Versione: 17 settembre 2013

Università di Pisa

Corso di laurea in Ingegneria Gestionale

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Analisi Matematica I

a.a. 2012-13

Giovanni Alberti e Vincenzo M. Tortorelli

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze. Gli scritti d'esame per il corso di Analisi Matematica I per Ingegneria Gestionale si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda con tre problemi a cui si deve invece dare una soluzione articolata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questa raccolta contiene i testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda contiene una breve traccia delle soluzioni.

Programma del corso [versione: 15 dicembre 2012]

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni e grafici
   - 1.1 Richiamo delle nozioni di base di trigonometria.
   - 1.2 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, immagine, funzione inversa; funzioni crescenti e descrescenti. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.3 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
2. Numeri reali, successioni, limiti, continuità
   - 2.1 Numeri interi, razionali e reali. *Completezza dei numeri reali.*
   - 2.2 Successioni e limiti di successioni. Limite infinito. Proprietà elementari dei limiti.
   - 2.3 Limiti di funzioni. Continuità: definizione e significato. *Esistenza del minimo e del massimo di una funzione continua su un intervallo chiuso.*
3. Derivate
   - 3.1 Derivata di una funzione: definizione e significato geometrico. Interpretazioni fisiche: velocità e accelerazione.
   - 3.2 Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.3 Teorema di Lagrange. Segno della derivata e monotonia. Segno della derivata seconda e convessità. Individuazione dei punti di massimo e di minimo di una funzione. Uso delle derivate per disegnare il grafico di una funzione.
   - 3.4 Funzioni asintoticamente equivalenti (vicino ad un punto assegnato). Trascurabilità di una funzione rispetto ad un altra. Notazione di Landau ("o piccolo" e "o grande"). Parte principale di una funzione (all'infinito e in zero).
   - 3.5 Teorema di Cauchy. Sviluppo di Taylor (in zero) di una funzione. Formula del binomio di Newton. Uso degli sviluppi di Taylor per il calcolo dei limiti e delle parti principali.
   - 3.6 Teoremi di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi all'infinito ed in zero.
4. Integrali
   - 4.1 Definizione dell'integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Approssimazione dell'integrale tramite somme finite. Un'interpretazione fisica dell'integrale.
   - 4.2 Primitiva di una funzione e prima versione del teorema fondamentale del calcolo integrale.
   - 4.3 Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
   - 4.4 Calcolo delle aree delle figure piane. Calcolo dei volumi delle figure solide. Lunghezza di un cammino nel piano e nello spazio.
   - 4.5 Integrali impropri di funzioni positive. Criterio del confronto e del confronto asintotico.
   - 4.6 Integrali impropri di funzioni a segno variabile: convergenza e convergenza assoluta.
5. Serie
   - 5.1 Serie a termini positivi. Esempi fondamentali. Criteri di convergenza per le serie a termini positivi: criterio del confronto, del confronto asintotico, della radice, dell'integrale.
   - 5.2 Serie a segno variabile; convergenza e convergenza assoluta.

5.3 *Sviuppo in serie di Taylor della funzione* e^x *ed espressione della costante di Nepero e come serie. Espressione di* π *come serie.*

6. Equazioni differenziali

6.1 Esempi di equazioni differenziali tratti dalla meccanica. Significato dei dati iniziali.
6.2 Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.
6.3 *Equazione dell'oscillatore armonico semplice, smorzato e forzato. Risonanza.*

T E S T I

Prima parte, gruppo 1

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arcsin(2e^t)$.
2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\cos(x-1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $0 \le x \le 2$.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log((2x)^x)$; b) $\tan(1-2x)$; c) $\dfrac{x}{1-x^2}$.
4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3 - 3x)$ nell'intervallo $-2 \le x \le 3$.
5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \log(\sin x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-3^x}{(2^x-1)^2}$.
6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x^4)}{x^3}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-\sin x}{2^x}$.
7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(2x^3) - \exp(3x^2)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $-\dfrac{1}{x^2} \le y \le \cos x - 2$.

Prima parte, gruppo 2

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arcsin(\log t)$.
2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\sin(x+1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $-1 \le x \le 2$.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log((3x)^x)$; b) $\tan(1-3x)$; c) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$.
4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3 - 3x)$ nell'intervallo $0 \le x \le \frac{3}{2}$.
5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1-5^x}{(2^x+1)^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \log(\cos x)$.
6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\sqrt[4]{x}}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-2x^4)}{x^4}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{3^x}$.
7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \log(1+3x^4) - \log(1+4x^3)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $-\dfrac{1}{x^2} + 1 \le y \le \cos x - 1$.

