Versione: 8 ottobre 2015

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2014-15

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 7 gennaio 2015]. Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e decrescenti. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Limiti di funzioni e continuità
   - 2.1 Limiti di funzioni, proprietà elementari, forme indeterminate.
   - 2.2 Funzioni continue. Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso (teorema di Weierstrass).
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Alcune interpretazioni fisiche: velocità e accelerazione.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Teorema di Lagrange. Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito e in zero.
   - 3.5 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione all'infinito e in zero.
   - 3.6 Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali. *Giustificazione della formula* $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ *tramite gli sviluppi di Taylor.*
4. Alcuni risultati astratti
   - 4.1 *Numeri interi, razionali e reali. Completezza dei numeri reali.*
   - 4.2 Successioni e limiti di successioni. Collegamento con i imiti di funzioni.
   - 4.3 Teorema di esistenza degli zeri. *Algoritmo di bisezione e algoritmo di Newton.*
5. Integrali
   - 5.1 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 5.2 Primitiva di una funzione e teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 5.3 Regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
   - 5.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide, e in particolare dei solidi di rotazione.
   - 5.5 Integrali impropri semplici. Criterio del confronto e del confronto asintotico (per funzioni positive); criterio della convergenza assoluta (per funzioni a segno variabile).
   - 5.7 Integrali impropri non semplici.

6. SERIE NUMERICHE E SERIE DI POTENZE

6.1 Serie numeriche. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: dell'integrale, del confronto, e del confronto asintotico Esempi fondamentali: la serie geometrica e la serie armonica generalizzata. Criterio della convergenza assoluta per le serie a termini di segno variabile.

6.2 Criterio del rapporto e della radice per successioni e per serie a termini positivi. Serie di potenze e raggio di convergenza. *Serie di Taylor, con dimostrazione della convergenza per alcune funzioni elementari. Espressione dei numeri e e π come serie.*

7. EQUAZIONI DIFFERENZIALI

7.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato delle condizioni iniziali.

7.2 Equazioni lineari del primo ordine.

7.3 Equazioni a variabili separabili.

7.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee. Calcolo della soluzione particolare per certe classi di termini noti. *Equazione del pendolo e dell'oscillatore armonico, oscillatore armonico smorzato e forzato, risonanza.*

T E S T I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{1-2x}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(1 + 2x - x^2)$ relativamente all'intervallo $[0, 2]$.
3. Trovare le soluzioni $x \in [0, 2]$ della disequazione $2\sin(x^2) \geq \sqrt{3}$.
4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^2+1}{e^x}$; b) $\arcsin(1 - x)$; c) $\log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x^2)}{\log(1+x^4)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt{x})}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{2x}{\sin x}$.
6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{2^{x^2}}_{a} \ll \underbrace{\log(xe^x)}_{b} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x+1}{3^x-1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$
7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(1/x^2)\,\cos(e^{-x})}{2x^3+1}$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\arctan x - \pi/2 \leq y \leq e^{-x} - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{2-3x}$ nel punto di ascissa $x = 2/3$.
2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(2 + 2x + x^2)$ relativamente all'intervallo $[0, 2]$.
3. Trovare le soluzioni $x \in [0, 2]$ della disequazione $2\cos(x^2) \geq \sqrt{3}$.
4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)$; b) $\dfrac{x^2-1}{e^x}$; c) $\arcsin(1 + 2x)$.
5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\exp(\sqrt{x})}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{3x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\exp(2x^2)}{\sin(x^2)}$.
6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^{x}}_{a} \ll \underbrace{e^{x+\log x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{2^x+1}{3^x-1}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$
7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{(3x^2+1)\,\cos(e^{-x})}{\log(1+1/x^3)}$.
8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(x - 1) \geq 1 - e^x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{3-4x}$ nel punto di ascissa $x = 1$.
2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(3 + 2x - x^2)$ relativamente all'intervallo $[2, 3]$.

3. Trovare le soluzioni $x \in [0,2]$ della disequazione $2\cos(x^2) \leq \sqrt{3}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(1-2x)$; b) $\log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$; c) $\dfrac{x^2+2}{e^x}$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{x}{\sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{1-\exp(2x^2)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt[3]{x})}{x^2}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{6^x+1}{2^x-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{x}{\log x}}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{\sin(1/x^4)\,\cos(e^{-x})}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $\arctan x - \pi/2 \geq y \geq e^{-x} - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{1-2x}$ nel punto di ascissa $x = 1/2$.

2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(1+2x+x^2)$ relativamente all'intervallo $[-2,0]$.

3. Trovare le soluzioni $x \in [0,2]$ della disequazione $2\sin(x^2) \geq \sqrt{2}$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{x^3+1}{e^x}$; b) $\arcsin(1-x)$; c) $\log\left(\dfrac{x^4+1}{x^4-1}\right)$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x^3)}{\log(1+x^6)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(\sqrt{x})}{x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\pi^+} \frac{2x^2}{\sin x}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{3^x+1}{2^x-1}}_{a} \ll \underbrace{x\log x}_{b} \ll \underbrace{2^{-x^2}}_{c} \ll \underbrace{\log(xe^x)}_{d} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(1/x^2)\,\cos(e^{-x})}{2x^3-1}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan x - \pi/2 \geq e^{-x} - 1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{2-3x}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(2-2x-x^2)$ relativamente all'intervallo $[-2,2]$.

3. Trovare le soluzioni $x \in [0,2]$ della disequazione $2\sin(x^2) \geq 1$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)$; b) $\dfrac{x^3-1}{e^x}$; c) $\arcsin(1+2x)$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\exp(\sqrt{x})}$; b) $\lim_{x\to-\pi} \dfrac{3x^2}{\sin x}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\exp(3x^3)}{\sin(x^3)}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{3^x-1}{4^x+1}}_{b} \ll \underbrace{e^{x-\log x}}_{c} \ll \underbrace{x\log x}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x\to+\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{(3x^2-1)\,\cos(e^{-x})}{\sin(1/x^3)}$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) tali che $\arctan(x-1) \le y \le e^{-x}-1$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) := e^{3-4x}$ nel punto di ascissa $x = 3/4$.

2. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluti) di $f(x) := \exp(3-2x+x^2)$ relativamente all'intervallo $[-1,0]$.

3. Trovare le soluzioni $x \in [0,2]$ della disequazione $2\cos(x^2) \le 1$.

4. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\arcsin(1-2x)$; b) $\log\left(\dfrac{x^4-1}{x^4+1}\right)$; c) $\dfrac{x^3+2}{e^x}$.

5. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x\to-\pi^-} \dfrac{x^2}{\sin x}$; b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^3)}{1-\exp(3x^3)}$; c) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\exp(\sqrt[3]{x})}{x^2}$.

6. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{e^x}_{a} \ll \underbrace{\frac{\log x}{x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{4^x+1}{2^x-1}}_{c} \ll \underbrace{\frac{\log^2 x}{x}}_{d} \quad \text{per } x\to+\infty.$$

7. Trovare la parte principale per $x\to+\infty$ della funzione $f(x) := \dfrac{2x^2+1}{\log(1+1/x^4)\,\cos(e^{-x})}$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\arctan(x-1) \ge e^{-x}-1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Dato $a \ne 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\sin(x^4))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x\to 0^+$.
   a) Determinare $g(x)$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)-g(x)$ per $x\to 0^+$.

2. a) Dire se è vero o meno che $16+x^6 \ge \frac{1}{10}(4+x^2)^3$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
   b) Trovare la più grande costante m tale che $16+x^6 \ge m(4+x^2)^3$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.
   c) Trovare la più piccola costante M tale che $16+x^6 \le M(4+x^2)^3$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1,0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0,c)$ e $(0,-c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x,0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.

Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 5, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \neq 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\log(1 + x^5))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

   a) Determinare $g(x)$.

   b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0^+$.

2. a) Dire se è vero o meno che $243 + x^8 \geq \frac{1}{70}(9 + x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   b) Trovare la più grande costante m tale che $243 + x^8 \geq m(9 + x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   c) Trovare la più piccola costante M tale che $243 + x^8 \leq M(9 + x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1, 0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0, c)$ e $(0, -c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x, 0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.
   Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 4, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a \neq 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\sin(x^5))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

   a) Determinare $g(x)$.

   b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0^+$.

2. a) Dire se è vero o meno che $32 + x^8 \geq \frac{1}{25}(4 + x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   b) Trovare la più grande costante m tale che $32 + x^8 \geq m(4 + x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   c) Trovare la più piccola costante M tale che $32 + x^8 \leq M(4 + x^2)^4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1, 0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0, c)$ e $(0, -c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x, 0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.
   Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 3, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a \neq 0$ numero reale, poniamo $f(x) := (\log(1 + x^4))^a$ e indichiamo con $g(x)$ la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$.

   a) Determinare $g(x)$.

   b) Determinare la parte principale di $f(x) - g(x)$ per $x \to 0^+$.

2. a) Dire se è vero o meno che $81 + x^6 \geq \frac{1}{15}(9 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b) Trovare la più grande costante m tale che $81 + x^6 \geq m(9 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

c) Trovare la più piccola costante M tale che $81 + x^6 \leq M(9 + x^2)^3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3. Una compagnia deve stendere due cavi interrati per la trasmissione dati dalla città A (rappresentata dal punto del piano cartesiano di coordinate $(1, 0)$) alle località C e C' (rappresentate da $(0, c)$ e $(0, -c)$ con c è un numero positivo), e per risparmiare sul costo degli scavi si considera la possibilità di usare lo stesso tracciato per i due cavi fino ad un certo punto B di coordinate $(x, 0)$, per poi farli proseguire separatamente verso le rispettive destinazioni.
   Tenendo conto che il costo unitario delle opere di scavo è 2, mentre il costo unitario del cavo da stendere è 1, dire per quali c conviene separare immediatamente i due tracciati, cioè conviene prendere B uguale ad A, e per quali no.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $(x^3 - 1)\log(1 + x) \gg x^a$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{2+\sin x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{4^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^3 - 1}{x^4}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + x^2)e^{2x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+1}{2^n} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 2x^2$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + x^2)\cos t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x+1|} \leq y \leq -\sin x$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $(x^2 + 1)\log(2 + x) = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\log x+1}}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{2-\sin x}{\tan x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(1+x^5)^3 - 1}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + 2x^2)e^{3x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2+2} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = \dfrac{x^3}{2}$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1 + x)^2 \sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x+1|} \leq -\sin x$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $(x^4 - 1)\log(1 + x) = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\log x+1}}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\tan^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^9}{x^3 - \sin(x^3)}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a + x^2)e^{4x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+1}{2^n} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = -\dfrac{1}{4x^3}$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x)^2 \cos t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x-1|} \leq y \leq \sin x$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^3+1}{\log(2+x)} = O(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\log x+1}}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\tan^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1+x^2)^5-1}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a+2x^2)e^{2x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+2} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = \dfrac{3x^5}{4}$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x)^2 \cos t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x-1|} \geq \sin x$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^2-1}{\log(1+x)} \gg x^a$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin x}{\tan^2 x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{e^{x^2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)-x^4}{x^9}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a+x^2)e^{3x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3+2} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 3x^2$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2) \cos t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\sqrt{|x-2|} \geq y \geq \sin x$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ si ha che $\dfrac{x^4+1}{\log(2+x)} = o(x^a)$ per $x \to +\infty$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{3+\sin x}{\tan x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{5^x}{e^{x^2}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^3-1}{x^4}$.

3. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := (a+2x^2)e^{4x}$ risulta essere crescente su tutto $\mathbb{R}$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}}$.

5. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{4^n} x^n$.

6. Dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, la funzione $x(t) := at^b$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} = 2x^3$ per ogni $t > 0$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} = (1+x^2)\sin t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{|x-2|} \leq \sin x$.

Seconda parte, gruppo 1.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^2 e^{-x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-1, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((2x)^a) - (2\sin x)^a$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3-a)x = e^t + 2 \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2, 3$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
   c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 4 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}}.$$
   Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

Seconda parte, gruppo 2.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^2 e^{-2x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-1/2, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((3x)^a) - (3\sin x)^a$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (4 - a)x = 2e^t + 1 \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 3, 4$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.
   c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 9 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^3)^{2a}} \,.$$
   Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

Seconda parte, gruppo 3.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^3 e^{-x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-2, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((2x)^a) - (2\sin x)^a$.
   a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
   b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3 - a)x = e^t + 2 \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2, 3$.
   b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
   c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 4 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{2a}} .$$
Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

Scritto del primo appello: esercizi 1, 2 e 3; secondo compitino: esercizi 3, 4 e 5.

1. Si consideri la funzione f definita sulla semiretta $[0, +\infty)$ da $f(x) := x^3 e^{-2x}$. Determinare l'insieme dei punti P del grafico di f che sono *visibili* dal punto Q di coordinate $(-1, 0)$, cioè tali che il segmento di estremi P e Q interseca il grafico di f solo in P.

2. Dato $a > 0$ si consideri la funzione $f(x) := \sin((3x)^a) - (3 \sin x)^a$.
a) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ quando $a = 2$.
b) Determinare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0^+$ per ogni $a \neq 1$.

3. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (4 - a)x = 2e^t + 1 \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 3, 4$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 3$.
c) Dire per quali a si ha che tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$.

4. Consideriamo un solido V nello spazio con le seguenti proprietà: le sezioni orizzontali di V, cioè quelle ortogonali all'asse verticale y, sono tutti quadrati con lati paralleli agli assi x e z con centro nell'origine, ed il profilo di V, cioè la proiezione sul piano xy, è delimitata dall'asse delle x e dalla curva di equazione $y = 9 - x^2$. Tracciare un disegno approssimativo di V e calcolarne il volume.

5. Dato $a > 0$ consideriamo l'integrale
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^3)^{3a}} .$$
Dire dove è improprio questo integrale e discuterne il comportamento al variare di a.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+1)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $3 \leq x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{\sin x}{x^3}}_{a} \ll \underbrace{\log x}_{b} \ll \underbrace{\frac{|\log x|}{x}}_{c} \ll \underbrace{xe^x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{1+\exp(-x\sin x)}{\sin(x^2)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (\sin t, \cos t, 2t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 3$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2^{-n}}{1+n^a}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2x = 2t\exp(t^3)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 2\cos(4x) + 2$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x-1)e^{-x/3}$ relativamente alla semiretta $0 \leq x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{\cos x}{x^3}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x}{|\log x|}}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2} + |\log x|}_{c} \ll \underbrace{(1+x)\sin x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{1-\exp(-x\sin x)}{\cos(x^2)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (\cos t, -t, -\sin t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{9+x^2}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^{2a}}{n^2+2^n}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4t^3x = 2t\exp(t^4)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 3\cos(2x) - 3$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+2)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $-1 \leq x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{a} \ll \underbrace{x^2 + |\log x|}_{b} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2} + |\log x|}_{c} \ll \underbrace{x^3 \cos x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{1 - \exp(-2x\cos x)}{\sin(x^2)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (2t, \sin t, \cos t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2^{-n}}{1 + n^{3a}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4tx = 2t\exp(2t^2)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 2$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 2\cos(3x) + 2$ e determinarne periodo ed immagine.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+1)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $-2 \leq x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{|\log x|}_{a} \ll \underbrace{xe^x}_{b} \ll \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{c} \ll \underbrace{\frac{|\log x|}{x}}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\cos(x^2)}{1 - \exp(-x\sin x)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (\sin t, -\cos t, -t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{1+4x^4}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^a}{n^2 + 2^{-n}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2x = 2\exp(t^3)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 3\sin(3x) - 3$ e determinarne periodo ed immagine.

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x-1)e^{-x/3}$ relativamente alla semiretta $2 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{x|\log x|}_{a} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2} + |\log x|}_{b} \ll \underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{c} \ll \underbrace{(1+x)\sin x}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{1 - \exp(-2x\cos x)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (t, 2\sin t, 2\cos t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 2$.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2^n}{1 + n^{2a}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4t^3 x = 2\exp(t^4)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 2\sin(4x) + 2$ e determinarne periodo ed immagine.

PRIMA PARTE, GRUPPO 6.

1. Determinare (ammesso che esistano) i punti di massimo e di minimo *assoluti* della funzione $f(x) := (x+2)e^{-x/2}$ relativamente alla semiretta $1 \le x < +\infty$.

2. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{x^2 + |\log x|}_{a} \ll \underbrace{x^3 \cos x}_{b} \ll \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{c} \ll \underbrace{\frac{1}{x^2} + |\log x|}_{d} \quad \text{per } x \to 0^+.$$

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \dfrac{\sin(x^2)}{1 + \exp(-x\sin x)}$.

4. La posizione al tempo t di un punto in movimento è data da $p(t) := (-2\cos t, t, 2\sin t)$. Determinare la velocità del punto (come vettore) e la distanza percorsa dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 1$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9 + x^2}$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n^{3a}}{n^3 + 2^{-n}}$ converge ad un numero finito.

7. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 4tx = 2\exp(2t^2)$ che soddisfa la condizione iniziale $x(0) = 1$.

8. Disegnarne il grafico della funzione $f(x) := 3\sin(2x) - 3$ e determinarne periodo ed immagine.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Tra tutti i cilindri con superficie totale 1, trovare quello con volume massimo. Cosa si può dire su quello di volume minimo? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x-3)^2 = ae^x \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1+x^2}{(\log x)^{ax}} \,.$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Tra tutti i cilindri con volume 2, trovare quello con di superficie minima. Cosa si può dire su quello di di superficie massima? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x-2)^2 = ae^x \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1+x^2}{(\log x)^{2ax}} \,.$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Tra tutti i cilindri con superficie totale 2, trovare quello con volume massimo. Cosa si può dire su quello di volume minimo? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x-2)^3 = ae^x \,, \tag{*}$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(-1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1 + x^3}{(\log x)^{ax}} .$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Tra tutti i cilindri con volume 1, trovare quello con di superficie minima. Cosa si può dire su quello di di superficie massima? [*Per "cilindro" si intende un cilindro retto a base circolare.*]

2. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione
$$(x - 3)^3 = ae^x , \qquad (*)$$
e indichiamo con $x(a)$ la più piccola delle soluzioni di (*), se ne esistono.
a) Determinare il numero di soluzioni di (*) per ogni $a \in \mathbb{R}$.
b) Usando l'algoritmo di bisezione, determinare il valore di $x(-1)$ con errore inferiore a 10^{-1}.
c) Per $a \to 0^+$, determinare il limite L di $x(a)$ e la parte principale di $x(a) - L$.

3. Dato $a > 0$ consideriamo la funzione
$$f(x) := \frac{1 + x^3}{(\log x)^{2ax}} .$$
a) Determinare il dominio di f.
b) Studiare il comportamento dell'integrale improprio $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\, dx$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(2 - 2x^2)$ è concava.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\log(x^2)$; b) $\dfrac{\exp(4x-2)}{(\exp(x-1))^2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \log(2+e^x)$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 e^{1/x}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3 e^x}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 10 della funzione $f(x) := x^2 \cos(2x^2)$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^{2a}} dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x = 2t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \left| \dfrac{1}{(x-2)^3} - 1 \right|$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(1 - x^2/2)$ è concava.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\log(x^3)$; b) $\dfrac{\exp(2x-3)}{(\exp(x-1))^3}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\log x}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\log x}{\log^2 x}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\log(1+2/x)$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 9 della funzione $f(x) := \log(1 - x^3)$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^{-a})}{2+x^a} dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} - 2x = -2t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \left| \dfrac{1}{(x-2)^3} + 1 \right|$.

Prima parte, gruppo 3.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(2 - x^2)$ è convessa.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log\log(x^4)$; b) $\dfrac{\exp(2x+1)}{(\exp(x-2))^2}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x(1+x^4)$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(4x)}{x^2 e^x}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 11 della funzione $f(x) := x \sin(-2x^2)$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{\log^a x} dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + 2x = -2t$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1}{(|x| - 2)^3} - 1$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(2 - x^2/2)$ è convessa.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{(\exp(x-2))^2}{\exp(2x+1)}$; b) $\log\log(x^4)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \log(1 + 2/x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log^2 x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x(3 + x^3)$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 10 della funzione $f(x) := \dfrac{x^2}{1 - 2x^4}$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{(\sin x)^{a+2}} dx$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x = -2t$ che soddisfa $x(0) = 0$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1}{(|x| - 2)^3} + 1$.

Prima parte, gruppo 5.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(1 - 2x^2)$ è convessa.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{(\exp(x-1))^2}{\exp(4x-2)}$; b) $\log\log(x^2)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{1 - \cos(2x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \log(3 - e^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log^3 x}{\log\log x}$.

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 6 della funzione $f(x) := \sqrt[4]{1 - 4x^3}$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^3 \log^a x}$ è finito.

6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{x^n}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} - 2x = 2t$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \left|\dfrac{1}{(x+2)^2} - 1\right|$.

Prima parte, gruppo 6.

