\varepsilon)$  ha gli stessi punti limite di  $(\mu_\varepsilon)$ . Si noti infine che la (18) implica la disuguaglianza del  $\Gamma$ -liminf (15), mentre l'estensione a dimensione superiore può essere ottenuta con tecniche di slicing.

DISUGUAGLIANZA DEL  $\Gamma$ -LIMSUP. – Per dimostrare la disuguaglianza del  $\Gamma$ -limsup in dimensione due (ultimo enunciato del Teorema 9) basta prendere  $u_\varepsilon$  della forma <sup>(29)</sup>

$$u_\varepsilon(x) := \phi(\varepsilon^{-1}d_S(x)) \cdot u(x)$$

dove  $d_S(x)$  è la distanza di  $x$  dall'insieme  $S := \{x_i\}$ ,  $\phi : [0, +\infty] \rightarrow [0, 1]$  è una qualunque funzione regolare tale che  $\phi(0) = 0$  e  $\phi(t) = 1$  per  $t \geq 1$ , ed  $u : \Omega \rightarrow S^1$  è una mappa asintoticamente equivalente a  $[(x - x_i)/|x - x_i|]^{d_i}$  in prossimità di ogni  $x_i$ , ovvero una mappa con Jacobiano uguale a  $\mu$  (cfr. Osservazione 6); si può prendere ad esempio (cfr. Nota 16)

$$u(x) := \prod_i \left[ \frac{x - x_i}{|x - x_i|} \right]^{d_i}.$$

Il primo passo nella dimostrazione della disuguaglianza del  $\Gamma$ -limsup in dimensione superiore (ultimo enunciato del Teorema 10) è proprio trovare una funzione  $u$  tale che  $\star Ju = \pi T$ , dove  $T = \xi \cdot \tau \cdot \mathcal{H}^{n-2} \llcorner S$  è una qualunque corrente rettificabile intera (cfr. Nota 18).

Supponendo per semplicità che il supporto  $S$  sia una varietà orientata di codimensione due senza bordo, e che la molteplicità  $\xi$  sia identicamente uguale ad 1, il problema si traduce nel trovare una mappa  $u$  a valori in  $S^1$ , regolare al di fuori di  $S$ , e tale che (cfr. Nota 21)

$$\deg(u, \gamma, S^1) = \text{link}(\gamma, S) \quad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \text{ t.c. } \gamma \cap S = \emptyset.$$

Una tale  $u$  si può scrivere come  $u = e^{i\theta}$ , dove  $\theta$  è una funzione regolare dal complementare di  $S$  in  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  il cui differenziale è una 1-forma  $\omega_S$  che soddisfa

$$\int_\gamma \omega_S = 2\pi \text{link}(\gamma, S) \quad \text{per ogni curva chiusa } \gamma \text{ t.c. } \gamma \cap S = \emptyset. \quad (19)$$

---

<sup>(29)</sup> In effetti questa costruzione dà il giusto valore dell'energia solo per le misure  $\mu$  tali che  $d_i = \pm 1$  per ogni  $i$ ; questo però basta ai nostri scopi, perché tali misure sono dense nella classe delle  $\mu$  di tipo (14).

Siccome ogni 1-forma  $\omega_S$  che soddisfa la (19) è integrabile, nel senso che coincide con il differenziale di una mappa a valori in  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ , non resta che costruirne una.

Cominciamo con l'osservare che  $\text{link}(\gamma, S)$  è uguale (per definizione) al grado della restrizione a  $\gamma \times S$  della mappa canonica  $\Phi$  che porta  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq y$ , in  $(x - y)/|x - y| \in S^{n-1}$ . D'altra parte questo grado, moltiplicato per il volume  $(n - 1)$ -dimensionale della sfera  $S^{n-1}$ , coincide per la formula dell'area con l'integrale su  $\gamma \times M$  del pull-back  $\omega$  della forma di volume su  $S^{n-1}$  secondo  $\Phi$ . Dunque

$$\text{vol}(S^{n-1}) \cdot \text{link}(\gamma, S) = \int_{\gamma \times S} \omega = \int_{\gamma} \left[ \int_S \omega(x, y) dy \right] dx.$$