Prima parte, gruppo 3

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arccos(3e^t)$.
2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\cos(x+1) = 1/\sqrt{2}$ nell'intervallo $-2 \le x \le 0$.
3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log(x^{3x})$; b) $\tan(1+2x)$; c) $\dfrac{x}{x^2+1}$.
4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3 - 3x)$ nell'intervallo $-\frac{3}{2} \le x \le 0$.
5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \log(1+e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+3^x}{(2^x+1)^2}$.

6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{\sqrt[4]{x}}$; b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(2-x^4)}{x}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin x}{4x}$.

7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \cos(x^3) - \cos(x^2)$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $\dfrac{1}{x^2} \geq y \geq 2 - \cos x$.

Prima parte, gruppo 4

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\arccos(\log t)$.

2. Trovare le soluzioni dell'equazione $\sin(x+2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nell'intervallo $-2 \leq x \leq 1$.

3. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\log(x^{2x})$; b) $\tan(1+3x)$; c) $\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

4. Trovare il valore massimo e minimo di $\exp(x^3-3x)$ nell'intervallo $-3 \leq x \leq 2$.

5. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+5^x}{(2^x-1)^2}$; b) $\lim_{x\to+\infty} \exp(\sin x)$.

6. Calcolare (se esistono!) i limiti: a) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log x}{\sqrt[3]{x}}$; b) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log(2+x^4)}{x}$; c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-\sin x}{5x}$.

7. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \exp(x^2) - \cos(x^2)$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che: $\dfrac{1}{x^2} - 1 \geq y \geq 1 - \cos x$.

Seconda parte, gruppo 1

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
   a) $\log(1-3x^2) + \big[\log(1-x)\big]^2$;
   b) $\log(1-3x^2) + 3\big[\log(1-x)\big]^2$;
   c) $\log(1-3x^3) - 3\big[\log(1-x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^3 \geq 15 \log x - 3$ per ogni $x > 0$.
   b) Determinare i numeri reali a tali che $x^3 \geq 15 \log x + a$ per ogni $x > 0$.

3. Si consideri la funzione
   $$f(x) := x^5 e^{-x},$$
   e per ogni $a > 0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.
   a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.
   b) Calcolare l'area di T_a.
   c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

Seconda parte, gruppo 2

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

a) $\log(1-x^2) + \big[\log(1+2x)\big]^2$;
b) $4\log(1-x^2) + \big[\log(1+2x)\big]^2$;
c) $8\log(1-x^3) + \big[\log(1+2x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^3 \geq 18\,\log x - 5$ per ogni $x > 0$.
b) Determinare i numeri reali a tali che $x^3 \geq 18\,\log x + a$ per ogni $x > 0$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := x^{11} e^{-2x}\,,$$
e per ogni $a > 0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.
b) Calcolare l'area di T_a.
c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
a) $\log(1-x^2) + \big[\log(1-2x)\big]^2$;
b) $4\log(1-x^2) + \big[\log(1-2x)\big]^2$;
c) $8\log(1-x^3) - \big[\log(1-2x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^4 \geq 20\,\log x - 3$ per ogni $x > 0$.
b) Determinare i numeri reali a tali che $x^4 \geq 20\,\log x + a$ per ogni $x > 0$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := x^5 e^{-2x}\,,$$
e per ogni $a > 0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.
a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.
b) Calcolare l'area di T_a.
c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

SECONDA PARTE, GRUPPO 4

1. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:
a) $\log(1+3x^2) + \big[\log(1-x)\big]^2$;
b) $\log(1+3x^2) - 3\big[\log(1-x)\big]^2$;
c) $\log(1+3x^3) + 3\big[\log(1-x)\big]^3$.

2. a) Dire se è vero o meno che $x^4 \geq 24\,\log x - 5$ per ogni $x > 0$.
b) Determinare i numeri reali a tali che $x^4 \geq 24\,\log x + a$ per ogni $x \geq 0$.

3. Si consideri la funzione
$$f(x) := x^{11} e^{-x}\,,$$
e per ogni $a > 0$ sia T_a il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle y, la retta passante per l'origine e per il punto $(a, f(a))$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$.

a) Tracciare un disegno approssimativo di $f(x)$ per $x \geq 0$ e disegnare T_a per un a a vostra scelta.

b) Calcolare l'area di T_a.

c) Trovare il valore massimo e minimo di quest'area.