1. Dire in quali intervalli la funzione $f(x) := \exp(1 - x^2)$ è concava.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{(\exp(x-1))^3}{\exp(2x-3)}$; b) $\log\log(x^3)$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cos x}{x - \sin x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^3 e^{1/x}$.
4. Scrivere lo sviluppo di Taylor (in 0) di ordine 9 della funzione $f(x) := \dfrac{x^3}{1 - 3x^3}$.
5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1 + x^{-2})}{1 + x^a} dx$ è finito.
6. Determinare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ (per gli x per cui converge ad un numero finito).
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + 2x = 2t$ che soddisfa $x(0) = 1$.
8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \dfrac{1}{(|x| - 2)^2} + 1$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = e^t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 1; 5$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.
c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{2t}$ per $t \to +\infty$.
2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\left(x^2 - 1 + \frac{4}{x^2}\right).$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \leq y \leq 2\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.
3. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^6}\, dt\,.$$
b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-4)^2 x = e^{2t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \neq 2; 10$.

b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{4t}$ per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\Big(x^2 - 1 + \frac{9}{x^2}\Big)\,.$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

3. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^8}\,dt\,.$$
b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = -e^t\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \ne 1; 5$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 1$.
c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{3t}$ per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\Big(x^2 - 1 + \frac{16}{x^2}\Big)\,.$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

3. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^8}\,dt\,.$$
b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-4)^2 x = -e^{2t}\,. \qquad (*)$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a \ne 2; 10$.
b) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 2$.
c) Dire per quali a esiste almeno una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{3t}$ per $t \to +\infty$.

2. Consideriamo la funzione
$$f(x) := \log\Big(x^2 - 1 + \frac{25}{x^2}\Big)\,.$$
a) Disegnare il grafico di f.
b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $f(x) \le y \le 2\log x$.
c) Dire se l'area di A è finita oppure no.

3. a) Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^6}\, dt\,.$$

b) Trovare la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(3\arcsin(2x))$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{2x} - ax^2$ è convessa per $x \geq 0$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := e^{1+x}\sin(x^2)\,(\cos(3x) - 1)$

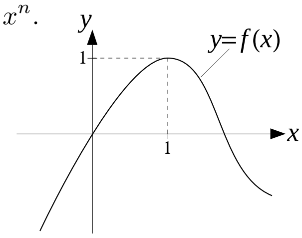
4. Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{1-x^2}\, x\, dx$.

5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{2+t^4}$.

6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2$ che soddisfano $x(0) = 0$.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{n^n+1} x^n$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := \frac{1}{2}\big|f(x)\big|$.



Prima parte, gruppo 2.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(\pi + 4\arcsin x)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{-x} - ax^2$ è convessa per $x \leq 0$.

3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{(1-e^x)\,\cos(3x)}{\sin(x^3)}$

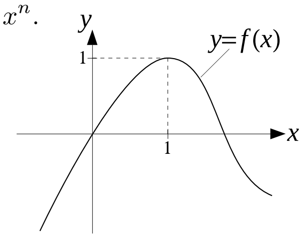
4. Calcolare la seguente primitiva: $\displaystyle\int e^{2-x^2}\, x\, dx$.

5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{2+t^6}$.

6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 2e^t$ che soddisfano $x(0) = 0$.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{3^n+1} x^n$.

8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) tali che $x^2 \leq y \leq f(|x|)$.



Prima parte, gruppo 3.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(\pi - 4\arcsin x)$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{-x} + ax^2$ è convessa per $x \leq 0$.

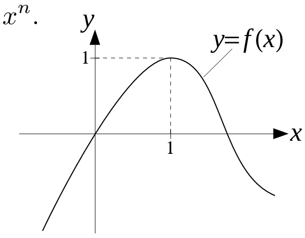
3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := (1-e^x)\,\cos(3x)\,\sin(x^3)$

4. Calcolare la seguente primitiva: $\displaystyle\int e^{1-2x}\, x\, dx$.

5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^4}$.

6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 4e^t$ che soddisfano $x(0) = 0$.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{2^n+1} x^n$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $\frac{1}{2} f(x) \leq y \leq f(x)$.

Prima parte, gruppo 4.

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $f(x) := \log(2 \arcsin(3x))$.

2. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) := e^{3x} + ax^2$ è convessa per $x \geq 0$.

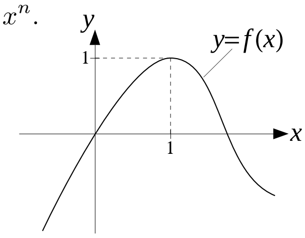
3. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{e^{1+x} \sin(x^3)}{(\cos(3x) - 1)}$

4. Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{1-2x}\, x\, dx$.

5. Scrivere la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^6}$.

6. Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 4$ che soddisfano $x(0) = 0$.

7. Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1} x^n$.



8. Sia f la funzione il cui grafico è disegnato nella figura accanto. Disegnare il grafico della funzione $g(x) := 1 - f(|x|)$.

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt[3]{\exp(8x^2) - 1}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio 2 e tali che la distanza tra i centri sia 2. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 2t^3(x^2 - 1)\,. \qquad (*)$$
   a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.
   b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -1$.
   c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt{1 - \cos(2x)}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio $\sqrt{2}$ e tali che la distanza tra i centri sia 2. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 3t^5(x^2 - 4)\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.
   b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -2$.
   c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt{\exp(4x^4) - 1}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio $2\sqrt{2}$ e tali che la distanza tra i centri sia 4. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 2t^3(x^2 - 4)\,. \tag{*}$$
   a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.
   b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -2$.
   c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \sqrt[3]{1 - \cos(2x)}$.
   b) Detta $g(x)$ è la parte principale di $f(x)$, trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) - g(x)$.

2. Consideriamo due circonferenze nel piano, entrambe di raggio 1 e tali che la distanza tra i centri sia 1. Indichiamo quindi con P_1 e P_2 i punti di intersezione delle due circonferenze, con A l'insieme dei punti del piano che sono interni ad entrambe, e con V il solido ottenuto facendo ruotare A attorno alla retta che passa per i punti P_1 e P_2.
   a) Disegnare A e calcolarne l'area.
   b) Disegnare V e calcolarne il volume.

3. Consideriamo l'equazione differenziale
$$\dot{x} = 3t^5(x^2 - 1)\,. \tag{*}$$

a) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = 0$ e disegnarne il grafico.

b) Trovare la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = -1$.

c) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la soluzione di (*) che soddisfa $x(0) = a$ è ben definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{2}{x^3+3}$.

2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2-4}{x}$ ha pendenza 3.

3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le \sqrt{3}$ comprese tra 0 e $\pi/2$.

4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\sin(2x)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x(x^6+1)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^5)-x^5}{x^{10}}$.

5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^a}{\log x}dx$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{e^t}{3x^2}$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n}$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \le 2, \\ 1/x & \text{per } x > 2. \end{cases}$

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{e^{-x}+2}$.

2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2-4}{x}$ ha pendenza 5.

3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \ge -\sqrt{3}$ comprese tra $-\pi/2$ e 0.

4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log\log x}{\sqrt{\log x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^4)-x^4}{x^{12}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\sin(2x)}$.

5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^{2a}}{(\log x)^a}dx$.

6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = \dfrac{\sin t}{3x^2}$.

7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{5^n}$.

8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \le 1, \\ 1/x & \text{per } x > 1. \end{cases}$

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{2}{e^{2x}+1}$.

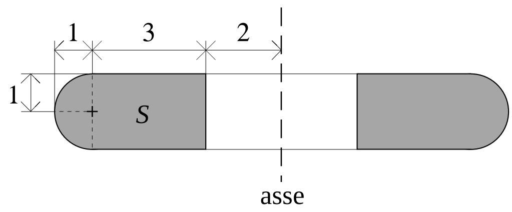
2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2+4}{x}$ ha pendenza -1.
3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \le 1$ comprese tra 0 e $\pi/2$.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log^2 x}{x\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{\sin(3x)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{\log(1+x^4)-x^4}$.
5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^3 \frac{e^{ax}}{\sqrt{\log x}}\,dx$.
6. Uguale al gruppo 1.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-4^n}{5^n}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{per } x \le 1, \\ x^2 & \text{per } x > 1. \end{cases}$

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Determinare l'inversa $f^{-1}(y)$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{2-x^3}$.
2. Trovare i punti x in cui la tangente al grafico della funzione $f(x) := \dfrac{x^2+4}{x}$ ha pendenza -3.
3. Trovare le soluzioni della disequazione $\tan(2x) \ge -1$ comprese tra $-\pi/2$ e 0.
4. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^{15}}{\sin(x^5)-x^5}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^4\exp(1/x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^-} \frac{\cos x}{\sin x}$.
5. Dire per quali $a>0$ esiste ed è finito l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^3 \frac{a^x}{(\log x)^{2a}}\,dx$.
6. Uguale al gruppo 2.
7. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n}$.
8. Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{per } x \le 2, \\ x^2 & \text{per } x > 2. \end{cases}$

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. a) Dire se la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \ge \frac{3}{5}(1+x)$ vale per ogni $x \ge 0$ oppure no.
   b) Trovare la più grande costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $\sqrt[3]{1+x^3} \ge a(1+x)$ per ogni $x \ge 0$.
   c) Trovare la più piccola costante $b \in \mathbb{R}$ tale che $\sqrt[3]{1+x^3} \le b(1+x)$ per ogni $x \ge 0$.
2. Consideriamo una ruota, bucata in corrispondenza dell'asse, la cui sezione S è rappresentata in grigio nella figura sotto.



Calcolare il volume di questa ruota.

3. Consideriamo l'integrale improprio
$$m := \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$$
a) Dire se m è finito oppure no.

b) Dato $a > 0$, esprimere in funzione di m ed a il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\,dx$.

c) Dato $b \in \mathbb{R}$, esprimere in funzione di m e b il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x-b)^2 \exp(-x^2)\,dx$.

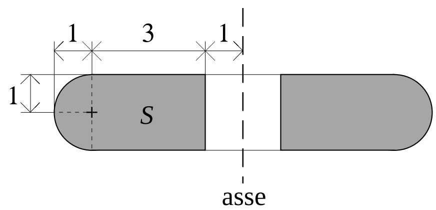
Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Dire se la disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \geq \frac{3}{5}(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ oppure no.

   b) Trovare la più grande costante $a \in \mathbb{R}$ tale che $\sqrt[4]{1+x^4} \geq a(1+x)$ per ogni $x \geq 0$.

   c) Trovare la più piccola costante $b \in \mathbb{R}$ tale che $\sqrt[4]{1+x^4} \leq b(1+x)$ per ogni $x \geq 0$.

2. Consideriamo una ruota, bucata in corrispondenza dell'asse, la cui sezione S è rappresentata in grigio nella figura sotto.



Calcolare il volume di questa ruota.

3. Consideriamo l'integrale improprio
$$m := \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$$
a) Dire se m è finito oppure no.

b) Dato $a > 0$, esprimere in funzione di m ed a il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\,dx$.

c) Dato $b \in \mathbb{R}$, esprimere in funzione di m e b il valore di $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x-b)^2 \exp(-x^2)\,dx$.

Prima parte, gruppo 1.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 & \text{per } x \leq 2 \\ a - x & \text{per } x > 2 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 2$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$ è decrescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{2^{2x}}{5^x}}_{a} \ll \underbrace{\frac{x^2-1}{x^4+1}}_{b} \ll \underbrace{e^{-x}}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \dfrac{x^2}{1+2x^2}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(t, \sin(t^2), \cos(t^2)\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-2x}\, dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $2x - 1 \leq y \leq 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Prima parte, gruppo 2.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} ax^2 & \text{per } x \leq 4 \\ a - x & \text{per } x > 4 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 4$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := 2\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ è crescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{x^4}{x^{10}+1}}_{a} \ll \underbrace{2^{-x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{7^x}{2^{3x}}}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := x^2\sqrt{1+2x^2}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(\sin(2t), t^2, \cos(2t)\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 \sqrt[3]{8-4x}\, dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) nel piano tali che $1 - \frac{1}{(x+1)^2} \leq y \leq 2 + 2x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} a + x & \text{per } x \leq 2 \\ ax^2 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 2$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+3}$ è decrescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{\frac{3^x}{x^2}}_{a} \ll \underbrace{\frac{2^{3x}}{4^x}}_{b} \ll \underbrace{\frac{3^x}{x+1}}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := x^4\sqrt{1-2x}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(t^2, \cos(2t), \sin(2t)\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^3 \sqrt[3]{27 - 9x}\, dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} - 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2x - 1 \leq 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$f(x) := \begin{cases} a + x & \text{per } x \leq 4 \\ ax^2 & \text{per } x > 4 \end{cases}$$
è continua nel punto $x = 4$.

2. Determinare l'insieme degli x in cui la funzione $f(x) := 2\sqrt{x} - \sqrt{x-2}$ è crescente.

3. Riordinare le funzioni che seguono in modo da ottenere un'affermazione corretta:
$$\underbrace{3^x(x^3-1)}_{a} \ll \underbrace{\frac{3^{2x}}{4^x}}_{b} \ll \underbrace{3^x(x^2+1)}_{c} \quad \text{per } x \to +\infty.$$

4. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 6 della funzione $f(x) := \frac{x^4}{1-2x}$.

5. Consideriamo un punto P in movimento le cui coordinate sono date da
$$P = \big(\sin(t^2), \cos(t^2), t\big)$$
per ogni istante t. Calcolare la velocità di P all'istante $t = 0$.

6. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-3x}\,dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\dot{x} + 3t^2 x = 0$ che soddisfa $x(0) = -1$.

8. Risolvere graficamente la disequazione $2 + 2x \leq 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

SECONDA PARTE.

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + ax = e^{-t}\,. \qquad (*)$$
a) Risolvere (*) per $a < 4$ e $a \neq 3$.
b) Risolvere (*) per $a = 4$ e per $a = 3$.
c) Dire per quali $a \leq 4$ tutte le soluzioni x di (*) soddisfano $x(t) = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.
d) Dire per quali $a \leq 4$ esiste una soluzione x di (*) tale che $x(t) \sim e^{-t/2}$ per $t \to +\infty$.

2. Sia A l'insieme dei punti (x, y) nel piano tali che
$$e^y + x^2 - 2x \geq 3\,,$$
e sia A' il sottoinsieme dei punti di A tali che $-1 \leq x \leq 0$ e $y \leq 0$.
a) Disegnare A ed A'.
b) Dire se A' ha area finita oppure no, ed eventualmente calcolarla.

3. Determinare il comportamento della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n+3} - e^2\right]$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluto) della funzione $f(x) := x^3 - 12x + 4$ relativamente all'intervallo $[-4, 3]$.

2. Calcolare i seguenti limiti a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x}(x^x+1)$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log\log x}{\sqrt[4]{\log x}}$; c) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{2x}{1+\cos x}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := \dfrac{\sin(-2x^2)}{x^2}$.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_0^{-2x} \exp(t^2)\, dt$.

5. Calcolare la lunghezza percorsa dal punto in movimento di coordinate $\big(e^{-t}\cos(2t),\, e^{-t}\sin(2t)\big)$ nell'intervallo di tempo $[0, +\infty)$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 4x = 8t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}+n^3}{1+n^{2a}(1+n)}$ converge a un numero finito.

8. Risolvere graficamente la disequazione $-\sin(|x|) \le 1 - x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Trovare i punti di massimo e minimo (assoluto) della funzione $f(x) := x^3 - 12x + 4$ relativamente all'intervallo $[-3, 4]$.

2. Calcolare i seguenti limiti a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{\log x}}{\log\log x}$; b) $\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{1}{\sin(2x)}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x+1}{x^x+1}$.

3. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 8 della funzione $f(x) := \dfrac{\log(1-4x^3)}{2x}$.

4. Calcolare la derivata della funzione $f(x) := \displaystyle\int_4^{x^2} \exp(-t^2)\, dt$.

5. Calcolare la lunghezza percorsa dal punto in movimento di coordinate $\big(e^{-2t}\cos t,\, e^{-2t}\sin t\big)$ nell'intervallo di tempo $[0, +\infty)$.

6. Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $\ddot{x} + 9x = 27t$ che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

7. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{1+(n^a+1)n}$ converge a un numero finito.

8. Risolvere graficamente la disequazione $-|\sin x| \ge 1 - x^3$.

SECONDA PARTE.

1. a) Dire se la disequazione $\log x + \dfrac{1}{8x^3} \ge 0$ vale tutti gli $x > 0$ oppure no.

   b) Dire per quali $a > 0$ la disequazione $\log x + \dfrac{a}{x^3} \ge 0$ vale tutti gli $x > 0$.

2. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := 2 - \sqrt{3 + e^{-4x^2}}$.

b) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ trovare parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) + ax^2$.

3. a) Studiare il segno della funzione $f(x) := x^{2x} - 1$ (definita per $x > 0$).

   b) Discutere l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}$.

S O L U Z I O N I

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. $y := \frac{1}{e}(3 - 2x)$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 0; 2$, ed il massimo in $x = 1$.

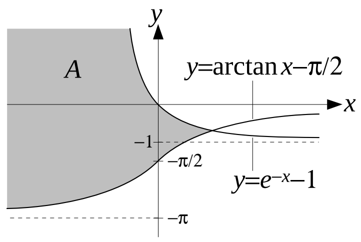
3. $\sqrt{\frac{\pi}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{2\pi}{3}}$.

4. a) $\frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$; b) $\frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}}$; c) $\frac{4x}{1 - x^4}$.

5. a) 2; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

6. $d \ll c \ll b \ll a$.

7. $f(x) \sim \frac{1}{2x^5}$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. $y := 3 - 3x$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 0$, ed il massimo in $x = 2$.

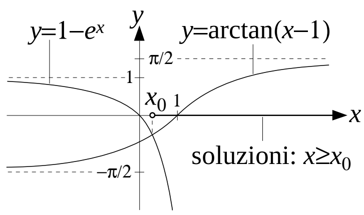
3. $0 \leq x \leq \sqrt{\pi/6}$.

4. a) $\frac{6x^2}{1 - x^6}$; b) $\frac{-x^2 + 2x + 1}{e^x}$; c) $\frac{1}{\sqrt{-x - x^2}}$.

5. a) 0; b) non esiste; c) -2.

6. $d \ll c \ll a \ll b$.

7. $f(x) \sim 3x^5$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. $y := \frac{1}{e}(5 - 4x)$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 3$, ed il massimo in $x = 2$.

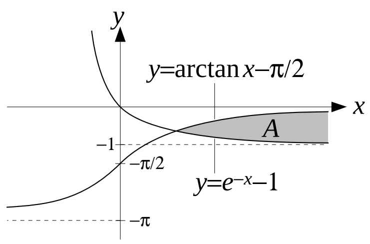
3. $\sqrt{\frac{\pi}{6}} \le x \le 2$.

4. a) $\dfrac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$; b) $\dfrac{4x}{x^4-1}$; c) $\dfrac{-x^2+2x-2}{e^x}$.

5. a) $+\infty$; b) $-1/2$; c) $+\infty$.

6. $b \ll d \ll a \ll c$.

7. $f(x) \sim 2x^6$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. $y := 2 - 2x$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = -1$, ed il massimo in $x = -2; 0$.

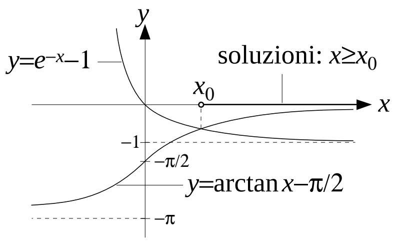
3. $\sqrt{\frac{\pi}{4}} \le x \le \sqrt{\frac{3\pi}{4}}$.

4. a) $\dfrac{-x^3+3x^2-1}{e^x}$; b) $\dfrac{-1}{\sqrt{2x-x^2}}$; c) $\dfrac{8x^3}{1-x^8}$.

5. a) $9/2$; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

6. $c \ll d \ll b \ll a$.

7. $f(x) \sim \dfrac{1}{2x^5}$ per $x \to +\infty$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 5.

1. $y := \dfrac{1}{e}(4-3x)$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 2$, ed il massimo in $x = -1$.

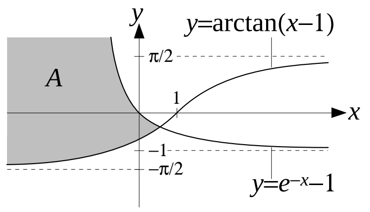
3. $\sqrt{\frac{\pi}{6}} \le x \le \sqrt{\frac{5\pi}{6}}$.

4. a) $\dfrac{6x^2}{x^6-1}$; b) $\dfrac{-x^3+3x^2+1}{e^x}$; c) $\dfrac{1}{\sqrt{-x-x^2}}$.

5. a) 0; b) non esiste; c) -3.

6. $b \ll d \ll c \ll a$.

7. $f(x) \sim 3x^5$ per $x \to +\infty$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. $y := 4 - 4x$

2. Il valore minimo viene raggiunto in $x = 0$, ed il massimo in $x = -1$.

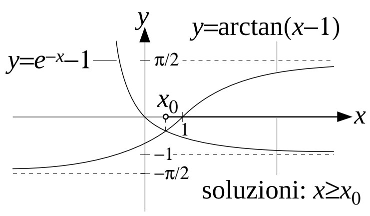
3. $\sqrt{\dfrac{\pi}{3}} \le x \le 2$.

4. a) $\dfrac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$; b) $\dfrac{8x^3}{x^8-1}$; c) $\dfrac{-x^3+3x^2-2}{e^x}$.

5. a) $+\infty$; b) $-1/3$; c) $+\infty$.

6. $b \ll d \ll c \ll a$.