Quindi la 1-forma definita dall'integrale tra parentesi quadre soddisfa, a meno di un fattore costante, la (19). Basta dunque porre

$$\omega_S(x) := \frac{2\pi}{\text{vol}(S^{n-1})} \int_S \omega(x, y) dy.$$

Si può infine vedere che la funzione  $u$  costruita a partire da  $\omega_S$  ha tutte le caratteristiche necessarie alla costruzione della successione approssimante  $u_\varepsilon$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [AB] G. ALBERTI, G. BELLETTINI: A non-local anisotropic model for phase transitions. Asymptotic behaviour of rescaled energies. *European J. Appl. Math.* **9** (1998), 261–284.
- [Al] G. ALBERTI: Variational models for phase transitions. An approach via  $\Gamma$ -convergence. *Differential equations and calculus of variations. Topics on geometrical evolution problems and degree theory (Pisa 1996)*, pp. 95–114, edito da G. Buttazzo *et al.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2000.
- [ABO1] G. ALBERTI, S. BALDO, G. ORLANDI: Functions with prescribed singularities. Preprint 2000.
- [ABO2] G. ALBERTI, S. BALDO, G. ORLANDI: Variational convergence for functionals of Ginzburg-Landau type. Lavoro in preparazione.
- [AS] L. AMBROSIO, H.M. SONER: A measure-theoretic approach to higher codimension mean curvature flows. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **25** (1997), 27–49.
- [BO] S. BALDO, G. ORLANDI: Codimension one minimal cycles with coefficients in  $\mathbf{Z}$  or  $\mathbf{Z}_p$ , and variational functionals on fibered spaces. *J. Geom. Anal.* **9** (1999), 547–568.
- [Ba] J.M. BALL: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **63** (1977), 337–403.
- [BZ] F. BETHUEL, X.M. ZHENG: Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces. *J. Funct. Anal.* **80** (1988), 60–75.
- [BBH] F. BETHUEL, H. BREZIS, F. HÉLEIN: *Ginzburg-Landau vortices*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 13. Birkhäuser, Boston, 1994.

- [BCL] H. BREZIS, J.-M. CORON, E.H. LIEB: Harmonic maps with defects. *Comm. Math. Phys.* **107** (1986), 649–705.
- [CH] J.W. CAHN, J.E. HILLIARD: Free energy of a nonuniform system, I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.* **28** (1958), 258–267.
- [DM] G. DAL MASO: *An Introduction to  $\Gamma$ -convergence*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8. Birkhäuser, Boston 1993.
- [GL] V.L. GINZBURG, L.D. LANDAU: On the theory of superconductivity. *Zh. Eksperim. i Teor. Fiz.* **20** (1950), 1064–1082 (in russo). Tradotto in inglese in *Men of Physics: L.D. Landau, I*, 138–167, edito da D. Ter Haar. Pergamon Press, Oxford 1965.
- [GP] V.L. GINZBURG, L.P. PITAEVSKII: On the theory of superfluidity. *Soviet Physics JETP (7) (5)* **34** (1958), 858–861.
- [JT] A. JAFFE, C. TAUBES: *Vortices and monopoles. Structure of static gauge theories*. Progress in Physics, 2. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [Je] R. JERRARD: Lower bounds for generalized Ginzburg-Landau functionals. *SIAM J. Math. Anal.* **30** (1999), 721–746.
- [JS1] R. JERRARD, H.M. SONER: Functions of bounded higher variation. Preprint 1999.
- [JS2] R. JERRARD, H.M. SONER: The Jacobian and the Ginzburg-Landau energy. Lavoro in preparazione.
- [JK] W. JIN, R.V. KOHN: Singular perturbation and the energy of folds. *J. Nonlinear Sci.* **10** (2000), 355–390.
- [Li] F.-H. LIN: Some dynamical properties of Ginzburg-Landau vortices. *Comm. Pure Appl. Math.* **49** (1996), 323–359.
- [LR] F.-H. LIN, T. RIVIÈRE: Complex Ginzburg-Landau equations in high dimensions and codimension two area minimizing currents. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **1** (1999), 237–311.
- [MM1] L. MODICA, S. MORTOLA: Un esempio di  $\Gamma$ -convergenza. *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)* **14** (1977), 285–299.
- [MM2] L. MODICA, S. MORTOLA: Il limite nella  $\Gamma$ -convergenza di una famiglia di funzionali ellittici. *Boll. Un. Mat. Ital. A (5)* **14** (1977), 526–529.
- [Mo] L. MODICA: The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch. Rational Mech. Anal.* **98** (1987), 123–142.
- [Ri] T. RIVIÈRE: Line vortices in the U(1)-Higgs model. *ESAIM Contrôle Optim. Calc. Var.* **1** (1995/96), 77–167. Pubblicazione elettronica, <http://www.emath.fr/cocv/>
- [Sa] E. SANDIER: Ginzburg-Landau minimizers from  $\mathbf{R}^{n+1}$  into  $\mathbf{R}^n$  and minimal connections. Preprint 1999.
- [Si] L. SIMON: *Lectures on geometric measure theory*. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis 3. Australian National University, Canberra, 1983.

Dipartimento di Matematica “L. Tonelli”, Università di Pisa,  
v. Buonarroti 2 - 56127 Pisa, Italy  
e-mail: alberti@dm.unipi.it