Prima parte.

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \exp(1-x)$; b) $\sqrt{1+x^2}$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 \sin(2x)}{\log(1+x^4)}$; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^2 x}{\sqrt{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(-x+\sin x)$.

3. Determinare la primitiva $\displaystyle\int \frac{x^3}{\exp(x^4)}\,dx$.

4. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 3x^2 \log x\,dx$.

5. Dire per quali $a>0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\sin(1/x^a)\,dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a>0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+n^{-a})$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = e^x \sin t$ che soddisfa $x(\pi)=0$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = 1-e^x$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \ge x^2$.

Seconda parte.

1. a) Scrivere la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 8t\,. \qquad (*)$$
b) Trovare la soluzione della (*) che soddisfa le condizioni iniziali $x(0)=0$ e $\dot{x}(0)=0$.
c) Trovare le soluzioni della (*) che soddisfano $x(t) = O(e^{2t})$ per $t\to+\infty$.

2. Dire per quali $a>0$ la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a - n\sin(1/n)}{n^a}$$
converge ad un numero finito (fare attenzione al caso $a=1$).

3. a) Fissato $a>0$, tracciare un grafico approssimativo della funzione
$$f(x) := \frac{1}{(1+x^4)^a}\,.$$
b) Sia A il *solido di rotazione* nello spazio ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse delle x. Tracciare un disegno approssimativo di A e dire per quali valori di a il volume è finito.
c) Sia B il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare il grafico di f attorno all'asse delle y. Tracciare un disegno approssimativo di B e dire per quali valori di a il volume è finito.

PRIMA PARTE.

1. Risolvere la disequazione $\dfrac{x-1}{x^2-4} > 0$.
2. Trovare i *valori* di minimo e di massimo di $\log(5-x^2)$ relativamente all'intervallo $[-1,2]$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-1}{4^x+1}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\log(2x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{\sin(2x^2)}$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\log(1+x) - x$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3-2x}\,dx$.
6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $\dfrac{1}{1+at}$ risolve l'equazione differenziale $\dot{x} + 4x^2 = 0$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} - 2\dot{x} + 5x = 0$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano $x > 0$ e $\dfrac{1}{x} \le y \le \log(x+1)$.

SECONDA PARTE.

1. a) Dire se la disequazione $x^4 + 28 \ge 4x^3$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$ oppure no.
   b) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la disequazione $x^4 + a \ge 4x^3$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.
2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \sqrt{x^6+1}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x,y) nel piano tali che $x \ge 0$ e $x^3 \le y \le f(x)$.
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.
3. Dato $a > 0$ si consideri la serie a termini positivi
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\log n)^{-(\log n)^a}\ .$$
   a) Dire se questa serie converge a un numero finito o meno per $a = 1$.
   b) Dire per quali a la serie converge a un numero finito.
   [*Suggerimento: riscrivere il termine della serie nella forma n^{b_n} con b_n opportuno.*]

Prima parte, gruppo 1

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin x \leq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 e^{-x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(2^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^{10}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{\log(1-x^2)}$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x e^{2x}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^a}{e^x}\, dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^a}{1+n^{3a}}$ è finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{e^t}{2x}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

Prima parte, gruppo 2

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 e^{2x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\log(1-2x^3)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(x^{-3})$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^3 \log(2x)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^a)}{x^{3a}}\, dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\log n)^a}{n^2}$ è finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{e^t}{3x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\sin x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x e^{-2x}$; b) $\log\left(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\right)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{3x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \exp(2^x)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^{10}2^x$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^2 \log(3x)\, dx$.

5. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^a \sin\Big(\frac{1}{x^2}\Big) dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^a}{e^n}$ è finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{2x}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^3 e^{-x}$; b) $\log\Big(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\Big)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{3x^2}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{10}}{\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \exp(2^x)$.

4. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int xe^{-x}\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{x^2}\, dx$ risulta essere finito.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^a \sin\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$ è finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = \dfrac{\cos t}{3x^2}$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq -x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + ax = 2e^{-2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 5$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^3 - \log(1+3x^3)}{x^{2a}}\, dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.

b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{4}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 2

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + ax = -e^{-3t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 10$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{4x^3 - \log(1 + 4x^3)}{x^a}\,dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.
b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (4x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{2}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{2}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 3

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + ax = -4e^{-2t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 8$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{2x^2 - \log(1 + 2x^2)}{x^a}\,dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.
b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{4}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Seconda parte, gruppo 4

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + ax = 4e^{-3t}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale di (*) per $a = 13$.
b) Dire per quali valori di a si ha che *ogni* soluzione di (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$ per $t \to +\infty$.