7. $f(x) \sim 2x^6$ per $x \to +\infty$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Usando il fatto che $\sin t \sim t$ per $t \to 0$ otteniamo che $\sin(x^4) \sim x^4$ per $x \to 0$, e quindi

$$f(x) = (\sin(x^4))^a \sim x^{4a}\,;$$

dunque $g(x) = x^{4a}$.

b) Visto che ad f sottraiamo esattamente la sua parte principale, dobbiamo ottenere un termine in più nello sviluppo di f. Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ con $t = x^4$ otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) = (\sin(x^4))^a - x^{4a} &= \left[x^4 - \frac{x^{12}}{6} + O(x^{20})\right]^a - x^{4a} \qquad (1) \\ &= x^{4a}\left[1 - \frac{x^8}{6} + O(x^{16})\right]^a - x^{4a}\,. \end{aligned}$$

Usiamo quindi lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = -x^8/6 + O(x^{16})$ e il fatto che $t = O(x^8)$ e dunque $O(t^2) = O(x^{16})$:

$$\begin{aligned}\Big[1 - \frac{x^8}{6} + O(x^{16})\Big]^a &= 1 + at + O(t^2)\\ &= 1 + a\Big(-\frac{x^8}{6} + O(x^{16})\Big) + O(x^{16}) = 1 - \frac{a}{6}x^8 + O(x^{16})\,.\end{aligned}$$

Riprendiamo infine l'equazione (1):

$$f(x) - g(x) = x^{4a} - \frac{a}{6}x^{4a+8} + O(x^{4a+16}) - x^{4a} \sim -\frac{a}{6}x^{4a+8}\,.$$

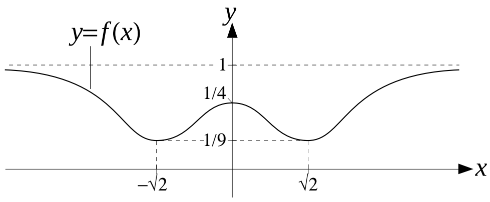
2. a) Riscrivendo la disequazione $16 + x^6 \geq \frac{1}{10}(4+x^2)^3$ nella forma

$$f(x) \geq \frac{1}{10} \quad \text{con} \quad f(x) := (16 + x^6)(4+x^2)^{-3}\,,$$

la domanda diventa: è vero che il valore minimo di f è maggiore o uguale a $1/10$?
Tracciamo quindi il grafico di f. Osserviamo che f è definita su tutto $\mathbb{R}$, positiva, pari, ed ha limite uguale ad 1 per $x \to +\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) := 24\,x(x^4 - 4)(4+x^2)^{-4}$$

otteniamo che f decresce nell'intervallo $[0, \sqrt{2}]$ e cresce nella semiretta $[\sqrt{2}, +\infty)$. A partire da questi dati tracciamo il disegno approssimativo del grafico di f dato nella figura sotto.



In particolare $\pm\sqrt{2}$ sono i punti di minimo assoluto di f; dunque

$$\min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(\pm\sqrt{2}) = 1/9$$

e siccome $1/10$ è minore di $1/9$, la risposta alla domanda posta sopra è affermativa.
b) Riscrivendo la disequazione $16 + x^6 \geq m(4+x^2)^3$ come $f(x) \geq m$ si vede che la più grande costante m che soddisfa questa disequazione è il minimo di f, ovvero, per quanto visto sopra,

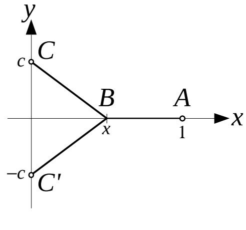
$$m = \min_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(\pm\sqrt{2}) = 1/9\,.$$

c) Ragionando come per la domanda b) otteniamo che M coincide con l'estremo superiore dei valori di f, che è dato dal limite di f per $x \to +\infty$, ovvero

$$M = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1\,.$$

(In effetti 0 è un punto di massimo locale, ma $f(0) = 1/4$ è più piccolo del limite all'infito, vale a dire 1.)

3. Il tracciato considerato è disegnato nella figura sotto.



Dobbiamo dunque determinare la posizione di B che rende minimo il costo totale dell'opera, e capire per quali c tale tale posizione coincide con A. Osserviamo innazitutto che deve essere

$0 \leq x \leq 1$ (non è mai conveniente prendere $x > 1$ oppure $x < 0$). Sotto questa ipotesi la lunghezza dello scavo è

$$\ell_s = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{BC'} = 1 - x + 2\sqrt{x^2 + c^2}\,,$$

mentre la somma delle lunghezze dei due cavi è

$$\ell_c = \big(\overline{AB} + \overline{BC}\big) + \big(\overline{AB} + \overline{BC'}\big) = 2(1 - x) + 2\sqrt{x^2 + c^2}\,,$$

e pertanto il costo totale è dato dalla funzione

$$f(x) := 5\ell_s + \ell_c = 7(1 - x) + 12\sqrt{x^2 + c^2}\,.$$

Per determinare la collocazione ottimale di B dobbiamo trovare il punto di minimo di $f(x)$ relativamente all'intervallo $[0, 1]$. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = -7 + \frac{12\,x}{\sqrt{x^2 + c^2}}$$

otteniamo che f decresce nell'intervallo $[0, \bar{x}]$ dove $\bar{x} := 7c/\sqrt{95}$, e cresce nella semiretta $[\bar{x}, +\infty)$. Pertanto il punto di minimo di f relativamente all'intervallo $[0, 1]$ è 1 se $\bar{x} \geq 1$ (ed in tal caso B coincide con A), ed è $\bar{x}$ se $\bar{x} < 1$ (ed in tal caso B non coincide con A). In particolare B coincide con A solo nel primo caso, vale a dire per $\bar{x} \geq 1$, cioè

$$c \geq \frac{\sqrt{95}}{7} \simeq 1{,}39\,.$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. a) Analogo al gruppo 1: $g(x) = x^{5a}$.
   b) Usando gli sviluppi di Taylor $\log(1 + t) = t - t^2/2 + O(t^3)$ e $(1 + t)^a = 1 = at + O(t^2)$ otteniamo
   $$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \left[x^5 - \frac{x^{10}}{2} + O(x^{15})\right]^a - x^{5a} \\ &= x^{5a}\left[1 - \frac{x^5}{2} + O(x^{10})\right]^a - x^{5a} \\ &= x^{5a}\left[1 - \frac{a}{2}x^5 + O(x^{10})\right] - x^{5a} = -\frac{a}{2}x^{5a+5} + O(x^{5a+10}) \sim -\frac{a}{2}x^{5a+5}\,. \end{aligned}$$
2. Analogo al gruppo 1. a) Vero. b) $m = 1/64$. c) $M = 1$.
3. Analogo al gruppo 1: B coincide con A per $c \geq 4/3 \simeq 1{,}33$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Analogo al gruppo 1. a) $g(x) = x^{5a}$. b) $f(x) - g(x) \sim -\dfrac{a}{6}x^{5a+10}$ per $x \to 0$.
2. Analogo al gruppo 1. a) Falso. b) $m = 1/27$. c) $M = 1$.
3. Analogo al gruppo 1: B coincide con A per $c \geq \sqrt{39}/5 \simeq 1{,}25$.

Seconda parte, gruppo 4.

1. Analogo al gruppo 2. a) $g(x) = x^{4a}$. b) $f(x) - g(x) \sim -\dfrac{a}{2}x^{4a+4}$ per $x \to 0$.
2. Analogo al gruppo 1. a) Falso. b) $m = 1/16$. c) $M = 1$.
3. Analogo al gruppo 1: B coincide con A per $c \geq \sqrt{5}/2 \simeq 1{,}12$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1b). La maggior parte dei presenti, inclusi quelli che hanno dato la risposta corretta, hanno semplicemente ignorato il resto nei vari sviluppi usati. Diversi dei presenti hanno fatto errori grossolani nell'uso delle potenze (come scrivere $(z+y)^a = x^a + y^a$) oppure hanno omesso semplificazioni elementari (come $(x^4)^a = x^{4a}$).

- Seconda parte, esercizio 1b). Alcuni dei presenti hanno sviluppato la potenza $(1+t)^a$ usando la formula del binomio di Newton, che però si applica solo al caso in cui l'esponente a è intero.

- Seconda parte, esercizio 2. Per cercare i valori massimi e minimi della funzione $f(x) := (16 + x^6)(4+x^2)^{-3}$, può convenire usare il cambio di variabile $t = x^2$, e cercare quindi i valori massimi e minimi di $g(t) := (16+t^3)(4+t)^{-3}$ (qui mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso discorso vale anche per gli altri gruppi).

- Seconda parte, esercizio 2c). Nel determinare M, quasi nessuno dei presenti si è accorto che 0 è un punto di massimo locale di f e non assoluto, e che l'estremo superiore dei valori di f è dato dal limite di f per $x \to \pm\infty$ (e non da $f(0)$).

- Seconda parte, esercizio 2a). In alternativa all'approccio descritto sopra, si può riscrivere la disequazione come $g(x) \geq 0$ con $g(x) := 16 + x^6 - \frac{1}{10}(4+x^2)^3$, far vedere il valore minimo di g è strettamente positivo (qui mi riferisco al gruppo 1, ma un discorso analogo vale anche per gli altri gruppi). Lo studio del segno della derivata di g è un po' delicato, ma alla fine si ottiene che i punti di minimo assoluto di g sono
$$x_{1,2} := \pm \frac{2}{\sqrt{\sqrt{10} - 1}} \,,$$
e si verifica quindi che $\min g(x) = g(x_1) > 0$. Questo approccio può essere adottato anche per rispondere alle domande b) e c)...

- Seconda parte, esercizio 2. Alcuni dei presenti hanno fatto errori di calcolo che hanno portato a conclusioni palesemente sbagliate, per esempio che il valore minimo di f è uguale al valore massimo (o persino maggiore). Non rendersi conto dell'assurdità di queste conclusioni è un errore grave.

- Seconda parte, esercizio 3. Qualcuno ha cercato il minimo della funzione costo su tutto $\mathbb{R}$, dimenticando che x deve essere compreso tra 0 e 1. Si noti per inciso che per $x \geq 1$ il costo è (nel caso del gruppo 1)
$$7(x-1) + 12\sqrt{x^2 + c^2} \,,$$
e quindi non coincide con la formula data sopra, vale a dire $7(1-x) + 12\sqrt{x^2+c^2}$.

Prima parte, gruppo 1.

1. I valori di a cercati sono $a \leq 3$.

2. a) Non esiste; b) $+\infty$; c) 3.

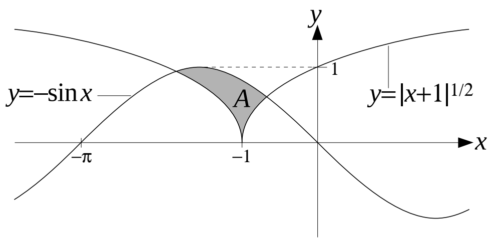
3. Imponendo che $f'(x) := 2(a + x + x^2)e^{2x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/4$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 3 - 2x$ otteniamo
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{2}\int_3^1 y^{-1/2}dy = \Big| y^{1/2} \Big|_1^3 = \sqrt{3} - 1\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = 2$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = 2a^2t^{2b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = 3,\ b = -2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \tan(\sin t)$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. I valori di a cercati sono $a > 2$.

2. a) e; b) $+\infty$; c) 1/3.

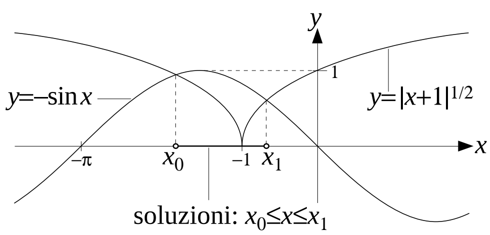
3. Imponendo che $f'(x) := (3a + 4x + 6x^2)e^{3x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 2/9$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 3x$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}} = -\frac{1}{3}\int y^{-1/3}\,dy = -\frac{1}{2}y^{2/3} + c = -\frac{1}{2}(4-3x)^{2/3} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{1}{3}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = \frac{1}{2}a^3t^{3b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 2,\ b = -1$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \dfrac{1}{\cos t} - 1 = \dfrac{1-\cos t}{\cos t}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. I valori di a cercati sono $a > 4$.

2. a) 0; b) non esiste; c) 6.

3. Imponendo che $f'(x) := 2(2a + x + 2x^2)e^{4x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/16$.

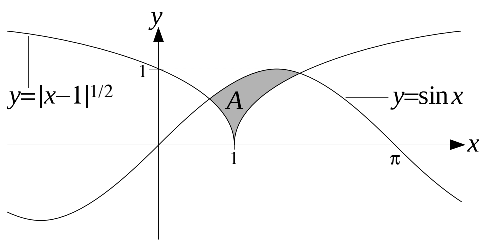
4. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 3x$ otteniamo
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-3x}} = -\frac{1}{3}\int_4^1 y^{-1/3}\,dy = \frac{1}{2}\Big|y^{2/3}\Big|_1^4 = \sqrt[3]{2} - \frac{1}{2}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{1}{2}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = -\frac{1}{4}a^{-3}t^{-3b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 1,\ b = 1/2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \dfrac{2}{1-2\sin t} - 1 = \dfrac{1+2\sin tt}{1-2\sin t}$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. I valori di a cercati sono $a \geq 3$.

2. a) 0; b) $-\infty$; c) 1/5.

3. Imponendo che $f'(x) := 2(a + 2x + 2x^2)e^{2x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/2$.

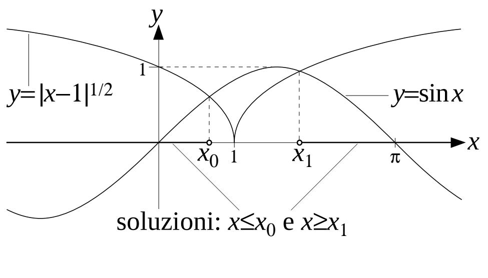
4. Usando il cambio di variabile $y = 5 - 4x$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}} = -\frac{1}{4}\int y^{-1/4}\,dy = -\frac{1}{3}y^{3/4} + c = -\frac{1}{3}(5-4x)^{3/4} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{2}{3}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = \frac{3}{4}a^5t^{5b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 1,\ b = -1/2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \dfrac{1}{1-\sin t} - 1 = \dfrac{\sin t}{1-\sin t}$.

8.



Prima parte, gruppo 5.

1. I valori di a cercati sono $a < 2$.

2. a) $+\infty$; b) 0; c) 0.

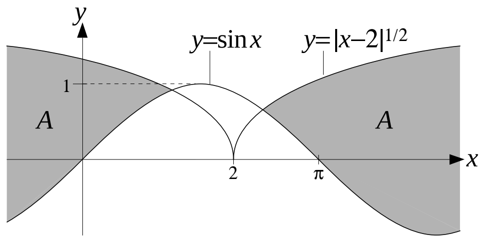
3. Imponendo che $f'(x) := (3a + 2x + 3x^2)e^{3x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/9$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 3 - 2x$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} = -\frac{1}{2}\int y^{-1/2}\, dy = -y^{1/2} + c = -(3-2x)^{1/2} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = \dfrac{1}{2}$.

6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = 3a^2t^{2b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = 2,\ b = -2$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \tan\Big(\sin t + \dfrac{\pi}{4}\Big)$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. I valori di a cercati sono $a \geq 4$.

2. a) $-\infty$; b) 0; c) 3.

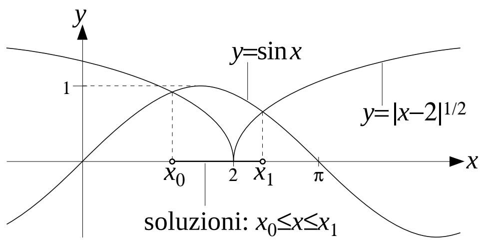
3. Imponendo che $f'(x) := 4(a + x + 2x^2)e^{4x} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ otteniamo $a \geq 1/8$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 5 - 4x$ otteniamo
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{5-4x}} = -\frac{1}{4}\int_5^1 y^{-1/4}\, dy = \frac{1}{3}\Big|y^{3/4}\Big|_1^5 = \frac{5^{3/4}-1}{3}\,.$$

5. Usando la formula $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ dove a_n sono i coefficienti della serie, otteniamo $R = 4$.

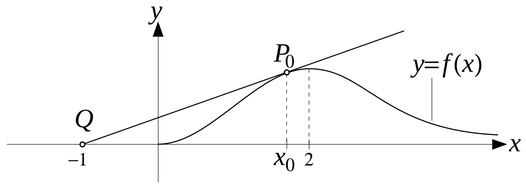
6. Imponendo che $x(t) := at^b$ l'equazione diventa $ab(b-1)t^{b-2} = 2a^3t^{3b}$, e questa identità vale se i due monomi hanno gli stessi esponenti e gli stessi coefficienti, cosa che si verifica per $a = \pm 1,\ b = -1$.

7. Equazione a variabili separabili, la soluzione è $x(t) = \tan(1 - \cos t)$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. Cominciamo disegnando il grafico della funzione f. Osserviamo che $f(x)$ è strettamente positiva per $x > 0$, si annulla per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) := x(2-x)e^{-x}$$
si vede che f cresce nell'intervallo $[0, 2]$, e decresce altrimenti, ed in particolare 2 è il punto di massimo assoluto. Inoltre studiando il segno della derivata seconda
$$f''(x) := (2-4x+x^2)e^{-x}$$
otteniamo che f è concava nell'intervallo $\big[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\big]$ e convessa altrove. Sulla base di quanto appena detto otteniamo il tracciato approssimativo del grafico di f riportato nella figura sotto.



Dal disegno risulta chiaro che i punti visibili del grafico sono quelli di ascissa $x \in [0, x_0]$ dove x_0 corrisponde al punto P_0 per cui la retta tangente al grafico passa per Q. Poiché la retta tangente al grafico in P_0 ha equazione
$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\,,$$
imponendo che tale retta passi per il punto Q di coordinate $(-1, 0)$ otteniamo l'equazione
$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0+1) = \big(x_0^2 + (x_0^2 - 2x_0)(x_0+1)\big)e^{-x_0} = x_0(x_0^2-2)e^{-x}\,,$$
da cui si ottiene $x_0 = \sqrt{2}$.

2. Ci limitiamo al punto b), che include il punto a) come caso particolare. Osserviamo innanzitutto la funzione
$$f(x) = \sin((2x)^a) - (2\sin x)^a$$
è scritta come differenza di due termini con la stessa parte principale, cioè $2^a x^a$, e quindi per ottenere la parte principale di f dobbiamo sviluppare entrambi i termini con maggior precisione. Usando lo sviluppo di Taylor $\sin t = t - t^3/6 + O(t^5)$ con $t = (2x)^a$ otteniamo
$$\sin((2x)^a) = 2^a x^a - \frac{2^{3a}}{6}x^{3a} + O(x^{5a})\,, \tag{1}$$
mentre con $t = 2x$ si ha
$$(2\sin x)^a = 2^a\Big[x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)\Big]^a = 2^a x^a\Big[1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\Big]^a\,,$$
e usando inoltre lo sviluppo $(1+t)^a = 1 + at + O(t^2)$ con $t = -\frac{1}{6}x^2 + O(x^4)$ otteniamo infine
$$\begin{aligned}(2\sin x)^a &= 2^a x^a\Big[1 + a\Big(-\frac{x^2}{6} + O(x^4)\Big) + O(x^4)\Big]\\ &= 2^a x^a - \frac{2^a a}{6}x^{a+2} + O(x^{a+4})\,. \end{aligned} \tag{2}$$
Distinguiamo ora due casi: per $a < 1$ si ha $3a < a+2$, e mettendo insieme le formule (1) e (2) otteniamo
$$f(x) = -\frac{2^{3a-1}}{3}x^{3a} + o(x^{3a}) \sim -\frac{2^{3a}}{6}x^{3a}\,,$$
mentre per $a > 1$ si ha $a+2 < 3a$, e quindi
$$f(x) = \frac{2^a a}{6}x^{a+2} + o(x^{a+2}) \sim \frac{2^a a}{6}x^{a+2}\,.$$

3. a) L'equazione caratteristica associata alla (*) è $\lambda^2 - 2\lambda + (3-a) = 0$ ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} := 1 \pm \sqrt{a-2}\,,$$

e quindi la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 2 \\ e^t\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 2 \end{cases} \tag{3}$$

dove $\omega := \sqrt{|a-2|}$ e c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari.
Osserviamo inoltre che una soluzione particolare dell'equazione di partenza (*) è data da $x_1 + x_2$ dove x_1 e x_2 sono rispettivamente soluzioni particolari delle equazioni non omogenee

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3-a)x = e^t\,, \tag{4}$$
$$\ddot{x} - 2\dot{x} + (3-a)x = 2\,. \tag{5}$$

Siccome il coefficiente 1 nell'esponente del termine noto e^t in (4) non è mai soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo x_1 della forma be^t; così facendo la (4) diventa $b(2-a)e^t = e^t$, ed è verificata quando $b(2-a) = 1$, dunque

$$x_1(t) = \frac{e^t}{2-a}\,.$$

Cerchiamo invece la soluzione particolare x_2 della (5) tra le funzioni costanti, ottenendo

$$x_2(t) = \frac{2}{3-a}\,.$$

Pertanto la soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = x_{\mathrm{om}}(t) + \frac{e^t}{2-a} + \frac{2}{3-a}\,. \tag{6}$$

dove x_{om} è data in (3).
b) Per $a = 2$ l'equazione caratteristica della (*) diventa $\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$ ed ha quindi come unica soluzione $\lambda = 1$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^t(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Siccome il coefficiente 1 nell'esponente del termine noto e^t della (4) coincide in questo caso con l'unica soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo x_1 della forma bt^2e^t; in questo caso la (4) si riduce a $2be^t = e^t$, che è verificata per $b = 1/2$, e quindi

$$x_1(t) = \frac{t^2 e^t}{2}\,,$$

mentre una soluzione particolare della (5) è $x_2(t) = 2$ come prima. Pertanto la soluzione generale della (*) è data da

$$x(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + \frac{t^2 e^t}{2} + 2 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

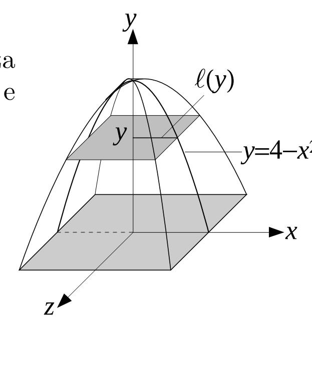
c) Esaminando le soluzioni date in (6) e (7) si vede subito che la condizione $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$ è sempre verificata quando $a \le 2$. Nel caso $a > 0$, invece, la condizione è verificata se e solo se $\lambda_{1,2} \le 2$, ovvero

$$1 + \sqrt{a-2} \le 2$$

ovvero $a \le 3$. Mettendo insieme di diversi casi si ottiene quindi che i valori di a cercati sono $a \le 3$.