2. Dato $a > 0$ si consideri l'integrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^2 - \log(1+3x^2)}{x^{2a}}\, dx\,.$$
a) Dire per quali a la funzione integranda converge ad un limite finito per $x \to 0^+$.
b) Spezzare questo integrale improprio in integrali impropri semplici e dire quindi per quali a esso esiste ed è finito.

3. Dato $a > 0$, consideriamo la funzione $f(x) := (4x^2 + a)^3$.
a) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$.
b) Trovare il valore di a e di x_0 per cui il grafico della funzione $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{2}x$ nel punto di ascissa x_0.
c) Trovare i valori di a per cui $f(x) \geq \frac{27}{2}x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Prima parte, gruppo 1

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\cos(1-x^2)$; b) $4^{2x}/2^{3x}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{e^x}{x^2-4}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^{10}\, 2^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\sqrt{1+4x^6}}$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{x^4(x+4)}{\log(1+2x^3)}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n - n^2}{1+n^a}$ risulta essere finita.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x \cos t = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = |e^x - 1|$.

Prima parte, gruppo 2

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sin x}{\sqrt{8-x^3}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\exp(1+x^2)$; b) $2^{6x}/4^{2x}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{x}\, \log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{4+x^6}}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{e^x}{x^2-4}$.
4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{\log(1+3x^3)}{x^2(x+3)}$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(3x)^2}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + \sin n}{4+n^{2a}}$ risulta essere finita.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x \cos t = 0$ che soddisfa $x(0) = 4$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = e^{|x|} - 1$.

Prima parte, gruppo 3

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{e^x}{\sqrt{x^2-4}}$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x^3-1)$; b) $3^{5x}/9^{2x}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2+9x^6}}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x^2-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt[6]{x}\, \log x$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{1-\exp(x^3)}{x(x+4)}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+(3x)^2}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+\log n}{4+n^{2a}}$ risulta essere finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x \sin t = 0$ che soddisfa $x(0) = 4$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = |1 - e^x|$.

Prima parte, gruppo 4

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\dfrac{\sin x}{\sqrt{x^3-8}}$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\sin(x^2-1)$; b) $9^{3x}/3^{4x}$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2x^2+9x^6}}{x^3}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^5\, 4^x$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x^2-1}$.

4. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{x(x^2+3)}{1-\exp(x^2)}$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n - n^3}{1+n^a}$ risulta essere finita.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} + x \sin t = 0$ che soddisfa $x(0) = 2$.

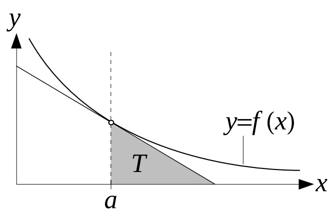
8. Disegnare il grafico di $f(x) = -e^{|x|}$.

Seconda parte, gruppo 1

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1 + 2x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(x^3 - 3x)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \le e^{6x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \le y \le e^{6x}.$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).

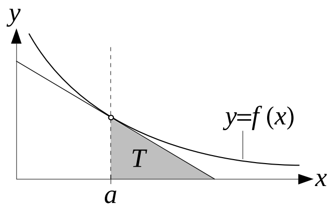


   a) Calcolare l'area di T.
   b) Determinare le funzioni f per cui l'area di T vale 1 per ogni scelta di $a > 0$.

Seconda parte, gruppo 2

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt[3]{\cos(6x)} - 1 + 6x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(3x - x^3)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \le e^{-6x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \le y \le e^{-6x} .$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

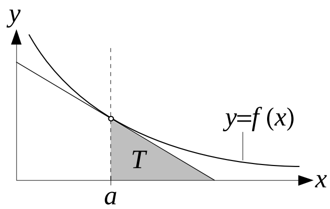
3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).
   

   a) Calcolare l'area di T.
   b) Trovare tutte le funzioni f per cui l'area di T vale $1/2$ per ogni scelta di $a > 0$.

Seconda parte, gruppo 3

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(4x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(4x)} - 1 + 4x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(x^3 - 3x^2)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \le e^{4x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \le y \le e^{4x} .$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

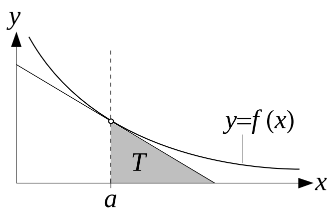
3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).
   

   a) Calcolare l'area di T.
   b) Trovare tutte le funzioni f per cui l'area di T vale $1/2$ per ogni scelta di $a > 0$.