4. Indichiamo con $\ell = \ell(y)$ la metà del lato della sezione di V ad altezza y. Dal disegno accanto risulta chiaro che ℓ soddisfa $y = 4 - \ell^2$, e dunque $\ell = \sqrt{4-y}$.
Pertanto l'area della sezione in questione è

$$a(y) = 4\ell^2 = 4(4-y)\,,$$



e quindi il volume di V è

$$\text{volume}(V) = \int_0^4 a(y)\,dy = \int_0^4 4(4-y)\,dy = 32\,.$$

5. Osserviamo che $e^x - e^2 > 0$ per $x > 2$ e quindi la funzione integranda è ben definita, continua e positiva per $x > 2$, ma non è definita in $x = 2$. Quindi l'integrale è improprio in 2 e $+\infty$, esiste sempre e vale un numero positivo oppure $+\infty$, e lo studiamo spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}} = \int_2^3 \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}}\,. \tag{8}$$

Riguardo all'ultimo degli integrali in (8), osserviamo che per ogni $a > 0$ si ha

$$(e^x - e^2)^{3a} \sim e^{3ax} \gg x^2 \quad \text{per } x \to +\infty,$$

e pertanto questo integrale è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty 1/x^2\,dx < +\infty$.

Per quanto riguarda invece il secondo integrale in (8), usando il cambio di variabile $x = y + 2$ ci riconduciamo ad un integrale improprio in 0, vale a dire

$$\int_2^3 \frac{dx}{(e^x - e^2)^{3a}} = \int_0^1 \frac{dy}{(e^{2+y} - e^2)^{3a}}\,.$$

Osserviamo ora che

$$(e^{2+y} - e^2)^{3a} = e^{6a}(e^y - 1)^{3a} \sim e^{6a} y^{3a} \quad \text{per } y \to 0,$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, il secondo integrale in (8) si comporta come $\int_0^1 1/y^{3a}\,dy$, ed in particolare risulta essere finito se e solo se $3a < 1$, ovvero $a < 1/3$.

Riassumendo, l'integrale di partenza è finito per $a < 1/3$ e vale $+\infty$ altrimenti.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1. Come per il gruppo 1, la funzione $f(x)$ è sempre positive, si annulla solo per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Inoltre

$$f'(x) = 2x(1-x)e^{-2x}\,, \quad f''(x) = 2(1 - 4x + 2x^2)e^{-2x}\,,$$

da cui segue che f è crescente in $[0,1]$ e decrescente altrove, ed è concava in $\big[1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\big]$ e convessa altrove.

Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \le x_0$ dove x_0 viene ottenuto risolvendo l'equazione

$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 + 1/2) = x_0(2x_0^2 - 1)e^{-2x_0}\,,$$

e vale $x_0 = 1/\sqrt{2}$.

2. Analogo al gruppo 1:

$$\text{parte principale di } f(x) = \begin{cases} \frac{3^{3a}}{6} x^{3a} & \text{per } a < 1, \\ \frac{3^a a}{6} x^{a+2} & \text{per } a > 1. \end{cases}$$

3. Analogo al gruppo 1. a) La soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\rm om}(t) = \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} & \text{se } a > 3 \\ e^t\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) & \text{se } a < 3 \end{cases}$$

dove $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{a-3}$, $\omega := \sqrt{|a-3|}$, e c_1, c_2 sono numeri reali arbitrari. La soluzione generale della (*) è invece

$$x(t) = x_{\rm om}(t) + \frac{2e^t}{3-a} + \frac{1}{4-a}\,.$$

b) Per $a = 3$ la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = e^t(c_1 + c_2 t) + t^2 e^t + 1 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

c) I valori di a cercati sono $a \leq 4$.

4. Analogo al gruppo 1. Il volume di V è dato da

$$\text{volume}(V) = \int_0^9 a(y)\, dy = \int_0^9 4(9-y)\, dy = 162\,.$$

5. Analogo al gruppo 1. L'integrale è improprio in 3 e in $+\infty$, vale un numero positivo finito se $a < 1/2$, e vale $+\infty$ altrimenti.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1. Come per il gruppo 1, la funzione $f(x)$ è sempre positive, si annulla solo per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Inoltre

$$f'(x) = x^2(3-x)e^{-x}\,, \quad f''(x) = x(6-6x+x^2)e^{-x}\,,$$

da cui segue che f è crescente in $[0, 3]$ e decrescente altrove, ed è concava in $\big[3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}\big]$ e convessa altrove.

Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \leq x_0$ dove x_0 viene ottenuto risolvendo l'equazione

$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0+2) = x_0^2(x_0^2-6)e^{-x_0}\,,$$

e vale $x_0 = \sqrt{6}$.

2. Uguale al gruppo 1.

3. Uguale al gruppo 1.

4. Uguale al gruppo 1.

5. Analogo al gruppo 1. L'integrale è improprio in 2 e in $+\infty$, vale un numero positivo finito se $a < 1/2$, e vale $+\infty$ altrimenti.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1. Come per il gruppo 1, la funzione $f(x)$ è sempre positive, si annulla solo per $x = 0$, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Inoltre

$$f'(x) = x^2(3-2x)e^{-2x}\,, \quad f''(x) = 2x(3-6x+2x^2)e^{-2x}\,,$$

da cui segue che f è crescente in $[0, 3/2]$ e decrescente altrove, ed è concava in $\big[\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\big]$ e convessa altrove.

Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \leq x_0$ dove x_0 viene ottenuto risolvendo l'equazione

$$0 = f(x_0) - f'(x_0)(x_0+1) = x_0^2(2x_0^2-3)e^{-2x_0}\,,$$

e vale $x_0 = \sqrt{3/2}$.

2. Uguale al gruppo 2.

3. Uguale al gruppo 2.

4. Uguale al gruppo 2.

5. Analogo al gruppo 1. L'integrale è improprio in 3 e in $+\infty$, vale un numero positivo finito se $a < 1/3$, e vale $+\infty$ altrimenti.

Commenti

- Prima parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno dimostrato di avere le idee confuse riguardo al significato di affermazioni come $f(x) \ll g(x)$ per $x \to +\infty$ e a come verificarle.

- Prima parte, esercizio 8. Vari dei presenti hanno disegnato il grafico di $\sqrt{|x|}$ come se fosse quello di $|x|$, mentre in realtà sono molto diversi.

- Seconda parte, esercizio 1. Alcuni dei presenti hanno scritto che i punti P visibili da Q sono quelli di ascissa $x \leq x_0$ dove x_0 è il punto di massimo della funzione, mentre guardando bene il disegno si capisce che x_0 è sempre strettamente minore del punto di massimo. In particolare il punto di massimo non è visibile da alcun punto Q sull'asse delle x.

- Seconda parte, esercizio 3c). Diversi di quelli che hanno affrontato questo esercizio, hanno mostrato di non aver un'idea chiara di cosa significa l'espressione $f(t) = o(g(t))$ per $t \to +\infty$, arrivando per esempio a dire che vale $e^{\lambda t} = O(e^{2t})$ solo se $\lambda = 2$, mentre basta $\lambda \leq 2$ (altri hanno persino scritto che deve essere $\lambda \geq 2$).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. La funzione cresce per $x \le 1$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 3 è il punto di massimo assoluto e non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $d \ll b \ll c \ll a$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1 + \exp(-x \sin x)}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2}{x^2}$.

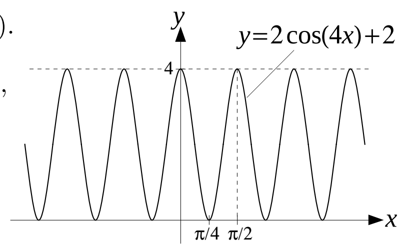
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (\cos t, -\sin t, 2)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $3\sqrt{5}$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 2x^2$ otteniamo
$$\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{4}\arctan y + c = \frac{1}{4}\arctan(2x^2) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{n^2 + 2^{-n}}{1+n^a} \sim \frac{1}{n^{a-2}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $a > 3$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (t^2 + 2)\exp(t^3)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $\pi/2$ e l'immagine è l'intervallo $[0, 4]$.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. La funzione cresce per $x \le 4$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 4 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(0) < 0 = f(+\infty)$, 0 è il punto di minimo assoluto.

2. $b \ll d \ll c \ll a$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1 - \exp(-x \sin x)}{\cos(x^2)} \sim \dfrac{x \sin x}{1} \sim x^2$.

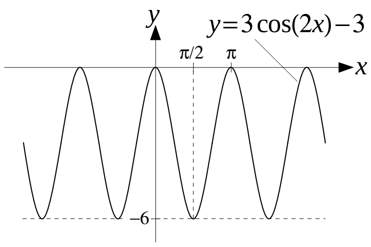
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (-\sin t, -1, -\cos t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{2}$, e quindi la distanza percorsa è $2\sqrt{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $x = 3y$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3}\arctan y + c = \frac{1}{3}\arctan\Big(\frac{x}{3}\Big) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{1+n^{2a}}{n^2+2^n} \sim \frac{n^{2a}}{2^n} \ll \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge per ogni $a > 0$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (t^2 + 2)\exp(t^4)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è π e l'immagine è l'intervallo $[-6, 0]$.



Prima parte, gruppo 3.

1. La funzione cresce per $x \leq 0$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 0 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(-1) > 0 = f(+\infty)$, non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $d \ll a \ll b \ll c$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{1 - \exp(-2x\cos x)}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2x\cos x}{\sin(x^2)} \sim \dfrac{2}{x}$.

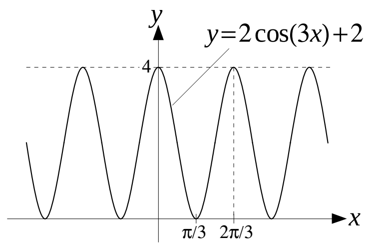
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (2, \cos t, -\sin t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $\sqrt{5}$.

5. Usando la decomposizione $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\big)$ otteniamo
$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int_3^4 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\Big|\log|x-2| - \log|x+2|\Big|_3^4 = \frac{\log(5/3)}{4}\,.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{n+2^{-n}}{1+n^{3a}} \sim \frac{1}{n^{3a-1}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $a > 2/3$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (t^2+2)\exp(2t^2)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $2\pi/3$ e l'immagine è l'intervallo $[0,4]$.



Prima parte, gruppo 4.

1. La funzione cresce per $x \leq 1$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 1 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(-2) < 0 = f(+\infty)$, -2 è il punto di minimo assoluto.

2. $b \ll a \ll c \ll d$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{\cos(x^2)}{1 - \exp(-x\sin x)} \sim \dfrac{1}{x\sin x} \sim \dfrac{1}{x^2}$.

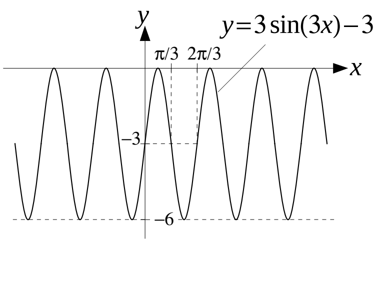
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (\cos t, \sin t, -1)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{2}$, e quindi la distanza percorsa è $\sqrt{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $y = 2x^2$ otteniamo
$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{1+4x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{4}\Big|\arctan y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{16}\,.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{1+n^a}{n^2+2^{-n}} \sim \frac{1}{n^{2-a}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $0 < a < 1$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (2t+1)\exp(t^3)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $2\pi/3$ e l'immagine è l'intervallo $[-6,0]$.



Prima parte, gruppo 5.

1. La funzione cresce per $x \leq 4$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 4 è il punto di massimo assoluto, e siccome $f(2) > 0 = f(+\infty)$, non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $d \ll a \ll c \ll b$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1 - \exp(-2x\cos x)} \sim \dfrac{\sin(x^2)}{2x\cos x} \sim \dfrac{x}{2}$.

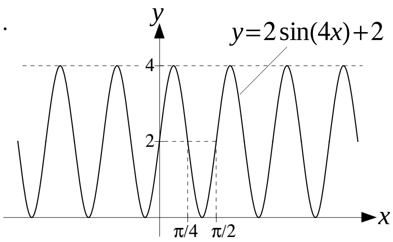
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (1, 2\cos t, -2\sin t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $2\sqrt{5}$.

5. Usando la decomposizione $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\big)$ otteniamo
$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{4}\big(\log|x-2| - \log|x+2|\big) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{n^2+2^n}{1+n^{2a}} \sim \frac{2^n}{n^{2a}} \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie non converge per alcun $a > 0$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (2t+1)\exp(t^4)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è $\pi/2$ e l'immagine è l'intervallo $[0, 4]$.



Prima parte, gruppo 6.

1. La funzione cresce per $x \leq 0$, decresce altrimenti, e tende a 0 per $x \to +\infty$. Quindi 1 è il punto di massimo assoluto e non c'è alcun punto di minimo assoluto.

2. $b \ll c \ll a \ll d$.

3. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{1 + \exp(-x\sin x)} \sim \dfrac{\sin(x^2)}{2} \sim \dfrac{x^2}{2}$.

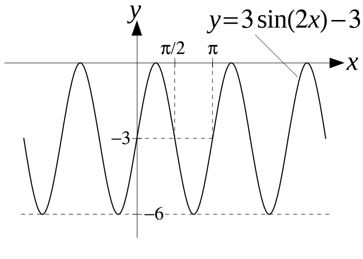
4. La velocità del punto è $\vec{v}(t) = (2\sin t, 1, 2\cos t)$, il modulo della velocità è costante e vale $\sqrt{5}$, e quindi la distanza percorsa è $\sqrt{5}$.

5. Usando il cambio di variabile $x = 3y$ otteniamo
$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3}\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{3}\Big|\arctan y\Big|_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9}\,.$$

6. Siccome il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{1+n^{3a}}{n^3+2^{-n}} \sim \frac{1}{n^{3-3a}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
per il criterio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $0 < a < 2/3$.

7. Equazione lineare del primo ordine; $x(t) = (2t+1)\exp(2t^2)$.

8. Il grafico di f è disegnato nella figura accanto; come si vede, il periodo è π e l'immagine è l'intervallo $[-6, 0]$.

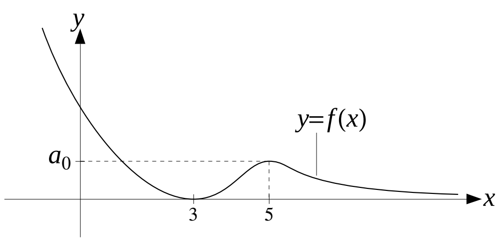


SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Indichiamo con r il raggio di base del cilindro e con h l'altezza. La superficie totale ed il volume del cilindro sono dati rispettivamente da
$$\text{area} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)\,, \quad \text{volume} = \pi r^2 h\,.$$
Pertanto, imponendo che la superficie totale sia uguale ad 1 otteniamo $1 = 2\pi r(r+h)$ da cui si ricava
$$h = \frac{1}{2\pi r} - r\,, \quad \text{volume} = \pi r^2 h = \frac{r}{2} - \pi r^3\,.$$
Osserviamo ora che i valori di r che corrispondono effettivamente ad un cilindro sono quelli per cui sia r che h sono numeri positivi, vale a dire
$$0 < r < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$
e che tra tutti questi vogliamo trovare quello che rende massimo il volume. Si tratta dunque di trovare il punto di massimo della funzione $f(r) := r/2 - \pi r^3$ relativamente all'intervallo $0 < r < 1/\sqrt{2\pi}$. Studiando il segno della derivata $f'(r) = 1/2 - 3\pi r^2$ otteniamo che $f(r)$ cresce per $r \le 1/\sqrt{6\pi}$ e decresce per $r \ge 1/\sqrt{6\pi}$, e quindi
   - $r = 1/\sqrt{6\pi}$ è il punto di massimo di f e $1/\sqrt{54\pi}$ è il valore massimo;
   - $r = 0$ e $r = 1/\sqrt{2\pi}$ sono i punti di minimo e 0 è il valore minimo.

   (Per la precisione dovremmo dire che f non ha punti di minimo nell'intervallo $0 < r < 1/\sqrt{2\pi}$, e che l'estremo inferiore dei valori di f è 0 e viene raggiunto quando $r \to 0$ oppure $r \to 1/\sqrt{2\pi}$.)
Dunque il cilindro di volume massimo è quello con
$$r = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\,, \quad h = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,,$$
mentre non esiste alcun cilindro di volume minimo.

2. a) Riscriviamo l'equazione (*) come
$$f(x) = a \quad \text{con} \quad f(x) := (x-3)^2 e^{-x}\,, \tag{1}$$
e tracciamo il grafico di f. Chiaramente $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è sempre positiva e si annulla solo per $x = 3$, tende a $+\infty$ per $x \to -\infty$ e tende a 0 per $x \to +\infty$.
Studiando inoltre il segno della derivata $f'(x) = (5-x)(x-3)e^{-x}$ otteniamo che f cresce nell'intervallo $[3,5]$ e decresce altrimenti; in particolare $x = 5$ è un punto di massimo relativo.
Usando queste informazioni otteniamo il disegno nella figura sotto (la scala non è rispettata).



Da questo disegno si vede che l'equazione (1), e quindi anche l'equazione (*), ha una soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(5) = 4e^{-5}$; due per $a = a_0$; tre per $0 < a < a_0$; una per $a = 0$; nessuna per $a < 0$.
b) Siccome $1 > a_0$, per quanto visto sopra $x(1)$ è l'unica soluzione l'equazione $f(x) = 1$ e deve essere minore di 3. Poiché inoltre $f(0) = 9$ è maggiore di 1 e $f(3) = 0$ è minore di 1, abbiamo che $x(1)$ è compreso tra 0 e 3. Procediamo ora con il metodo di bisezione:
   - $f(1{,}5) \simeq 0{,}5 \;\Rightarrow\; f(0) > 1 > f(1{,}5) \;\Rightarrow\; 0 < x(1) < 1{,}5$;
   - $f(1) \simeq 1{,}5 \;\Rightarrow\; f(1) > 1 > f(1{,}5) \;\Rightarrow\; 1 < x(1) < 1{,}5$;
   - $f(1{,}25) \simeq 0{,}9 \;\Rightarrow\; f(1) > 1 > f(1{,}25) \;\Rightarrow\; 1 < x(1) < 1{,}25$;
   - $f(1{,}15) \simeq 1{,}1 \;\Rightarrow\; f(1{,}15) > 1 > f(1{,}25) \;\Rightarrow\; 1{,}15 < x(1) < 1{,}25$.

In particolare abbiamo che $x(1) = 1{,}2 \pm 0{,}1$ (anzi $x(1) = 1{,}2 \pm 0{,}05$).

c) Dalla figura sopra risulta chiaro che $x(a) \to 3^-$ per $a \to 0^+$.
Pertanto $e^{x(a)}$ tende a e^3 e l'equazione (*) diventa $(x(a) - 3)^2 \sim e^3 a$, da cui segue che

$$x(a) - 3 \sim -\sqrt{e^3 a} \quad \text{per } a \to 0^+$$

(siccome $x(a) \to 3^-$, si ha che $x(a) - 3 < 0$).