Seconda parte, gruppo 4

1. a) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(2x)} - 1$.
   b) Trovare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2$.

2. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) := \exp(3x^2 - x^3)$.
   b) Risolvere la disequazione $f(x) \le e^{-4x}$ e disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che
   $$f(x) \le y \le e^{-4x} .$$
   c) Dire se l'area di A è finita o infinita.

3. Sia f una funzione definita su $(0, +\infty)$, derivabile, positiva e tale che $f'(x) < 0$ per ogni x. Fissato $a > 0$, sia T il triangolo delimitato dalle seguenti rette: l'asse delle x, la retta verticale passante per il punto $(a, 0)$, e la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a (vedere la figura accanto).
   

a) Calcolare l'area di T.

b) Trovare tutte le funzioni f per cui l'area di T vale 1 per ogni scelta di $a > 0$.

Prima parte, gruppo 1

1. Risolvere la disequazione $\log \log x > 0$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x}{x^2}$; b) $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$; c) $\lim_{x \to -\infty} x e^x$.
3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 di $\log(1-2x^3)$.
4. Calcolare la primitiva $\int 4x \cos(x^2)\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_2^{+\infty} \frac{x^a - 2}{x^2+1} dx$ è finito.
6. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n}$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 2t(1+x^2)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le \cos x$.

Prima parte, gruppo 2

1. Risolvere la disequazione $\exp(\exp(x)) > 2$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to +\infty} \cos(x^2+1)$; b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2}$; c) $\lim_{x \to 0} \frac{2x^4}{\log(1+x^4)}$.
3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 8 di $\cos(2x^2)$.
4. Calcolare la primitiva $\int 4x \exp(x^2)\, dx$.
5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} \frac{x^a + 3}{x^3+1} dx$ è finito.
6. Calcolare il valore della serie $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = 3t^2(1+x^2)$.
8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $0 \le y \le \sin x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Risolvere la disequazione $\log \log x > 1$.
2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + e^x}{x^2+1}$; b) $\lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{2}{x^2+1}\right)$; c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^3)}{4x^2}$.
3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 8 di $\log(1-2x^4)$.
4. Calcolare l'integrale $\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x \cos(x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^2-1}{x^a+2} dx$ è finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = -2te^x$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\cos x \le y \le 0$.

Prima parte, gruppo 4

1. Risolvere la disequazione $\exp(\exp(x)) > 4$.

2. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2)-1}{2x^2}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(1-x^2)$.

3. Trovare il polinomio di Taylor di ordine 6 di $\sin(3x^2)$.

4. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^2 2x \exp(x^2)\, dx$.

5. Dire per quali $a > 0$ l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^a+3} dx$ è finito.

6. Calcolare il valore della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{x} = -3t^2e^x$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $\sin x \le y \le 0$.

Seconda parte, gruppo 1

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = e^{at}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 1$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = -1$.
c) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{x}{(x^2-1)^2}\,.$$
b) Per ogni numero reale $a > 0$ dire quante sono le soluzioni x dell'equazione $f(x) = a$ che soddisfano $x \le 2$.
c) Per ogni $a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più grande di tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$; determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

3. Dire per quali numeri reali a la seguente serie a termini positivi è finita:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(n^2+1)^a - n^{2a}\big]\,.$$
[*Suggerimento: raccogliere* n^{2a}.]

Seconda parte, gruppo 2

1. Dato $a \in \mathbb{R}$, consideriamo l'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = e^{at}\,. \tag{*}$$
a) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 2$.
b) Trovare la soluzione generale della (*) per $a = 1$.
c) Trovare la soluzione generale della (*) per a qualunque.

2. a) Disegnare il grafico della funzione
$$f(x) := \frac{-x}{(x^2-4)^2}\,.$$
b) Per ogni numero reale $a > 0$ dire quante sono le soluzioni x dell'equazione $f(x) = a$ che soddisfano $x \geq -1$.
c) Per ogni $a > 0$ indichiamo con $x(a)$ la più piccola di tutte le soluzioni dell'equazione $f(x) = a$; determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

3. Dire per quali numeri reali a la seguente serie a termini positivi è finita:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big[(n^3+1)^a - n^{3a}\big]\,.$$
[*Suggerimento: raccogliere* n^{3a}.]