3. a) Affinché $\log x$ esista, deve essere $x > 0$. Visto che l'esponente non è intero, affinché la potenza $(\log x)^{ax}$ sia ben definita la base $\log x$ deve essere positiva o nulla, inoltre la potenza deve essere diversa da 0 (altrimenti non è possibile fare la divisione) e quindi la base $\log x$ deve essere strettamente positiva, cioè $x > 1$.
Pertanto il dominio della funzione f è la semiretta $(1, +\infty)$.

b) Visto che la funzione $f(x)$ è continua e positiva sul dominio, l'integrale che ci interessa è improprio in 1 e $+\infty$, esiste sempre, e per studiarne il comportamento lo spezziamo come

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

Studiamo ora il comportamento del primo integrale a destra dell'uguale. Usando il cambio di variabile $x = t + 1$ otteniamo

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1+t)\,dt = \int_0^1 \frac{2 + 2t + t^2}{(\log(1+t))^{a(1+t)}} dt\,;$$

siccome per $t \to 0$ si ha

$$\frac{2 + 2t + t^2}{(\log(1+t))^{a(1+t)}} \sim \frac{2}{(\log(1+t))^a} \sim \frac{2}{t^a}\,,$$

$\int_1^2 f(x)\,dx$ è finito se e solo se $a < 1$ (per confronto asintotico con $\int_0^1 t^{-a} dt$).
Passiamo ora al secondo integrale a destra dell'uguale in (2). Osserviamo che per $x \to +\infty$ si ha $\log x \gg 2$ e quindi

$$f(x) = \frac{1 + x^2}{(\log x)^{ax}} \ll \frac{x^2}{2^{ax}} \ll \frac{1}{x^2}$$

(l'ultimo passaggio segue dal fatto che $x^4 \ll 2^{ax} = (2^a)^x$ per ogni $a > 0$).
Pertanto $\int_2^\infty f(x)\,dx$ è finito per ogni a, per confronto asintotico con $\int_1^\infty x^{-2} dx$.
In conclusione l'integrale improprio di partenza è finito se e solo se $a < 1$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Impostiamo il problema prendendo h e r come per il gruppo 1. In questo caso, partendo dal fatto che il volume del cilindro è 2 otteniamo

$$h = \frac{2}{\pi r^2}\,, \quad \text{area} = 2\pi r^2 + \frac{4}{r}\,,$$

e dunque si tratta di trovare il massimo ed il minimo della funzione $f(r) := 2\pi r^2 + 4/r$ sull'intervallo degli r ammissibili, vale a dire $0 < r < +\infty$.
Studiando il segno della derivata $f'(r) = 4\pi r - 4/r^2$ si vede che il punto di minimo di f è $r = 1/\sqrt[3]{\pi}$, e che l'estremo superiore dei valori di f è $+\infty$ e viene raggiunto per $r \to 0^+$ e $r \to +\infty$.
Pertanto il cilindro superfice minima è quello con $r = 1/\sqrt[3]{\pi}$ e $h = 2/\sqrt[3]{\pi}$, e non ci sono cilindri di superfice massima.

2. a) Analogo al gruppo 1. L'equazione (*) si riscrive come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-2)^2 e^{-x}$, ed il grafico di f assomiglia a quello del gruppo 1, con la differenza che f si annulla per $x = 2$ ed ha un punto di massimo locale per $x = 4$.
Pertanto l'equazione (*) ha una soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(4) = 4e^{-4}$; due per $a = a_0$; tre per $0 < a < a_0$; una per $a = 0$; nessuna per $a < 0$.

b) Analogo al gruppo 1: $x(1) = 0{,}6 \pm 0{,}1$.

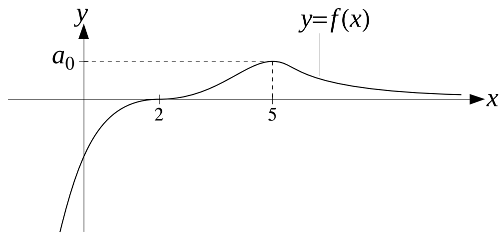
b) Analogo al gruppo 1: $x(a) \to 2^-$ per $a \to 0^+$, e $x(a) - 2 \sim -e\sqrt{a}$.

3. Analogo al gruppo 1. a) Il dominio di f è la semiretta $(1, +\infty)$.
   b) L'integrale improprio esiste per ogni a, ed è finito se e solo se $a < 1/2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1. Il cilindro di volume massimo è quello con $r = 1/\sqrt{3\pi}$ e $h = 2/\sqrt{3\pi}$, e non ci sono cilindri di volume minimo.

2. a) L'equazione (*) si riscrive come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-2)^3 e^{-x}$, e il grafico della funzione f è dato nella figura sotto



   In particolare l'equazione (*) non ha alcuna soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(5) = 8e^{-5}$; ha una soluzione per $a = a_0$; due per $0 < a < a_0$; una per $a \leq 0$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(-1) = 0{,}7 \pm 0{,}1$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(a) \to 2^+$ per $a \to 0^+$, e $x(a) - 2 \sim \sqrt[3]{e^2 a}$.

3. Analogo al gruppo 1. a) Il dominio di f è la semiretta $(1, +\infty)$.
   b) L'integrale improprio esiste per ogni a, ed è finito se e solo se $a < 1$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 2. Il cilindro di superfice minima è quello con $r = 1/\sqrt[3]{2\pi}$ e $h = \sqrt[3]{4/\pi}$, e non ci sono cilindri di superfice massima.

2. a) Analogo al gruppo 3. L'equazione (*) si riscrive come $f(x) = a$ con $f(x) := (x-3)^3 e^{-x}$, ed il grafico di f assomiglia a quello del gruppo 2, con la differenza che f si annulla per $x = 3$ ed ha un punto di massimo locale per $x = 6$.
   Pertanto l'equazione (*) non ha alcuna soluzione per $a > a_0$, dove $a_0 := f(6) = 27e^{-6}$; ha una soluzione per $a = a_0$; due per $0 < a < a_0$; una per $a \leq 0$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(-1) = 1{,}4 \pm 0{,}1$.

   b) Analogo al gruppo 1: $x(a) \to 3^+$ per $a \to 0^+$, e $x(a) - 3 \sim e\sqrt[3]{a}$.

3. Analogo al gruppo 1. a) Il dominio di f è la semiretta $(1, +\infty)$.
   b) L'integrale improprio esiste per ogni a, ed è finito se e solo se $a < 1/2$.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno sostanzialmente scritto che se $f(x)$ tende a $-\infty$ e $g(x)$ tende a 0, allora $f(x) \ll g(x)$, mentre in realtà vale $g(x) \ll f(x)$ perché $f(x)/g(x)$ tende a 0. Il punto che non sembra essere chiaro è che l'affermazione $g(x) \ll f(x)$ corrisponde ad un confronto dell'ordine di grandezza *dei valori assoluti* delle funzioni, ed in particolare è verificata quando g tende a 0 ed f tende ad un limite diverso da zero, non importa se positivo o negativo.

- Prima parte, esercizio 3. Diversi dei presenti hanno proposto come parte principale una funzione che non è una potenza di x, e questo è un errore grave.

- Prima parte, esercizio 4. Nessuno (o quasi) dei presenti ricordava che lo spazio percorso è uguale all'integrale del modulo della velocità.

- Prima parte, esercizio 7. Diversi dei presenti hanno preso come soluzione generale dell'equazione differenziale $x(t) = t^2 \exp(t^3)+c$ invece di $x(t) = (t^2+c) \exp(t^3)$, arrivando quindi a una risposta sbagliata (qui mi riferisco al gruppo 1, ma un analogo errore è stato frequente anche per gli altri gruppi).

- Prima parte, esercizio 8. Alcuni dei presenti invece di dire che il periodo della funzione proposta è, poniamo, π, hanno scritto che è $k\pi$. La risposta è stata presa per buona, ma l'impressione è che ci sia un po' di confusione su cosa si intenda per "periodo" di una funzione.

- Seconda parte, esercizio 1. La maggior parte dei presenti ha impostato il problema correttamente tranne che per un punto essenziale, vale a dire determinare l'insieme dei valori di r ammissibili, cioè quelli che corrispondono effettivamente a dei cilindri "reale", ed hanno quindi cercato il massimo del volume (gruppi 1 e 3) o il minimo della superfice (gruppi 2 e 4) al variare di r in $\mathbb{R}$. Inoltre, nel caso dei gruppi 2 e 4, il procedimento per la determinazione del minimo non teneva conto del fatto che la funzione non è definita per $r = 0$.

- Seconda parte, esercizio 2a). Alcuni dei presenti hanno affrontato la domanda confrontando i grafici di $(x-3)^2$ e ae^x (mi riferisco al gruppo 1 per semplicità), ma come visto a lezione questo approccio non sempre funziona, ed infatti in questo caso ha portato a soluzioni errate.

- Seconda parte, esercizio 3a). Per determinare il dominio della funzione f si può in alternativa scriverla come
$$f(x) = \frac{1+x^2}{\exp(ax\,\log(\log x))}$$
(mi riferisco per semplicità al gruppo 1), da cui segue che $f(x)$ è definita quando $\log(\log x)$ è definito, vale a dire per $x > 1$.

- Seconda parte, esercizio 3a). La maggior parte dei presenti ha scritto (erroneamente) che il dominio di f è dato dagli $x > 0$ con $x \neq 1$ (invece che $x > 1$).

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Poiché $f''(x) = (16x^2 - 4)\exp(2 - 2x^2)$, la funzione è concava in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

2. a) $\big(\log\log(x^2)\big)' = \big(\log 2 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$; b) $\left[\dfrac{\exp(4x-2)}{(\exp(x-1))^2}\right]' = \big(e^{2x}\big)' = 2e^{2x}$.

3. a) $\log 2$; b) $+\infty$; c) $1/6$.

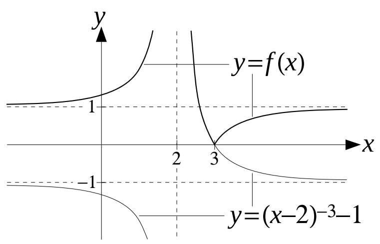
4. $f(x) = x^2 - 2x^6 + \frac{2}{3}x^{10} + O(x^{14})$.

5. Integrale improprio in $\pi/2$: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^{2a}}$, quindi $a < 1/2$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = 2e^{-t} + 2t - 2$.

8.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Poiché $f''(x) = (x^2 - 1)\exp(1 - x^2/2)$, la funzione è concava in $[-1, 1]$.

2. a) $\big(\log\log(x^3)\big)' = \big(\log 3 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$; b) $\left[\dfrac{\exp(2x-3)}{(\exp(x-1))^3}\right]' = \big(e^{-x}\big)' = -e^{-x}$.

3. a) $+\infty$; b) 0; c) 2.

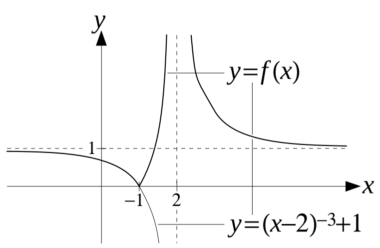
4. $f(x) = -x^3 - \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^9 + O(x^{12})$.

5. Integrale improprio in $+\infty$: ci si riconduce a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{2a}}$, quindi $a > 1/2$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(x/3)^n = \frac{1}{1-x/3} = \frac{3}{3-x}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + t + \frac{1}{2}$.

8.



Prima parte, gruppo 3.

1. Poiché $f''(x) = (4x^2 - 2)\exp(2 - x^2)$, la funzione è convessa in $\big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\big]$ e $\big[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\big)$.

2. a) $\big(\log\log(x^4)\big)' = \big(\log 4 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$; b) $\left[\dfrac{\exp(2x+1)}{(\exp(x-2))^2}\right]' = \big(e^5\big)' = 0$.

3. a) $-\infty$; b) 0; c) 8.

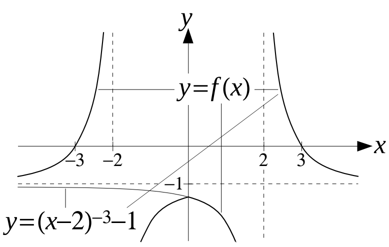
4. $f(x) = -2x^3 + \frac{4}{3}x^7 - \frac{4}{15}x^{11} + O(x^{14})$.

5. Integrale improprio in 1: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^a}$, quindi $a < 1$.

6. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x^3)^n}{n!} = \exp(x^3)$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = -\frac{3}{2}e^{-2t} - t + \frac{1}{2}$.

8.



Prima parte, gruppo 4.

1. Poiché $f''(x) = (x^2 - 1)\exp(2 - x^2/2)$, la funzione è convessa in $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$.

2. a) $\left[\dfrac{(\exp(x-2))^2}{\exp(2x+1)}\right]' = \big(e^{-5}\big)' = 0$; b) $\big(\log\log(x^4)\big)' = \big(\log 4 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$.

3. a) 2; b) 0; c) 0.

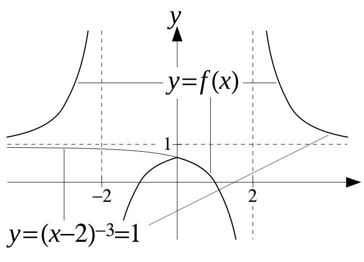
4. $f(x) = x^2 + 2x^6 + 4x^{10} + O(x^{14})$.

5. Integrale improprio in π: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^{a+2}}$, quindi $a < -1$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty 3^n x^n = \sum_{n=0}^\infty (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = -2e^{-t} - 2t + 2$.

8.



Prima parte, gruppo 5.

1. Poiché $f''(x) = (16x^2 - 4)\exp(1 - 2x^2)$, la funzione è convessa in $\big(-\infty, -\frac{1}{2}\big]$ e $\big[\frac{1}{2}, +\infty\big)$.

2. a) $\left[\dfrac{(\exp(x-1))^2}{\exp(4x-2)}\right]' = \big(e^{-2x}\big)' = -2e^{-2x}$; b) $\big(\log\log(x^2)\big)' = \big(\log 2 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$.

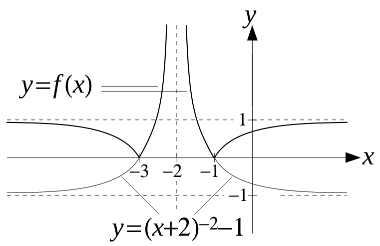
3. a) $1/2$; b) $\log 3$; c) $+\infty$.

4. $f(x) = 1 - x^3 - \frac{3}{2}x^6 + O(x^9)$.

5. Integrale improprio in 1: ci si riconduce (per cambio di variabile) a $\displaystyle\int_0^* \frac{dt}{t^a}$, quindi $a < 1$.

6. Ci si riconduce alla serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (4/x)^n = \frac{1}{1-4/x} = \frac{x}{x-4}$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}$.

8. 

Prima parte, gruppo 6.

1. Poiché $f''(x) = (4x^2 - 2)\exp(1 - x^2)$, la funzione è concava in $\big[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\big]$.

2. a) $\left[\dfrac{(\exp(x-1))^3}{\exp(2x-3)}\right]' = \big(e^{x}\big)' = e^{x}$; b) $\big(\log\log(x^3)\big)' = \big(\log 3 + \log\log x\big)' = \dfrac{1}{x\log x}$.

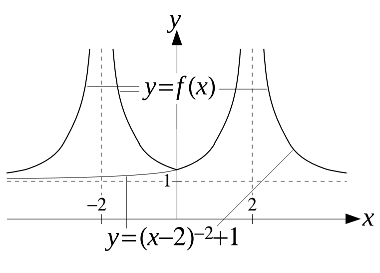
3. a) 6; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

4. $f(x) = x^3 + 3x^6 + 9x^9 + O(x^{12})$.

5. Integrale improprio in $+\infty$: ci si riconduce a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{a+2}}$, quindi $a > -1$.

6. Ci si riconduce alla serie di Taylor dell'esponenziale: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \exp(x^2)$.

7. Equazione lineare del primo ordine a coefficienti costanti; la soluzione è $x(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} + t - \frac{1}{2}$.

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

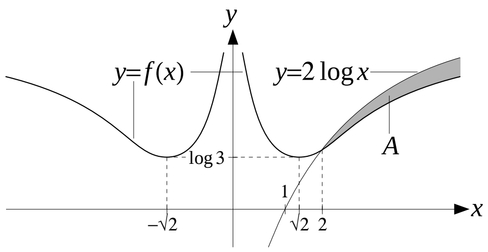
1. a) L'equazione caratteristica associata alla (*) è $\lambda^2 - 2a\lambda + (a-2)^2 = 0$ ed ha come soluzioni
$$\lambda_{1,2} := a \pm 2\sqrt{a-1}\,,$$
e quindi per $a > 1$ (cioè $\Delta > 0$) la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\mathrm{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
mentre per $a < 1$ (cioè $\Delta < 0$) è
$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \tag{2}$$
dove $\omega := 2\sqrt{|a-1|}$.
Cerchiamo ora una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = \alpha e^t$; in questo caso l'equazione (*) si riduce all'identità $\alpha(a^2 - 6a + 5)e^t = e^t$, che è verificata per $\alpha = (a^2 - 6a + 5)^{-1}$, ovvero
$$\tilde{x}(t) = \frac{e^t}{a^2 - 6a + 5} \tag{3}$$
(si osservi che il trinomio $a^2 - 6a + 5$ si annulla solo per $a = 1$ e $a = 5$, che sono proprio i casi esclusi dalla discussione).
Per concludere, la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = x_{\mathrm{om}}(t) + \tilde{x}(t)\,.$$
dove x_{om} è data in (1) e (2), mentre $\tilde{x}$ è data in (3).
b) Per $a = 1$ l'equazione caratteristica della (*) diventa $\lambda^2 - 2\lambda + \lambda = 0$ ed ha quindi come unica soluzione $\lambda = 1$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\mathrm{om}}(t) = e^t(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4}$$
Siccome il coefficiente 1 nell'esponente del termine noto e^t della (*) coincide con l'unica soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = \alpha t^2 e^t$; in questo caso la (*) si riduce all'identità $2\alpha e^t = e^t$, che è verificata per $\alpha = 1/2$, e dunque
$$\tilde{x}(t) = \frac{t^2 e^t}{2}\,. \tag{5}$$
In conclusione la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = x_{\mathrm{om}}(t) + \tilde{x}(t) = e^t\Big(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
c) Siccome la soluzione particolare $\tilde{x}$ data sopra soddisfa $\tilde{x}(t) \ll e^{2t}$ per $t \to +\infty$ qualunque sia a (vedere (3) e (5)), possiamo riformulare la domanda chiedendo per quali a esiste una soluzione x dell'equazione *omogenea* associata alla (*) che soddisfa $x(t) \sim e^{2t}$ per $t \to +\infty$.
Le formule (2) e (4) mostrano chiaramente che per $a \leq 1$ non esiste alcuna soluzione dell'equazione omogenea che soddisfa quanto richiesto. Invece per $a > 1$ la formula (1) mostra che tale soluzione esiste se $\lambda_1 = 2$ (basta prendere $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$) oppure se $\lambda_2 = 2$ (basta prendere $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$).
Si tratta dunque di trovare gli a per cui 2 risolve l'equazione caratteristica: sostituendo 2 al posto di λ nell'equazione caratteristica otteniamo $4 - 4a + (a-2)^2 = 0$, da cui si ricava infine
$$a = 4 \pm \sqrt{8} = 2(2 \pm \sqrt{2})\,.$$

2. a) Osserviamo innanzitutto che f è una funzione pari, e cerchiamo quindi di determinarne l'insieme di definizione. Scrivendo l'argomento del logaritmo nella definizione di f come
$$x^2 - 1 + \frac{4}{x^2} = \frac{x^4 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{t^2 - t + 4}{t} \quad \text{con } t = x^2,$$
ed osservando che il discriminante del trinomio $t^2 - t + 4$ è negativo, otteniamo che l'argomento del logaritmo è sempre positivo quando è definito, cioè per ogni $x \neq 0$. Pertanto l'insieme di definizione di f è l'insieme degli $x \neq 0$.
Si vede inoltre facilmente che $f(x)$ tende a $+\infty$ sia quando $x \to 0$ che quando $x \to \pm\infty$, e per

la precisione $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $\log(x^2) = 2\log|x|$ per $x \to +\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2x - 8/x^3}{x^2 - 1 + 4/x^2} = \frac{2(x^4 - 4)}{x(x^4 - x^2 + 4)}$$

otteniamo che f cresce negli intervalli $[-\sqrt{2}, 0]$ e $[\sqrt{2}, +\infty)$ e decresce altrimenti, e in particolare $\pm\sqrt{2}$ sono i punti di minimo assoluto di f, ed il valore minimo è $f(\pm\sqrt{2}) = \log 3$. Sulla base di quanto detto tracciamo il grafico di f come riportato nella figura sotto.



b) Per disegnare l'insieme A dobbiamo capire per quali x si ha che $2\log x \geq f(x)$. Siccome $2\log x = \log(x^2)$, questa disequazione equivale a $x^2 \geq x^2 - 1 + 4/x^2$, e vale quindi per $x \geq 2$ (ci limitiamo a considerare le soluzioni x positive perché $\log x$ è definito solo per x positivo). A partire da questo otteniamo il disegno di A nella figura sopra.

c) Per quanto detto al punto precedente

$$\begin{aligned}\text{area}(A) &= \int_2^{+\infty} 2\log x - f(x)\,dx \\ &= \int_2^{+\infty} \log(x^2) - \log\Big(x^2 - 1 + \frac{4}{x^2}\Big)\,dx \\ &= \int_2^{+\infty} -\log\Big(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4}\Big)\,dx \qquad (5)\end{aligned}$$

e siccome

$$\log\Big(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4}\Big) \sim -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^4} \sim -\frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

l'integrale improprio in (5) è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty x^{-2}dx$, e di conseguenza pure l'area di A è finita.

3. L'integrale che appare nella definizione di $f(x)$ è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$, per cui l'insieme di definizione di f è tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo inoltre che per ogni $x \in \mathbb{R}$ la funzione integranda è positiva (nell'intervallo di integrazione) e l'estremo di integrazione inferiore 0 è sempre minore o uguale all'estremo di integrazione superiore x^2, e quindi la funzione $f(x)$ è positiva per ogni x (e per la precisione si annulla solo per $x = 0$).
La funzione f è chiaramente pari, ed il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio

$$L := \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^6}\,dt\,.$$

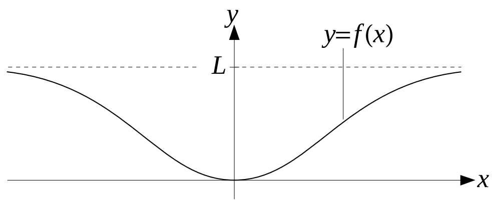
Siccome

$$\frac{\log(1+t^2)}{1+t^6} \sim \frac{2\log t}{t^6} \ll \frac{1}{t^5} \quad \text{per } t \to +\infty,$$

il valore di questo integrale improprio è finito per confronto asintotico con $\int_1^\infty t^{-5}\,dt$.
Infine la derivata di f è data dalla formula

$$f'(x) = \frac{\log(1+(x^2)^2)}{1+(x^2)^6} 2x = \frac{\log(1+x^4)}{1+x^{12}} 2x\,,$$

da cui segue che f cresce per $x \geq 0$ e decresce altrimenti.
Sulla base di quanto detto tracciamo il grafico di f come riportato nella figura sotto.



b) Usando il fatto che

$$\frac{\log(1+t^2)}{1+t^6} \sim t^2 \quad \text{per } t \to 0,$$

otteniamo che

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^6}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^2\, dt = \frac{x^6}{3} \quad \text{per } x \to 0.$$

Seconda parte, gruppo 2.

1. Analogo al gruppo 1.

   a) La soluzione generale dell'equazione si scrive come

   $$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)$$

   dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare. Per $a > 2$ la soluzione dell'equazione omogenea è

   $$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   con $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{8(a-2)}$, mentre per $a < 2$ è

   $$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   dove $\omega := \sqrt{8|a-2|}$. Una soluzione particolare della (*) è invece

   $$\tilde{x}(t) = \frac{e^{2t}}{a^2 - 12a + 20}\,.$$

   b) La soluzione generale è

   $$z(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t) = e^{2t}\Big(c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   c) $a = 8 \pm \sqrt{32} = 4(2 \pm \sqrt{2})$.

2. Molto simile al gruppo 1, per cui riporto solo le principali differenze.

   a) I punti di minimo (assoluto) di f sono $x = \pm\sqrt{3}$ e il valore minimo è $\log 5$.

   b) La soluzione della disequazione $2 \log x \geq f(x)$ è $x \geq 3$.

   c) L'area di A è data dall'integrale improprio

   $$\int_3^{+\infty} 2 \log x - f(x)\, dx$$

   ed è finita.

3. Molto simile al gruppo 1, e in particolare non ci sono differenze per quanto riguarda il comportamento qualitativo del grafico di f. Riporto sotto le principali differenze.

   a) Il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio

   $$L = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^8}\, dt$$

   ed è finito; la derivata di f è data da

   $$f'(x) = \frac{\log(1+x^4}{1+x^{16}}\, 2x\,.$$

b) Per $x \to 0$ si ha che

$$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^2)}{1+t^8}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^2\, dt \sim \frac{x^6}{3}\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 3.

1. Analogo al gruppo 1.

   a) La soluzione generale dell'equazione si scrive come

   $$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)$$

   dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare. Per $a > 1$ la soluzione dell'equazione omogenea è

   $$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   con $\lambda_{1,2} = a \pm 2\sqrt{a-1}$, mentre per $a < 1$ è

   $$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   dove $\omega := 2\sqrt{|a-1|}$. Una soluzione particolare della (*) è invece

   $$\tilde{x}(t) = -\frac{e^t}{a^2 - 6a + 5}\,.$$

   b) La soluzione generale è

   $$z(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t) = e^t\Big(c_1 + c_2 t - \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

   c) $a = 5 \pm \sqrt{12} = 5 \pm 2\sqrt{3}$.

2. Molto simile al gruppo 1, per cui riporto solo le principali differenze.

   a) I punti di minimo (assoluto) di f sono $x = \pm 2$ e il valore minimo è $\log 7$.

   b) La soluzione della disequazione $2\log x \geq f(x)$ è $x \geq 4$.

   c) L'area di A è data dall'integrale improprio

   $$\int_4^{+\infty} 2\log x - f(x)\, dx$$

   ed è finita.

3. Molto simile al gruppo 1, e in particolare non ci sono differenze per quanto riguarda il comportamento qualitativo del grafico di f. Riporto sotto le principali differenze.

   a) Il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio

   $$L = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^8}\, dt$$

   ed è finito; la derivata di f è data da

   $$f'(x) = \frac{\log(1+x^6)}{1+x^{16}}\, 2x\,.$$

   b) Per $x \to 0$ si ha che

   $$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^8}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^3\, dt \sim \frac{x^8}{4}\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Analogo al gruppo 1.
   a) La soluzione generale dell'equazione si scrive come
   $$x(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t)$$
   dove $x_{\rm om}$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) e $\tilde{x}$ è una soluzione particolare. Per $a > 2$ la soluzione dell'equazione omogenea è
   $$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
   con $\lambda_{1,2} = a \pm \sqrt{8(a-2)}$, mentre per $a < 2$ è
   $$x_{\rm om}(t) = e^{at}\big(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)\big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
   dove $\omega := \sqrt{8|a-2|}$. Una soluzione particolare della (*) è invece
   $$\tilde{x}(t) = -\frac{e^{2t}}{a^2 - 12a + 20}\,.$$
   b) La soluzione generale è
   $$z(t) = x_{\rm om}(t) + \tilde{x}(t) = e^{2t}\Big(c_1 + c_2 t - \frac{t^2}{2}\Big) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$
   c) $a = 7 \pm \sqrt{6} = 7 \pm 2\sqrt{6}$.

2. Molto simile al gruppo 1, per cui riporto solo le principali differenze.
   a) I punti di minimo (assoluto) di f sono $x = \pm\sqrt{5}$ e il valore minimo è $\log 9$.
   b) La soluzione della disequazione $2\log x \geq f(x)$ è $x \geq 5$.
   c) L'area di A è data dall'integrale improprio
   $$\int_5^{+\infty} 2\log x - f(x)\, dx$$
   ed è finita.

3. Molto simile al gruppo 1, e in particolare non ci sono differenze per quanto riguarda il comportamento qualitativo del grafico di f. Riporto sotto le principali differenze.
   a) Il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è dato dall'integrale improprio
   $$L = \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^6}\, dt$$
   ed è finito; la derivata di f è data da
   $$f'(x) = \frac{\log(1+x^6)}{1+x^{12}}\, 2x\,.$$
   b) Per $x \to 0$ si ha che
   $$f(x) := \int_0^{x^2} \frac{\log(1+t^3)}{1+t^6}\, dt \sim \int_0^{x^2} t^3\, dt \sim \frac{x^8}{4}\,.$$

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. Molti dei presenti hanno discusso la convergenza della serie, mentre l'esercizio chiedeva di trovarne il valore.

- Seconda parte, esercizio 1. Al momento di dare la soluzione dell'equazione omogenea nel caso in cui l'equazione caratteristica ha soluzioni complesse, molti dei presenti hanno scritto
  $$x_{\rm om}(t) = e^{\rho t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))$$
  senza però specificare i valori di ρ e ω.

- Seconda parte, esercizio 1. Nel rispondere alla domanda c) molti dei presenti hanno sostanzialmente detto che quando λ_1 o λ_2 sono uguali a 2 (mi riferisco al gruppo 1) allora *tutte* le soluzioni x dell'equazione soddisfano $x(t) \sim e^{2t}$, ma in realtà solo alcune soluzioni hanno questa proprietà (e si sarebbe dovuto dire quali). In effetti nessuno dei presenti ha spiegato questo punto con la necessaria chiarezza.

- Seconda parte, esercizio 2a). Molti dei presenti hanno scritto che la funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \neq 0$ senza spiegare perché; in diversi hanno invece scritto che $f(x)$ è definita solo per $x > 0$, sempre senza dare alcuna spiegazione.

- Seconda parte, esercizio 2b). Molti dei presenti hanno disegnato il grafico di $f(x)$ che interseca quello di $2\log x$ due volte, ottenendo che l'insieme A è limitato, ma senza fare alcun calcolo per trovare queste intersezioni. Alcuni hanno riportato questo disegno sbagliato pur avendo fatto i calcoli ed avendo trovato una sola intersezione!

- Seconda parte, esercizio 2c). Pochi dei presenti hanno impostato correttamente l'integrale improprio che dà l'area di A, e nessuno (!) ha dimostrato che è finito.

- Seconda parte, esercizio 3a). Nella soluzione data sopra abbiamo usato il seguente enunciato, visto rapidamente a lezione: data una funzione f della forma
$$f(x) := \int_a^{h(x)} g(t)\, dt$$
allora la derivata di f è data dalla formula
$$f'(x) = g(h(x))\, h'(x)\,.$$
Per dimostrarla basta scrivere f come $f(x) = G(h(x))$ dove
$$G(y) := \int_a^y g(t)\, dt$$
ed usare la formula per la derivata della funzione composta e il fatto che G è una primitiva di g, e quindi $G' = g$.

- Seconda parte, esercizio 3b). Nella soluzione data sopra abbiamo usato (senza dichiararlo esplicitamente) il seguente enunciato: date due funzioni f e $\tilde f$ della forma
$$f(t) := \int_0^{h(x)} g(t)\, dt \quad \text{e} \quad \tilde f(x) := \int_0^{h(x)} \tilde g(t)\, dt\,,$$
se abbiamo che $g(t) \sim \tilde g(t)$ per $t \to 0$ e che $h(x) \to 0$ per $x \to 0$, allora
$$f(t) \sim \tilde f(x) \quad \text{per } x \to 0.$$
Per dimostrarlo possiamo usare il teorema di de L'Hôpital:
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\tilde f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{\tilde f'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{g(h(x))\, h'(x)}{\tilde g(h(x))\, h'(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{\tilde g(t)} = 1\,.$$

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Deve essere $-1 \le 2x \le 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\arcsin(2x) > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $0 < x \le 1/2$.

2. Deve essere $f''(x) = 4e^{2x} - 2a \ge 0$ per ogni $x \ge 0$, vale a dire $a \le 2$.

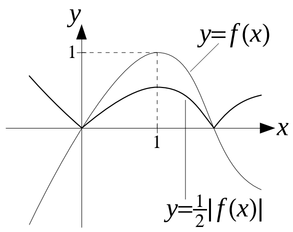
3. $f(x) \sim -\dfrac{9e}{2}x^4$.

4. Usando il cambio di variabile $y = 1 - x^2$ si ottiene
$$\int_0^{+\infty} e^{1-x^2}\, x\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} e^y dy = \frac{e}{2}\,.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{2 + x^4}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è
$$x(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) + 2 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 2 = 0$, e le soluzioni cercate sono
$$x(t) = e^{-t}(c_2 t - 2) + 2 \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:
$$R = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^n+1}{3^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^n}{3^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3} = +\infty\,.$$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Deve essere $-1 \le x \le 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\pi + 4\arcsin x > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $-1/\sqrt{2} < x \le 1$.

2. Deve essere $f''(x) = e^{-x} - 2a \ge 0$ per ogni $x \le 0$, vale a dire $a \le 1/2$.

3. $f(x) \sim -\dfrac{1}{x^2}$.

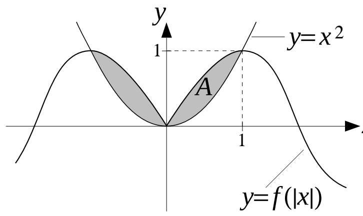
4. Usando il cambio di variabile $y = 2 - x^2$ si ottiene
$$\int e^{2-x^2}\, x\, dx = -\frac{1}{2}\int e^y dy = -\frac{e^y}{2} + c = -\frac{e^{2-x^2}}{2} + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{2 + x^6}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è
$$x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + 2e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 2 = 0$, e le soluzioni cercate sono
$$x(t) = e^{2t}(c_2 t - 2) + 2e^t \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^n+1}{n^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^n}{n^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0\,.$$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 3.

1. Deve essere $-1 \leq x \leq 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\pi - 4\arcsin x > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $-1 \leq x < 1/\sqrt{2}$.

2. Deve essere $f''(x) = e^{-x} + 2a \geq 0$ per ogni $x \leq 0$, vale a dire $a \geq -1/2$.

3. $f(x) \sim -x^4$.

4. Integrando per parti si ottiene

$$\int e^{1-2x}\, x\, dx = -\frac{e^{1-2x}}{2}x + \int \frac{e^{1-2x}}{2} dx = -\frac{e^{1-2x}}{2}x - \frac{e^{1-2x}}{4} = -\frac{e^{1-2x}}{4}(2x+1)\,.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{1+x^4}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è

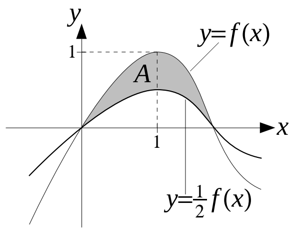
$$x(t) = e^{-t}(c_1 + c_2 t) + e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 1 = 0$, e le soluzioni cercate sono

$$x(t) = e^{-t}(c_2 t - 1) + e^t \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n+1}{3^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n}{3^n}\right)^{1/n} = \frac{2}{3}\,.$$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 4.

1. Deve essere $-1 \leq 3x \leq 1$ affinché si definito l'arcoseno, e $\arcsin(3x) > 0$ affinché sia definito il logaritmo. L'insieme di definizione di f è quindi dato dagli x tali che $0 < x \leq 1/3$.

2. Deve essere $f''(x) = 9e^{3x} + 2a \geq 0$ per ogni $x \geq 0$, vale a dire $a \geq -9/2$.

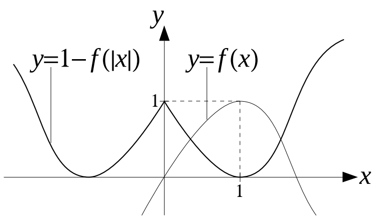
3. $f(x) \sim -\dfrac{2e}{9}x$.

4. Integrando per parti si ottiene
$$\int_0^{+\infty} e^{1-2x}\, x\, dx = -\left|\frac{e^{1-2x}}{2}x\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{1-2x}}{2} dx = -\left|\frac{e^{1-2x}}{4}\right|_0^{+\infty} = \frac{e}{4}\,.$$

5. $f'(x) := \dfrac{1}{1+x^6}$.

6. Equazione differenziale del secondo ordine lineare a coefficienti costanti. La soluzione generale è
$$x(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t) + 1 \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
La condizione $x(0) = 0$ si traduce quindi nell'equazione $c_1 + 1 = 0$, e le soluzioni cercate sono
$$x(t) = e^{2t}(c_2 t - 1) + 1 \quad \text{con } c_2 \in \mathbb{R},$$

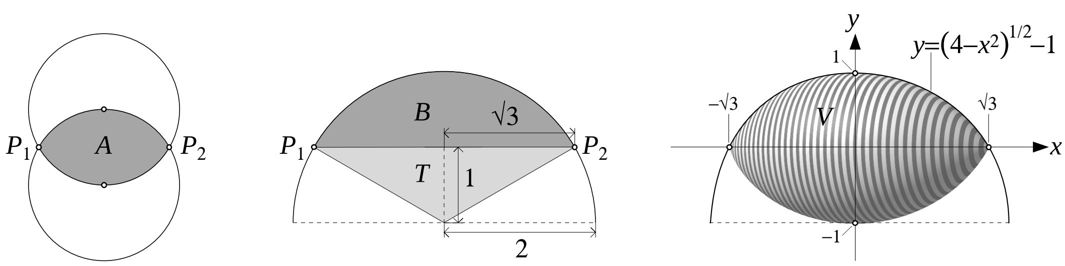
7. Calcoliamo il raggio di convergenza R usando la formula della radice:
$$R = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^n+1}{2^n+1}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3^n}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{3}{2}\,.$$

8. 

Seconda parte, gruppo 1.

1. a) Usando lo sviluppo di Taylor $e^t = 1+ \sim t + O(t)$ con $t := 8x^2$ otteniamo
$$f(x) := \sqrt[3]{\exp(8x^2) - 1} = \sqrt[3]{8x^2 + O(x^4)} \sim \sqrt[3]{8x^2} = 2x^{2/3}\,.$$
b) Utilizzando quanto fatto al punto a) e lo sviluppo di Taylor $e^t = 1 + t + t^2/2 + O(t^3)$ con $t := 8x^2$ otteniamo
$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \sqrt[3]{\exp(8x^2) - 1} - 2x^{2/3} \\ &= \sqrt[3]{8x^2 + 32x^4 + O(x^6)} - 2x^{2/3} \\ &= 2x^{2/3}\left[\sqrt[3]{1 + 4x^2 + O(x^4)} - 1\right] \\ &= 2x^{2/3}\left[1 + \frac{4}{3}x^2 + O(x^4) - 1\right] \sim \frac{8}{3}x^{8/3} \end{aligned}$$
(nel penultimo passaggio abbiamo usato lo sviluppo di Taylor $\sqrt[3]{1+t} = 1 + t/3 + O(t^2)$ con $t := 4x^2 + O(x^4)$).

2. a) L'area di A è pari a due volte l'area del segmento circolare B nel disegno sotto, al centro, che è data dall'area del settore circolare $S := B \cup T$ meno l'area del triangolo T, e siccome questo settore circolare è un terzo della circonferenza, abbiamo che
$$\text{area}(A) = 2\,\text{area}(B) = 2\big[\text{area}(S) - \text{area}(T)\big] = 2\left[\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right] = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\,.$$



b) Possiamo supporre (come nel disegno sopra, a destra) che la retta passante per i punti P_1 e P_2 sia l'asse delle x, e che questi punti siano quelli di coordinate $(\pm\sqrt{3}, 0)$. Osserviamo che l'arco che si trova sopra l'asse delle x corrisponde al grafico della funzione

$$f(x) := \sqrt{4 - x^2} - 1$$

(questa formula la si ottiene a partire dall'equazione della circonferenza corrispondente, vale a dire $x^2 + (y-1)^2 = 4$), e quindi il volume del solido di rotazione V è dato da

$$\begin{aligned}
\text{volume}(V) &= \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \big(\sqrt{4-x^2} - 1\big)^2 dx \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} 5 - x^2 - 2\sqrt{4-x^2}\, dx \\
&= 2\pi \Big| 5x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} - 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx \\
&= 8\pi\sqrt{3} - 8\pi \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 - (x/2)^2}\, dx \,,
\end{aligned}$$

e per calcolare l'integrale che rimane si può usare il cambio di variabile $x/2 = \sin t$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1-(x/2)^2}\, dx &= \int_0^{\pi/3} 2\cos^2 t\, dt \\
&= \int_0^{\pi/3} 1 + \cos(2t)\, dt \\
&= \Big| t + \frac{\sin(2t)}{2} \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \,.
\end{aligned}$$

Mettendo insieme i calcoli fatti otteniamo infine

$$\text{volume}(V) = 8\pi\sqrt{3} - 8\pi\left[\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = 8\pi\sqrt{3} - \frac{8\pi^2}{3} \,.$$

3. Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Seguendo la solita procedura, riscriviamo l'equazione come

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int 2t^3\, dt \,,$$

ed utilizzando il fatto che

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}\big(\log|x-1| - \log|x+1|\big) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$

otteniamo

$$\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{t^4}{2} + c\,; \qquad \frac{x-1}{x+1} = \pm\exp(t^4 + 2c)\,; \qquad \frac{x-1}{x+1} = c\,\exp(t^4)$$

con c numero reale arbitrario (nell'ultimo passaggio abbiamo scritto c al posto di $\pm e^{2c}$), e infine

$$x(t) = \frac{2}{1 - c\,\exp(t^4)} - 1 = \frac{1 + c\,\exp(t^4)}{1 - c\,\exp(t^4)} \,. \tag{1}$$

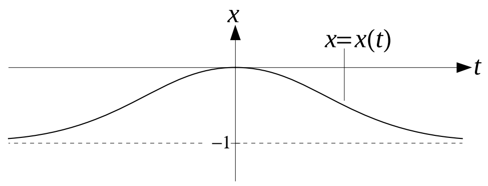
a) Imponendo la condizione $x(0) = 0$ nella (1) otteniamo

$$x(t) = \frac{2}{1 + \exp(t^4)} - 1 \,.$$

Si verifica facilmente che questa funzione è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, si annulla per $t = 0$ (come richiesto) ed altrimenti è sempre negativa, e tende a -1 quando $t \to \pm\infty$. Studiando inoltre il segno della derivata prima

$$\dot{x}(t) = -\frac{8t^3\,\exp(t^4)}{(1 + \exp(t^4))^2}$$

si ottiene che x cresce per $t \leq 0$ e decresce per $t \geq 0$. Mettendo insieme queste informazioni otteniamo il disegno riportato nella figura sotto.



b) La soluzione cercata non rientra tra quelle date dalla formula (1); è infatti chiaro che la funzione a destra dell'uguale non assume mai il valore -1. In effetti il fattore x^2-1 nell'equazione di partenza (*) si annulla per $x=-1$, e pertanto la soluzione cercata è la funzione costante $x(t)=-1$.

c) Per $a=-1$ la soluzione è stata trovata al punto b) ed è effettivamente definita per ogni $t\in\mathbb{R}$. Per $a\neq -1$ la soluzione si trova a partire dalla formula (1): imponendo $x(0)=a$ si ottiene infatti un'equazione che permette di trovare la costante c in funzione del parametro a, e per la precisione si ottiene

$$c=\frac{a-1}{a+1}\,. \tag{2}$$

Osserviamo ora che la funzione in (1) è ben definita per ogni t se il denominatore $1-c\,\exp(t^4)$ non si annulla per alcun t; ma la soluzione dell'equazione $1-c\,\exp(t^4)=0$ è

$$t=\pm\sqrt[4]{-\log c}\,,$$

ed in particolare esiste solo per $0<c\le 1$. Dunque la soluzione in (1) è definita per ogni t se $c\le 0$ oppure se $c>1$. Traducendo queste condizioni in termini di a tramite la (2) otteniamo infine (fatti i dovuti calcoli) che la soluzione di (*) che soddisfa $x(0)=a$ è definita per ogni t se (e solo se) $a\le 1$.