Prima parte, gruppo 1

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -1/2$ comprese tra $-\pi$ e π.
2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := x^3 - 3x$ relativamente all'intervallo $[0, 3]$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{3x^3}{\exp(-x^2) - 1}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 (in 0) di $\sqrt[3]{1 + 9x^4}$.
5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4 \sin(1 - 2x)\, dx$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^x\, dx$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -x^2 t^2$ che soddisfa $x(0) = 3$.
8. Disegnare il grafico di $|\sin x|$ e risolvere *graficamente* la disequazione $|\sin x| \geq x^2$.

Prima parte, gruppo 2

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \geq -1/2$ comprese tra 0 e 2π.
2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := x^3 - 3x$ relativamente all'intervallo $[-3, 0]$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{4x^4}{1 - \exp(-2x^2)}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 (in 0) di $\sqrt[4]{1 + 8x^3}$.
5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4x \cos(2x)\, dx$.
6. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1 - 2x)^3}$.
7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -2x^3 t^3$ che soddisfa $x(0) = 1$.
8. Disegnare il grafico di $|\cos x|$ e l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \leq y \leq |\cos x|$.

Prima parte, gruppo 3

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \leq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.
2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := 3x - x^3$ relativamente all'intervallo $[0, 2]$.
3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\dfrac{4x^3}{\log(1 - x^2)}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 3 (in 0) di $\sqrt[3]{1 - 9x^3}$.
5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4x \cos(x^2 - 1)\, dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x \log x \, dx$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -x^2 e^t$ che soddisfa $x(0) = 2$.

8. Disegnare il grafico di $|\cos x|$ e risolvere *graficamente* la disequazione $|\cos x| \le x^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Trovare le soluzioni della disequazione $\cos x \le 1/2$ comprese tra $-\pi$ e π.

2. Determinare i *valori* minimo e massimo di $f(x) := 3x - x^3$ relativamente all'intervallo $[-2, 0]$.

3. Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\displaystyle\frac{4x^4}{\log(1 - 4x^2)}$.

4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 (in 0) di $\sqrt[4]{1 - 8x^4}$.

5. Determinare la primitiva $\displaystyle\int 4 \log(2x + 1) \, dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$.

7. Trovare la soluzione dell'equazione $\dot{x} = -x^3 e^t$ che soddisfa $x(0) = 1$.

8. Disegnare il grafico di $|\sin x|$ e l'insieme dei punti (x, y) tali che $x^2 \le y \le |\sin x|$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Disegnare il grafico di $f(x) := x^2 \log x$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $f(x) \le y \le x^2$ e calcolarne l'area.

2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\dot{x} + \frac{2x}{t} = \exp(t^3) \, .$$
   b) Tra tutte le soluzioni individuare quelle che tendeno a 0 per $t \to 0$, se ce ne sono.

3. Una macchina stampa un certo oggetto di plastica, e la velocità di stampa v (numero di pezzi prodotti in un secondo) può essere fissata a piacere tra 1 e 10. Tuttavia tanto maggiore si prende v quanto maggiore è la frazione p di pezzi che risultano essere difettosi e vanno quindi scartati; si sa anzi che in prima approssimazione
$$p = \frac{v^3}{10^3} \, .$$
   Detta v_{eff} la velocità effettiva della macchina (cioè il numero di pezzi *non difettosi* prodotti in un secondo), come bisogna prendere v in modo da rendere v_{eff} più grande possibile?

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. a) Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{\log x}{x^2}$.
   b) Disegnare l'insieme A dei punti (x, y) tali che $x > 0$ e $\dfrac{1}{x^2} \le y \le f(x)$ e calcolarne l'area.

2. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\dot{x} + \frac{3x}{t} = \sin(t^4)\,.$$
b) Tra tutte le soluzioni individuare quelle che tendeno a 0 per $t \to 0$, se ce ne sono.

3. Una macchina stampa un certo oggetto di plastica, e la velocità di stampa v (numero di pezzi prodotti in un secondo) può essere fissata a piacere tra 1 e 10. Tuttavia tanto maggiore si prende v quanto maggiore è la frazione p di pezzi che risultano essere difettosi e vanno quindi scartati; si sa anzi che in prima approssimazione
$$p = \frac{v^4}{10^4}\,.$$
Detta v_{eff} la velocità effettiva della macchina (cioè il numero di pezzi *non difettosi* prodotti in un secondo), come bisogna prendere v in modo da rendere v_{eff} più grande possibile?