Seconda parte, gruppo 2.

1. Si procede come per il gruppo 1. a) $f(x)\sim\sqrt{2}\,x$. b) $f(x)-g(x)\sim -\dfrac{\sqrt{2}}{6}x^3$.

2. Analogo al gruppo 1: area$(A)=\pi-2$, volume$(V)=\dfrac{10\pi}{3}-\pi^2$.

3. Analogo al gruppo 1. La soluzione generale dell'equazione è

$$x(t)=\frac{4}{1-c\,\exp(2t^6)}-2=2\frac{1+c\,\exp(2t^6)}{1-c\,\exp(2t^6)}\quad\text{con } c\in\mathbb{R}.$$

a) Le soluzione cercata è

$$x(t)=\frac{4}{1+\exp(2t^6)}-2$$

ed il grafico è molto simile a quello del gruppo 1 (la differenza principale è che il limite per $t\to\pm\infty$ è -2 invece di -1).

b) La soluzione cercata è la funzione costante $x(t)=-2$.

c) I valori di a cercati sono $a\le 2$.

Seconda parte, gruppo 3.

1. Si procede come per il gruppo 1. a) $f(x)\sim 2x^2$. b) $f(x)-g(x)\sim 2x^6$.

2. Analogo al gruppo 1: area$(A)=4\pi-8$, volume$(V)=\dfrac{80\pi}{3}-8\pi^2$.

3. Analogo al gruppo 1. La soluzione generale dell'equazione è

$$x(t)=\frac{4}{1-c\,\exp(2t^4)}-2=2\frac{1+c\,\exp(2t^4)}{1-c\,\exp(2t^4)}\quad\text{con } c\in\mathbb{R}.$$

a) Le soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{4}{1+\exp(2t^4)} - 2$$

ed il grafico è molto simile a quello del gruppo 1 (la differenza principale è che il limite per $t \to \pm\infty$ è -2 invece di -1).
b) La soluzione cercata è la funzione costante $x(t) = -2$.
c) I valori di a cercati sono $a \leq 2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4.

1. Si procede come per il gruppo 1. a) $f(x) \sim \sqrt[3]{2}\,x^{2/3}$. b) $f(x) - g(x) \sim -\dfrac{\sqrt[3]{2}}{9}x^{8/3}$.
2. Analogo al gruppo 1: $\text{area}(A) = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{volume}(V) = \dfrac{3\pi\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi^2}{3}$.
3. Analogo al gruppo 1. La soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = \frac{2}{1-c\,\exp(t^6)} - 1 = \frac{1+c\,\exp(t^6)}{1-c\,\exp(t^6)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

a) Le soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{2}{1+\exp(t^6)} - 1$$

ed il grafico è molto simile a quello del gruppo 1.
b) La soluzione cercata è la funzione costante $x(t) = -1$.
c) I valori di a cercati sono $a \leq 1$.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno risposto $a \leq 2e^{2x}$ che corrisponde alla disequazione $f''(x) \geq 0$ (mi riferisco al gruppo 1, ma un discorso analogo vale per gli altri gruppi), mentre bisogna trovare gli a per cui questa disequazione è soddisfatta per qualunque $x \geq 0$, ed in particolare la riposta non può dipendere da x.

- Prima parte, esercizio 6. Nel trattare la condizione $x(0) = 0$ diversi dei presenti hanno ricavato l'equazione su c_1 data sopra, e a questa hanno aggiunto la condizione $c_2 = 0$ (non è chiaro con quale logica).

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno trovato come parte principale di f funzioni del tipo $g(x) = 1 + x^2/2$. A prescindere dall'errore che ci sta dietro, una risposta del genere avrebbe dovuto essere rigettata in quanto *evidentemente* inaccettabile: la ragione principale è che $f(x)$ tende a 0 per $x \to 0$, mentre questa $g(x)$ no (e quindi non può essere asintoticamente equivalente a $f(x)$); una seconda ragione è che questa g non è un monomio, mentre le parti principali devono essere dei monomi.

- Seconda parte, esercizio 1. Un errore abbastanza frequente, e piuttosto grave, è stato usare lo sviluppo con $(1+t)^a = 1 + at + \cdots$ sostituendo al posto di t una funzione che non tende a 0 per $x \to 0$. Per esempio, nel gruppo 2,

$$\sqrt{1-\cos(2x)} = 1 - \frac{\cos(2x)}{2} + \cdots$$

Un altro errore abbastanza frequente, e ancora più grave, è stato usare semplificazioni del tipo $(a+b)^c = a^c + b^c$.

- Seconda parte, esercizio 2. Quasi nessuno dei presenti ha calcolato correttamente l'area di A, e nessuno ha calcolato correttamente il volume di V. Uno degli errori più frequenti nell'impostazione di entrambi i calcoli è stato fatto al momento di scrivere le circonferenze in oggetto come grafici di funzioni.

- Seconda parte, esercizio 3. La maggior parte dei presenti che ha affrontato il punto b) ha scritto che la soluzione non esiste, dimenticando che non tutte le soluzioni si trovano utilizzando la solita procedura.

- Seconda parte, esercizio 3. Nel cercare la soluzione generale dell'equazione, diversi dei presenti hanno utilizzato semplificazioni errate, che si possono ricondurre alla forma $e^{a+b} = e^a + e^b$; si tratta di errori gravi.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{\frac{2}{y} - 3} = \sqrt[3]{\frac{2-3y}{y}}\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 3$ si ottiene $x = \pm\sqrt{2}$.

3. Le soluzioni sono $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{2}$.

4. a) $-\infty$; b) 0; c) $-\frac{1}{2}$.

5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa

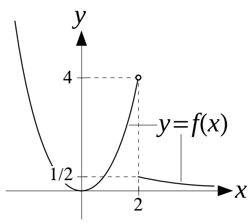
$$\frac{x^a}{\log x} = \frac{(1+t)^a}{\log(1+t)} \sim \frac{1}{t} \quad \text{per } t \to 0.$$

Pertanto l'integrale improprio è finito per nessun a.

6. Equazione a variabili separabili:

$$3x^2\,\dot{x} = e^t\ , \qquad \int 3x^2\,dx = \int e^t\,dt\ , \qquad x^3 = e^t + c\ , \qquad x = \sqrt[3]{e^t + c}\,.$$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(3/5)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(2/5)^n = \frac{1}{1-3/5} - \frac{1}{1-2/5} = \frac{5}{6}.$

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene

$$f^{-1}(y) = -\log\left(\frac{1}{y} - 2\right) = \log y - \log(1-2y)\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = 5$ si ottiene $x = \pm 1$.

3. Le soluzioni sono $-\frac{\pi}{6} \le x \le 0$ e $-\frac{\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{4}$.

4. a) 0; b) $-\frac{1}{6}$; c) $+\infty$.

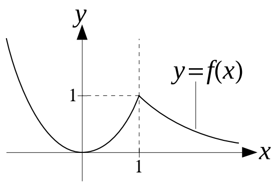
5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa

$$\frac{x^{2a}}{(\log x)^a} = \frac{(1+t)^{2a}}{(\log(1+t))^a} \sim \frac{1}{t^a} \quad \text{per } t \to 0.$$

Pertanto l'integrale improprio è finito per $a < 1$.

6. Equazione a variabili separabili:
$$3x^2\,\dot{x} = \sin t\;, \qquad \int 3x^2\,dx = \int \sin t\,dt\;, \qquad x^3 = -\cos t + c\;, \qquad x = \sqrt[3]{c - \cos t}\,.$$

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2/5)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(4/5)^n = \frac{1}{1-2/5} + \frac{1}{1-4/5} = \frac{20}{3}.$

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene
$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2}{y} - 1\right) = \frac{\log(2-y) - \log y}{2}\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = -1$ si ottiene $x = \pm\sqrt{2}$.

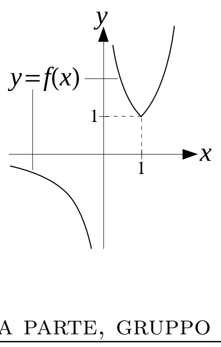
3. Le soluzioni sono $0 \le x \le \dfrac{\pi}{8}$ e $\dfrac{\pi}{4} < x \le \dfrac{\pi}{2}$.

4. a) 0; b) $+\infty$; c) -2.

5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa
$$\frac{e^{ax}}{\sqrt{\log x}} = \frac{e^{a(1+t)}}{\sqrt{\log(1+t)}} \sim \frac{e^a}{t^{1/2}} \quad \text{per } t \to 0.$$
Pertanto l'integrale improprio è finito per ogni a.

6. Uguale al gruppo 1.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 4^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2/5)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(4/5)^n = \frac{1}{1-2/5} - \frac{1}{1-4/5} = -\frac{10}{3}.$

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. Esplicitando y in funzione di x nell'equazione $y = f(x)$ si ottiene
$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{2 - \frac{1}{y}} = \sqrt[3]{\frac{2y-1}{y}}\,.$$

2. Risolvendo l'equazione $f'(x) = -3$ si ottiene $x = \pm 1$.

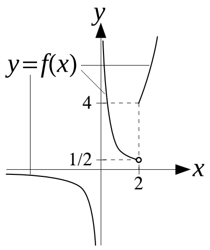
3. Le soluzioni sono $-\dfrac{\pi}{8} \le x \le 0$ e $-\dfrac{\pi}{2} \le x < -\dfrac{\pi}{4}$.

4. a) -6; b) $+\infty$; c) $-\infty$.

5. Usando il cambio di variabile $t = x - 1$ l'integrale diventa improprio in 0 invece che in 1 e la funzione integranda soddisfa
$$\frac{a^x}{(\log x)^{2a}} = \frac{a^{1+t}}{(\log(1+t))^{2a}} \sim \frac{a}{t^{2a}} \quad \text{per } t \to 0.$$
Pertanto l'integrale improprio è finito per $a < 1/2$.

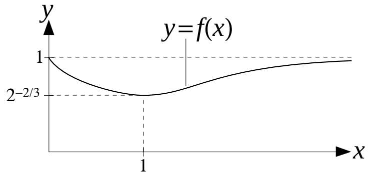
6. Uguale al gruppo 2.

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (2/5)^n = \frac{1}{1-3/5} + \frac{1}{1-2/5} = \frac{25}{6}.$

8. 

SECONDA PARTE, GRUPPO 1.

1. Cominciamo dal punto b), rispondendo al quale otteniamo anche la risposta ad a).
b) Partiamo dalla solita osservazione: dire che la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \ge a(1+x)$ vale per ogni $x \ge 0$ equivale a dire che
$$\min_{x\ge 0} f(x) \ge a \quad \text{dove} \quad f(x) := \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{1+x}. \tag{1}$$
(Ad essere precisi al posto del minimo di f dovremmo mettere l'estremo inferiore, visto che non sappiamo ancora se tale minimo esiste.)
La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \ge 0$ (gli altri valori di x non ci interessano) e studiandone il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{(1+x)^2(1+x^3)^{2/3}}$$
si ottiene che f decresce per $x \le 1$ e cresce per $x \ge 1$. Pertanto 1 è il punto di minimo *assoluto* di f, e quindi
$$\min_{x\ge 0} f(x) = f(1) = 2^{-2/3}$$
e quindi l'affermazione (1) è verificata se e solo se
$$a \le 2^{-2/3}$$
In particolare il più grande numero a per cui vale la (1) è $a_{\max} = 2^{-2/3} \simeq 0{,}630$.
a) Siccome $5/3 = 0{,}6$ è minore o uguale a $a_{\max} \simeq 0{,}630$, la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \ge \frac{3}{5}(1+x)$ risulta essere vera per ogni $x \ge 0$.
c) La disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \le b(1+x)$ vale per ogni $x \ge 0$ se e solo se
$$\max_{x\ge 0} f(x) \le b \tag{2}$$
(anche qui dovremmo mettere al posto del massimo l'estremo superiore).
Osserviamo ora che $f(x)$ tende a 1 per $x \to +\infty$ e vale 1 in 0, e questi dati ci permettono di completare lo studio del grafico di f iniziato al punto precedente, ottenendo la figura riportata sotto.

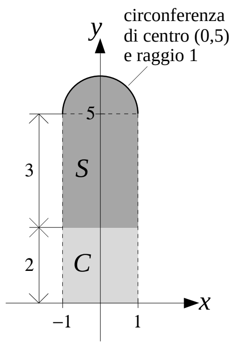


Si vede dunque che il valore massimo di f viene raggiunto per $x = 0$ (punto di massimo *assolut*) e vale 1. Pertanto l'affermazione (2) è verificata se e solo se

$$1 \leq b$$

In particolare il più piccolo numero b per cui vale la (2) è $b_{\min} = 1$.

2. Facciamo coincidere l'asse della ruota con l'asse delle x come nella figura accanto. Il volume v della ruota è dunque dato da



$$v = v_p - c_c$$

dove v_p è il volume della ruota piena (cioè non bucata) ottenuta facendo ruotare la figura piana $S \cup C$ attorno all'asse delle x, mentre v_c è il volume del cilindro ottenuto facendo ruotare il rettangolo C. Questo cilindro ha raggio di base 2 ed altezza 2, e quindi

$$v_c = 8\pi\,.$$

Il volume v_p lo possiamo invece calcolare usando la solita formula per il volume dei solidi ottenuti dalla rotazione del grafico di una funzione: in questo caso il grafico è la metà superiore della circonferenza di centro $(0, 5)$ e raggio 1, e corrisponde alla funzione

$$y = 5 + \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} v_p &= \pi \int_{-1}^{1} \Big(5 + \sqrt{1-x^2}\Big)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 26 - x^2 + 10\sqrt{1-x^2}\, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} 26 - x^2\, dx + 10\,\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{154\,\pi}{3} + 5\pi^2\,. \end{aligned}$$

(L'ultimo integrale può essere calcolato utilizzando il cambio di variabile $x = \sin t$ oppure si osserva che rappresenta l'area di un semicerchio di raggio 1, e quindi vale $\pi/2$.)
Concludendo

$$v = v_p - v_c = \frac{130\,\pi}{3} + 5\pi^2\,.$$

3. a) L'integrale è improprio solo a $+\infty$, esiste perché la funzione integranda è positiva, e si dimostra che è finito applicando il principio del confronto asintotico con l'integrale $\int_1^{+\infty} 1/x^2\, dx$; si noti infatti che

$$\exp(-x^2) \ll \exp(-x) \ll 1/x^2 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

b) Utilizziamo prima il cambio di variabile $t = \sqrt{a}\,x$ in modo da ricondurci ad un integrale in cui appare $\exp(-t^2)$, e poi integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-ax^2)\, dx &= \frac{1}{a^{3/2}} \int_0^{+\infty} t^2 \exp(-t^2)\, dt \\ &= \frac{1}{a^{3/2}} \int_0^{+\infty} t\,\big(t\exp(-t^2)\big)\, dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^{3/2}} \left[\left| t \Big(-\frac{1}{2} \exp(-t^2) \Big) \right|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \Big(-\frac{1}{2} \exp(-t^2) \Big)\, dt \right]$$
$$= \frac{1}{2a^{3/2}} \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\, dt = \frac{m}{2a^{3/2}}$$

(nel terzo passaggio, al momento di integrare per parti, abbiamo usato il fatto che la primitiva di $t \exp(-t^2)$ è $-\frac{1}{2}\exp(-t^2)$; nel quarto passaggio abbiamo usato che $t\exp(-t^2)$ tende a 0 per $t \to +\infty$).

c) Usando lo sviluppo $(x-b)^2 = b^2 + x^2 - 2bx$ spezziamo l'integrale di partenza in tre integrali, di cui il primo si riconduce direttamente ad m, il secondo si calcola usando la formula ottenuta al punto b) nel caso $a = 1$, e l'ultimo si calcola usando cambio di variabile $-x^2 = t$:

$$\int_0^{+\infty} (x-b)^2 \exp(-x^2)\, dx$$
$$= b^2 \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\, dx + \int_0^{+\infty} x^2 \exp(-x^2)\, dx - 2b \int_0^{+\infty} x \exp(-x^2)\, dx$$
$$= b^2 m + \frac{m}{2} + b \int_0^{-\infty} e^t\, dt = b^2 m + \frac{m}{2} - b\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2.

1. Analogo al gruppo 1. Poniamo
$$f(x) := \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{1+x}\,.$$
b) La disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \geq a(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ se e solo se $a \leq a_{\max}$ dove
$$a_{\max} = \min_{x\geq 0} f(x) = f(1) = 2^{-3/4} \simeq 0{,}595\,.$$
a) Siccome $5/3 = 0{,}6$ è maggiore di $a_{\max}$, la disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \geq \frac{3}{5}(1+x)$ non vale per tutti gli $x \geq 0$.
c) La disequazione $\sqrt[4]{1+x^4} \leq b(1+x)$ vale per ogni $x \geq 0$ se e solo se $b \geq b_{\min}$ dove
$$b_{\min} = \max_{x\geq 0} f(x) = f(1) = 1\,.$$

2. Si procede come per il gruppo 1. In questo caso
$$v_c = 2\pi$$
$$v_p = \pi \int_{-1}^{1} \Big(4 + \sqrt{1-x^2}\Big)^2 dx$$
$$= \pi \int_{-1}^{1} 17 - x^2 + 8\sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{100\,\pi}{3} + 4\pi^2$$
ed infine
$$v = v_p - v_c = \frac{94\,\pi}{3} + 4\pi^2\,.$$

3. Uguale al gruppo 1.

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 7. Pare che molti dei presenti abbiano fatto il seguente ragionamento (mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso discorso vale anche per gli altri gruppi): siccome $2^n \ll 3^n$, la serie di partenza
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}$$

si comporta come la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3/5)^n \,,$$

e pertanto il valore della prima serie coincide con quello della seconda, che è $5/2$. La prima parte del ragionamento è corretta, le due serie si comportano nello stesso modo (ed in particolare convergono entrambe ad un numero finito), ma da questo non segue che abbiano lo stesso valore.

- Seconda parte, esercizio 1c). Diversi dei presenti hanno seguito la strategia suggerita sopra, ma non si sono accorti che per trovare il valore massimo di f bisogna confrontare il valore in 0 con il limite a $+\infty$ che in questo caso coincidono. Anche se il risultato finale è corretto, il ragionamento è sbagliato (o perlomeno incompleto).

- Seconda parte, esercizio 1. Una soluzione alternativa consiste nel cercare i valori di massimo e di minimo della funzione
$$g(x) := \sqrt[3]{1+x^3} - a(1+x)$$
(mi riferisco al gruppo 1, ma lo stesso vale per il gruppo 2). I calcoli sono un po' più complicati di quelli presentati sopra, ma comunque fattibili.

- Seconda parte, esercizio 1. Un'altra soluzione alternativa per il punto b), proposta da uno dei presenti, consiste nel riscrivere la disequazione $\sqrt[3]{1+x^3} \geq a(1+x)$ (di nuovo, mi riferisco al gruppo 1) come $1+x^3 \geq a^3(1+x)^3$; dividendo per il fattore positivo $x+1$ (ricordo che $x \geq 0$), si ottiene $x^2 - x + 1 \geq a^3(1+x)^2$, e ci si riduce quindi a discutere la disequazione di secondo grado
$$(1-a^3)x^2 - (1+2a^3)x + (1-a^2) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \geq 0.$$
Ovviamente la stessa idea può essere usata per risolvere anche il punto c).

- Seconda parte, esercizio 3a). Nel discutere l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$ la maggior parte dei presenti ha fatto una gran varietà di errori gravi, come dire che l'integrale è improprio in 0 (oltre che in $+\infty$), che converge quando l'esponente $-x^2$ è minore di -1 (confondendosi con l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} x^a\,dx$, immagino), che $\exp(-x^2)$ è asintoticamente equivalente a una qualche potenza di x per $x \to +\infty$, ecc.

PRIMA PARTE, GRUPPO 1.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 2$ se e solo se $a\,2^2 = a - 2$, ovvero $a = -2/3$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} \le 0$ vale a dire $x \ge 2/3$.

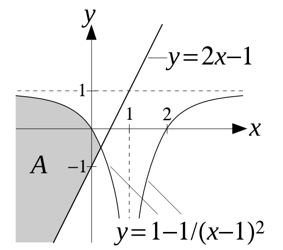
3. $c \ll a \ll b$.

4. $f(x) := x^2 - 2x^4 + 4x^6 + O(x^8)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (1, 0, 0)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 4 - 2x$ si ottiene
$$\int_0^2 \sqrt{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^4 y^{1/2}\,dy = \frac{1}{3}\Big|y^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{8}{3}\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{-t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = e^{-t^3}$.

8. 

PRIMA PARTE, GRUPPO 2.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 4$ se e solo se $a\,4^2 = a - 4$, ovvero $a = -4/15$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} \ge 0$ vale a dire $x \ge 4/3$.

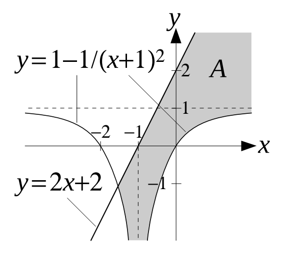
3. $b \ll c \ll a$.

4. $f(x) := x^2 + x^4 - \dfrac{x^6}{2} + O(x^8)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (2, 0, 0)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 8 - 4x$ si ottiene
$$\int_0^2 \sqrt[3]{8-4x}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^8 y^{1/3}\,dy = \frac{3}{16}\Big|y^{4/3}\Big|_0^8 = 3\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = e^{t^3}$.

8. 

Prima parte, gruppo 3.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 2$ se e solo se $a + 2 = a\, 2^2$, ovvero $a = 2/3$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x+3}} \leq 0$ vale a dire $x \geq 1$.

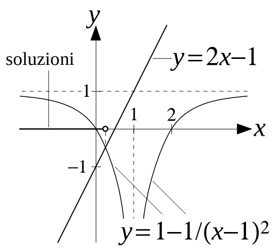
3. $b \ll a \ll c$.

4. $f(x) := x^4 - x^5 - \dfrac{x^6}{2} + O(x^7)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (0, 0, 2)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 27 - 9x$ si ottiene
$$\int_0^3 \sqrt[3]{27-9x}\, dx = \frac{1}{9}\int_0^{27} y^{1/3}\, dy = \frac{1}{12}\Big| y^{4/3} \Big|_0^{27} = \frac{27}{4}\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = -e^{t^3}$.

8. 

Prima parte, gruppo 4.

1. La funzione f è continua nel punto $x = 4$ se e solo se $a + 4 = a\, 4^2$, ovvero $a = 4/15$.

2. Deve essere $f'(x) := \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} \geq 0$ vale a dire $x \geq 8/3$.

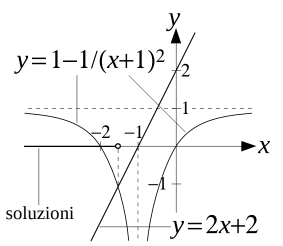
3. $b \ll c \ll a$.

4. $f(x) := x^4 + 2x^5 + 4x^6 + O(x^7)$.

5. La velocità di P per $t = 0$ è data dal vettore $v = (0, 0, 1)$.

6. Usando il cambio di variabile $y = 9 - 3x$ si ottiene
$$\int_0^3 \sqrt{9-3x}\, dx = \frac{1}{3}\int_0^{9} y^{1/2}\, dy = \frac{2}{9}\Big| y^{3/2} \Big|_0^{9} = 6\,.$$

7. Si tratta di un'equazione lineare del primo ordine omogenea con soluzione generale $x(t) = ce^{-t^3}$ con $c \in \mathbb{R}$. La soluzione cercata è $x(t) = -e^{-t^3}$.

8. 

SECONDA PARTE.

1. a) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$\lambda^2 + 4\lambda + a = 0 \tag{1}$$

e per $a < 4$ ha due soluzioni reali e distinte

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-a}\,. \tag{2}$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-t}$, e facendo le dovute sostituzioni si ottiene la seguente soluzione

$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{-t}}{a-3}\,, \tag{4}$$

da cui segue che la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{e^{-t}}{a-3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

b) Quando $a = 3$ la formula (3) per la soluzione dell'equazione omogenea resta valida, mentre la formula (4) per la soluzione particolare non ha senso (si noti che il denominatore $a-3$ vale zero). Infatti in questo caso e^{-t} risolve l'equazione omogenea e quindi si deve cercare una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = cte^{-t}$; facendo le dovute sostituzioni si ottiene in effetti la soluzione

$$\tilde{x}(t) = \frac{te^{-t}}{2}$$

da cui segue che la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + \frac{te^{-t}}{2} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Invece per $a = 4$ resta valida la formula (4) per la soluzione particolare, ma non la formula (3) per la soluzione dell'equazione omogenea. In questo caso si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$x_{\rm om}(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

da cui segue che la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t} + e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

c) Supponiamo per cominciare che $a < 4$ e $a \neq 3$. Usando la formula risolutiva (5) si vede subito che la condizione $x(t) = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$ è soddisfatta da *ogni* soluzione x se e solo se le soluzioni dell'equazione caratteristica soddisfano $\lambda_1, \lambda_2 \le -1$, vale a dire

$$-2 + \sqrt{4-a} \le -1 \quad \text{ovvero} \quad a \ge 3\,.$$

Consideriamo ora i casi $a = 3$ ed $a = 4$. Utilizzando le formule risolutive (7) e (6) otteniamo subito che la condizione $x(t) = O(e^{-t})$ è verificata da ogni soluzione x di (*) quando $a = 4$ mentre non è verificata da alcuna soluzione quando $a = 3$ (si osservi infatti che il termine $te^{-t}/2$ in (6) non è "o grande" di e^{-t}).
Riassumendo, i valori di a cercati sono

$$a > 3\,.$$

d) Utilizzando le formule risolutive (5), (6) e (7) si vede subito che non esistono soluzioni del tipo richiesto quando $a = 3$ o $a = 4$, mentre nei rimanenti casi ne esistono se $\lambda_1 = -1/2$ (basta prendere $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$) oppure $\lambda_2 = -1/2$ (basta prendere $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$). Dobbiamo dunque cerca i valori di a per cui $-1/2$ risolve l'equazione caratteristica (1), ovvero

$$(-1/2)^2 + 4(-1/2) + a = 0 \quad \text{ovvero} \quad a = 7/4\,.$$

2. a) Riscriviamo la disequazione che definisce A come

$$e^y \geq 3 + 2x - x^3 \,,$$

ed osserviamo che tale disequazione si riscrive come

$$y \geq \log(3 + 2x - x^3)$$

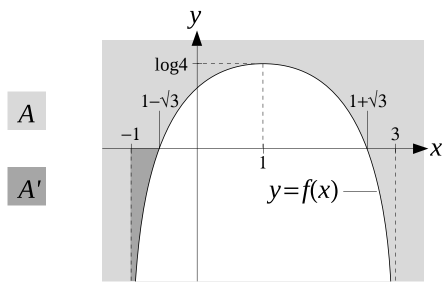
quando il logaritmo a destra dell'uguale è ben definito, cioè quando $3 + 2x - x^3 > 0$, mentre è automaticamente soddisfatta da ogni y quando $3 + 2x - x^3 \leq 0$ (perché e^y è sempre positivo). Non ci resta quindi che disegnare il grafico della funzione

$$f(x) := \log(3 + 2x - x^3) \,.$$

Si verifica facilmente che questa funzione è definita e continua per $-1 < x < 3$, tende a $-\infty$ per $x \to -1^+$ e per $x \to 3^-$, ed è positiva per $1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$ e negativa altrimenti. Inoltre, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = \frac{2(1 - x)}{3 + 2x - x^3} \,,$$

si vede che la funzione è crescente per $x \leq 1$ e decrescente per $x \geq 1$, ed in particolare 1 è il punto di massimo assoluto. Grazie a quanto appena detto possiamo tracciare il grafico di f e disegnare gli insiemi A ed A'.



b) Come si vede dalla figura sopra, l'area di A' è data da

$$\text{area}(A) = -\int_{-1}^{1-\sqrt{3}} f(x)\, dx \,.$$

(Attenzione al segno davanti all'integrale!) Scrivendo quindi

$$f(x) = \log(3 + 2x - x^3) = \log\big((x + 1)(3 - x)\big) = \log(x + 1) + \log(3 - x)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
\text{area}(A) &= -\int_{-1}^{1-\sqrt{3}} \log(x + 1)\, dx - \int_{-1}^{1-\sqrt{3}} \log(3 - x)\, dx \\
&= -\int_{0}^{2-\sqrt{3}} \log y\, dy - \int_{2+\sqrt{3}}^{4} \log y\, dy \\
&= -\Big| y(\log y - 1) \Big|_{0}^{2-\sqrt{3}} - \Big| y(\log y - 1) \Big|_{2+\sqrt{3}}^{4} \\
&= 4 - 2\sqrt{3} - 8\log 2 + 4\log(2 + \sqrt{3}) \simeq 0{,}258
\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio abbiamo applicato ai due integrali i cambi di variabile $y = x + 1$ e $y = 3 - x$ nell'ordine; nel terzo passaggio abbiamo usato come fatto noto che la primitiva di $\log y$ è $y(\log y - 1)$).

3. Riscriviamo la serie come $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ dove

$$f(x) := e^{g(x)} - e^2 \quad \text{e} \quad g(x) := (2x + 3)\, \log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) \,.$$

Usando lo sviluppo

$$\log(1 + t) \sim t \quad \text{per } t \to 0$$

otteniamo che, per $x \to +\infty$,

$$g(x) \sim 2x\frac{1}{x} = 2\,,$$

da cui segue che $g(x)$ tende a 2, e quindi $f(x)$ tende a 0, ma questo non basta a determinare il comportamento della serie. Usando invece lo sviluppo

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$

otteniamo che, sempre per $x \to +\infty$,

$$g(x) = (2x+3)\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\right] = 2 + \frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\,,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} f(x) = \exp(g(x)) - \exp(2) &= \exp\left(2 + \frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right) - \exp(2) \\ &= e^2\left[\exp\left(\frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right) - 1\right] \sim e^2\left[\frac{2}{x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right] \sim \frac{2e^2}{x} \end{aligned}$$

(nel penultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$).
Pertanto la serie di partenza si comporta come la serie armonica $\sum 1/n$, ed in particolare diverge a $+\infty$.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere il punto c) nessuno dei presenti si è accorto che per $a = 3$ nessuna soluzione x soddisfa la condizione $x(t) = O(e^{-t})$ per $t \to +\infty$, e quindi $a = 3$ non rientra tra i valori di a cercati.

- Seconda parte, esercizio 1. Nel risolvere i punti c) e d) molti dei presenti hanno svolto i calcoli giusti, senza però spiegare cosa stavano facendo.

- Seconda parte, esercizio 2a). Molti dei presenti hanno disegnato correttamente il grafico della funzione $f(x) := \log(3 + 2x - x^2)$, ma hanno poi sbagliato a disegnare gli insiemi A e A'.

- Seconda parte, esercizio 2b). Diversi dei presenti hanno scritto che

  $$\text{area}(A') = \int_{-1}^{1-\sqrt{3}} \log(3 + 2x - x^2)\,dx\,,$$

  mentre invece l'area cercata è uguale all'opposto di questo integrale.

- Seconda parte, esercizio 2b). Alcuni dei presenti, pur disegnando correttamente l'insieme A', hanno scritto che è evidente "dal disegno" che A' ha area finita (è vero, ma non capisco perché dovrebbe essere evidente).

- Seconda parte, esercizio 3. Dei pochi presenti che hanno provato a risolvere questo esercizio, molti hanno usato il fatto noto

  $$\lim_{n\to+\infty}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n = e$$

  per scrivere che, per $n \to +\infty$,

  $$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{2n+3} = \left[\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n\right]^2\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^3 \sim e^2\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^3\,,$$

  e ne hanno quindi dedotto che

  $$\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{2n+3} - e^2 \sim e^2\left[\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^3 - 1\right].$$

Mentre il primo passaggio è corretto, il secondo non lo è, perché si basa su questo principio generale: date tre funzioni $f, g, \tilde{g}$ con $g \sim \tilde{g}$ allora $g + f \sim \tilde{g} + f$; ma questo principio è *falso* (e in particolare è falso nel caso specifico che stiamo considerando qui).

Prima parte, gruppo 1.

1. La derivata $f'(x) := 3(x^2 - 4)$ si annulla in ± 2. Confrontando i valori della funzione nei punti $-4, -2, 2, 3$ otteniamo che -4 e 2 sono i punti di minimo, 2 è il punto di massimo.

2. a) $+\infty$; b) 0; c) $+\infty$.

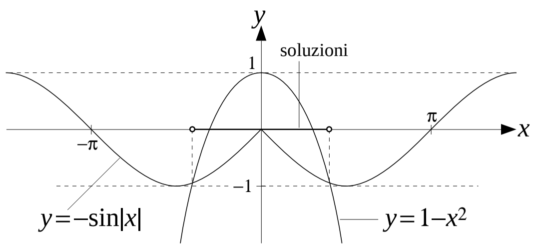
3. $f(x) := \dfrac{\sin(-2x^2)}{x^2} = \dfrac{-2x^2 + \frac{4}{3}x^6 - \frac{4}{15}x^{10} + O(x^{14})}{x^2} = -2 + \dfrac{4}{3}x^4 - \dfrac{4}{15}x^8 + O(x^{12})$.

4. $f'(x) = \exp\big((-2x)^2\big)\,(-2x)' = -2\,\exp(4x^2)$.

5. La lunghezza L percorsa è data dall'integrale del modulo) della velocità:
$$L = \int_0^{+\infty} \big|v(t)\big|\,dt = \int_0^{+\infty} \Big|\big(e^{-t}(-\cos(2t) - 2\sin(2t)),\; e^{-t}(-\sin(2t) + 2\cos(2t))\big)\Big|\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \sqrt{5}\,e^{-t}\,dt = \sqrt{5}\,.$$

6. La soluzione generale dell'equazione è $x(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + 2t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ è quindi $x(t) = -\sin(2t) + 2t$.

7. Poiché il termine generico della serie di partenza soddisfa
$$\frac{2^{-n} + n^3}{1 + n^{2a}(1+n)} \sim \frac{1}{n^{2a-2}} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
la serie converge per $a > 3/2$, per confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2a-2}}$.

8. 

Prima parte, gruppo 2.

1. La derivata $f'(x) := 3(x^2 - 4)$ si annulla in ± 2. Confrontando i valori della funzione nei punti $-3, -2, 2, 4$ otteniamo che 2 è il punto di minimo, mentre -2 e 4 sono i punti di massimo.

2. a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 0.

3. $f(x) := \dfrac{\log(1 - 4x^3)}{2x} = \dfrac{-4x^3 - 8x^6 - \frac{64}{3}x^9 + O(x^{12})}{2x} = -2x^2 - 4x^5 - \dfrac{32}{3}x^8 + O(x^{11})$.

4. $f'(x) = \exp\big(-(x^2)^2\big)\,(x^2)' = 2x\,\exp(-x^4)$.

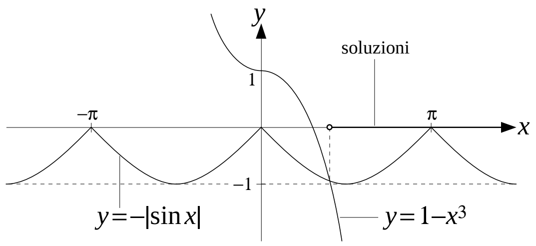
5. La lunghezza L percorsa è data dall'integrale del modulo) della velocità:
$$L = \int_0^{+\infty} \big|v(t)\big|\,dt = \int_0^{+\infty} \Big|\big(e^{-2t}(-2\cos t - \sin t),\; e^{-t}(-2\sin t + \cos t)\big)\Big|\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \sqrt{5}\,e^{-2t}\,dt = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

6. La soluzione generale dell'equazione è $x(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + 3t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La soluzione che soddisfa $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ è quindi $x(t) = -\sin(3t) + 3t$.

7. Poiché il termine generico della serie di partenza soddisfa

$$\frac{2^{-n}}{1+(n^a+1)n} \sim \frac{1}{n^{a+1}2^n} \ll \frac{1}{2^n} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

la serie converge per ogni $a > 0$, per confronto asintotico con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

8. 

Seconda parte.

1. Partiamo dal punto b).
   b) Riscriviamo la disequazione di partenza come

$$x^3 \log x \ge -a \quad \text{per ogni } x > 0,$$

vale a dire

$$\min_{x>0} f(x) \ge -a \quad \text{dove} \quad f(x) := x^3 \log x\,. \tag{1}$$

Studiando il segno della derivata $f'(x) = x^2(3\log x + 1)$ si vede subito che il punto di minimo assoluto di f è $x_0 := \exp(-1/3)$, quindi il valore minimo di f è $f(x_0) = -1/(3e)$, e pertanto la (1) diventa $-1/(3e) \ge -a$, vale a dire

$$a \ge \frac{1}{3e}\,.$$

a) La disequazione considerata si ottiene da quella al punto b) ponendo $a = 1/8$; siccome $1/8 > 1/(3e)$, per quanto visto sopra tale disequazione è verificata per ogni $x > 0$.

2. a) Si vede subito che $f(x)$ tende a 0 per $x \to 0$, e per la precisione

$$\begin{aligned} f(x) &:= 2 - \sqrt{3 + e^{-4x^2}} \\ &= 2 - \sqrt{4 - 4x^2 + O(x^4)} \\ &= 2 - 2\sqrt{1 - x^2 + O(x^4)} \\ &= 2 - 2\left[1 + \frac{-x^2 + O(x^4)}{2} + O\big((-x^2)^2\big)\right] = x^2 + O(x^4) \sim x^2\,, \end{aligned}$$

dove per il primo passaggio abbiamo usato lo sviluppo

$$e^t = 1 + t + O(t^2) \quad \text{con} \quad t := -4x^2\,,$$

mentre per il terzo abbiamo usato lo sviluppo

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + O(u^2) \quad \text{con} \quad u := -x^2 + O(x^4) \sim -x^2\,.$$

b) Per quanto visto al punto a), per ogni $a \ne -1$ abbiamo che

$$f(x) + ax^2 \sim (1+a)x^2 \quad \text{per } x \to 0.$$

Per $a = -1$ la parte principale di $f(x)$ si cancella con $-x^2$ e quindi abbiamo bisogno di uno sviluppo più accurato di $f(x)$. Procediamo dunque come per il punto a) prendendo però sviluppi di ordine superiore:

$$\begin{aligned} f(x) &:= 2 - \sqrt{3 + e^{-4x^2}} \\ &= 2 - \sqrt{4 - 4x^2 + 8x^4 + O(x^6)} \\ &= 2 - 2\sqrt{1 - x^2 + 2x^4 + O(x^6)} \\ &= 2 - 2\Big[1 + \frac{-x^2 + 2x^4 + O(x^6)}{2} - \frac{\big(-x^2 + O(x^4)\big)^2}{8} + O\big((-x^2)^3\big)\Big] \\ &= -\big(-x^2 + 2x^4 + O(x^6)\big) + \frac{x^4 + O(x^6)}{4} + O(x^6) = x^2 - \frac{7}{4}x^4 + O(x^6)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

dove per il primo passaggio abbiamo usato lo sviluppo

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^2) \quad \text{con} \quad t := -4x^2\,,$$

mentre per il terzo abbiamo usato lo sviluppo

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + O(u^2) \quad \text{con} \quad u := -x^2 + 2x^4 + O(x^6) = -x^2 + O(x^4) \sim -x^2\,.$$

Utilizzando la formula (2) otteniamo infine

$$f(x) - x^2 = -\frac{7}{4}x^4 + O(x^6) \sim -\frac{7}{4}x^4\,.$$

3. a) Osserviamo che per $x > 1$ si ha che $x^a > 1$ per ogni esponente $a > 0$ ed in particolare per $a = 2x$; quindi $f(x) > 0$. Viceversa per $x < 1$ si ha che $x^a < 1$ per ogni esponente $a > 0$ ed in particolare per $a = 2x$; quindi $f(x) < 0$.

   b) Per quanto visto al punto a) l'integrale è improprio in 1 e a $+\infty$ e la funzione integranda è sempre positiva; pertanto l'integrale improprio esiste, e per capire se è finito o meno lo spezziamo come somma di due integrali impropri semplici:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} = \int_1^2 \frac{dx}{f(x)} + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{f(x)}\,.$$

   Per studiare il comportamento del primo integrale improprio a destra dell'uguale lo riscriviamo come integrale improprio in 0 tramite il cambio di variabile $x = 1 + t$,

$$\int_1^2 \frac{dx}{f(x)} = \int_0^1 \frac{dt}{f(1+t)}\,, \tag{3}$$

   e cerchiamo la parte principale di $f(1+t)$ per $t \to 0$:

$$\begin{aligned} f(1+t) &= (1+t)^{2+2t} - 1 \\ &= \exp\big((2+2t)\log(1+t)\big) - 1 \sim (2+2t)\log(1+t) \sim 2t\,, \end{aligned} \tag{4}$$

   (nel terzo passaggio abbiamo usato che $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$, e nel quarto che $\log(1+t) \sim t$, sempre per $t \to 0$). Usando la (4) otteniamo infine che l'integrale improprio in (3) è infinito per confronto asintotico con $\int_0^1 dt/t$, e quindi anche l'integrale improprio di partenza è infinito.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Nell'affrontare il punto b) quasi tutti i presenti si sono ricondotti a studiare il minimo della funzione f come spiegato sopra, ma alla fine alcuni hanno confrontato il parametro a con il *punto di minimo* di f invece che con il *valore minimo* di f. Questo è un errore concettuale grave.

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti hanno trovato lo sviluppo di f necessario per rispondere al punto a) come spiegato sopra, vale a dire utilizzando gli sviluppi di Taylor al primo ordine di e^x e $\sqrt{1+x}$, ed hanno capito chiaramente che per il punto b) nel caso $a = -1$ occorre migliorare tale sviluppo. Ma per far questo hanno sviluppato all'ordine due solo la funzione $\sqrt{1+x}$ e non anche e^x; se si svolgono i calcoli tenendo il resto si vede subito che così facendo c'è un problema. . .