Prima parte, gruppo 1

1. Risolvere la disequazione $\exp(x^2 - 1) > 1$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x \log x$; b) $(1 + e^{-x})^{-2}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x^2)}{3x^2}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 6 (in 0) della funzione $\sin(-2x^2)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 + e^{-n}}{(1 + n^2)^a}$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x$.

Prima parte, gruppo 2

1. Risolvere la disequazione $\log(x^2 - 1) > 0$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \log x$; b) $(1 + e^{-x})^{-2}$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{\tan(2x^2)}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{1-x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 8 (in 0) della funzione $\cos(2x^2)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$.
6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n}{(1 + n^3)^a}$ converge ad un numero finito.
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$.
8. Disegnare il grafico di $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \leq x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Risolvere la disequazione $\log(2 - x^2) > 0$.
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x \log x$; b) $(1 + e^{-x})^2$.
3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \log\log x$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3x^3}{\tan(2x^3)}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{xe^x}$.
4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 6 (in 0) della funzione $\log(1 - 4x^3)$.
5. Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^a}{e^n}$ converge ad un numero finito.

7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} + 4\dot{x} - 5x = 0$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{x+1}$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq -x$.

PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Risolvere la disequazione $\exp(x^2 - 1) < 1$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $x^2 \log x$; b) $(1 + e^{-x})^2$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos(e^x)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\log\log x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x^3)}{2x^2}$.

4. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 4 (in 0) della funzione e^{-2x^2}.

5. Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^a}{(1+n)^a}$ converge ad un numero finito.

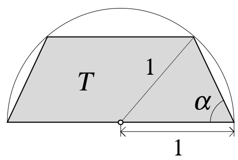
7. Trovare la soluzione generale dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} - 5x = 0$.

8. Disegnare il grafico di $f(x) = -\dfrac{\pi}{2} - \arctan x$ e risolvere *graficamente* la disequazione $f(x) \geq x$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Per ogni numero reale $a > 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$3 - x = \frac{a}{x^2}\,. \qquad (*)$$
b) Per ogni $a > 0$, sia $x(a)$ la soluzione negativa dell'equazione (*). Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

2. Calcolare il perimetro del trapezio isoscele T in figura in funzione del coseno di α, e dire per quale α tale perimetro è massimo.



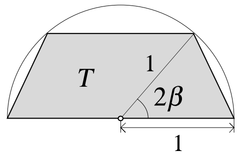
3. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{1}{x^x - 1} = \frac{1}{e^{x\log x} - 1}\,.$$
Studiare il dominio di definizione e il segno di $f(x)$, e quindi discutere i seguenti integrali impropri, cioè dire se esistono e, in caso affermativo, se sono finiti:
$$\text{a)} \int_2^{+\infty} f(x)\, dx\,, \quad \text{b)} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. a) Per ogni numero reale $a > 0$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione
$$4 - x = \frac{a}{x^3}\,. \qquad (*)$$

b) Sia $x(a)$ la più piccola delle soluzioni dell'equazione (*) per ogni $a > 0$ per cui esiste almeno una soluzione. Determinare la parte principale di $x(a)$ per $a \to 0^+$.

2. Calcolare il perimetro del trapezio isoscele T in figura in funzione del seno di β, e dire per quale β tale perimetro è massimo.



3. Si consideri la funzione
$$f(x) := \frac{1}{x^x - 1} = \frac{1}{e^{x \log x} - 1} .$$
Studiare il dominio di definizione e il segno di $f(x)$, e quindi discutere i seguenti integrali impropri, cioè dire se esistono e, in caso affermativo, se sono finiti:
$$\text{a)} \int_0^{1/2} f(x)\, dx\,, \quad \text{b)} \int_0^{+\infty} f(x)\, dx\,.$$

Prima parte, gruppo 1

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\log(2 - x^2)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}}$; b) $\arctan(x^2)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\log x}{1-\log x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{xe^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\,\log x$.

4. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $\sin\left(\dfrac{2x}{1+x^3}\right)$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^3 \log x\, dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 4x\sin(x^2)\, dx$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione t^a risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} + \dfrac{\dot{x}}{t} + \dfrac{4x}{t^2} = 0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 - e^x \le y \le e^x - 1$.

Prima parte, gruppo 2

1. Determinare l'insieme di definizione della funzione $\log(1 - x^2)$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$; b) $x\arctan x$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\log x + x}{\log x - x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{xe^x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x\log(1-2x)}{\sin(x^2)}$.

4. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $\log\left(1 - \dfrac{1}{x^2+\log x}\right)$.

5. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int x^4 \log x\, dx$.

6. Calcolare $\displaystyle\int_0^{2} 4x\exp(x^2)\, dx$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione t^a risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} + \dfrac{\dot{x}}{t} - \dfrac{4x}{t^2} = 0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $e^x - 1 \le y \le 1 - e^x$.

Prima parte, gruppo 3

1. Risolvere la disequazione $\log(2 - x^2) \ge 0$.

2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni: a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{3x}}$; b) $\arctan(x^3)$.

3. Calcolare i seguenti limiti: a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x + x}{\log x - x}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{x\log x}{\sin x}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x\log x$.

4. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $\sin\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$.

5. Calcolare la primitiva $\int x^2 \log x \, dx$.

6. Calcolare $\int_{-1}^{1} 4x \exp(x^2)\, dx$.

7. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione t^a risolve l'equazione differenziale $\ddot{x} - \frac{\dot{x}}{t} + \frac{x}{t^2} = 0$.

8. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \geq e^x - 1$ e $y \geq 1 - e^x$.

Seconda parte, gruppo 1

1. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = -5e^{-2t} \tag{*}$$
b) Trovare la soluzione x di (*) tale che $x(0) = 1$ e $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$.

2. Dire se la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ è finita oppure no.

3. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \frac{1}{\cos x} - 1$.
b) Discutere il seguente integrale improprio al variare di $a > 0$ (cioè dire esiste e, in caso affermativo, se è finito):
$$\int_0^{\pi/4} \frac{f(x^a)}{x^2} dx\,.$$
c) Discutere il seguente integrale improprio:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx\,.$$

Seconda parte, gruppo 2

1. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 6e^{-2t} \tag{*}$$
b) Trovare la soluzione x di (*) tale che $x(0) = 1$ e $x(t)$ tende a 0 per $t \to +\infty$.

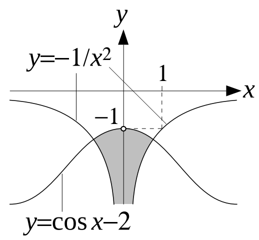
2. Dire se la serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(2n)!}$ è finita oppure no.

3. a) Determinare la parte principale per $x \to 0$ di $f(x) := \frac{1}{\cos x} - 1$.
b) Discutere il seguente integrale improprio al variare di $a > 0$ (cioè dire esiste e, in caso affermativo, se è finito):
$$\int_0^{\pi/4} \frac{f(x^a)}{x^2} dx\,.$$
c) Discutere il seguente integrale improprio:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx\,.$$

S O L U Z I O N I

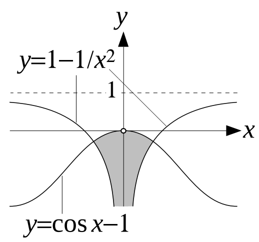
PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Deve essere $-1 \leq e^{2t} \leq 1$, e quindi $t \leq \log \frac{1}{2} = -\log 2$.
2. $1 - \frac{\pi}{4}$ e $1 + \frac{\pi}{4}$.
3. a) $\big[x(\log x + \log 2)\big]' = \log x + \log 2 + 1$; b) $\dfrac{-2}{\cos^2(1-2x)} = -2\big[1 + \tan^2(1-2x)\big]$; c) $\dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.
4. $\min = e^{-2}$ e $\max = e^{18}$.
5. a) $-\infty$; b) 0.
6. a) 0; b) 0; c) $+\infty$.
7. $-3x^2$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. Deve essere $-1 \leq \log t \leq 1$ e quindi $\frac{1}{e} \leq t \leq e$.
2. $\frac{\pi}{4} - 1$ e $\frac{3\pi}{4} - 1$.
3. a) $\log x + \log 3 + 1$; b) $\dfrac{-3}{\cos^2(1-3x)} = -3\big[1 + \tan^2(1-3x)\big]$; c) $\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$.
4. $\min = e^{-2}$ e $\max = 1$.
5. a) $-\infty$; b) 0.
6. a) $-\infty$; b) -2; c) 0.
7. $-4x^3$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.

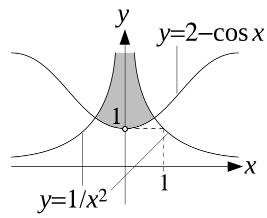


PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. Deve essere $-1 \leq 3e^t \leq 1$, e quindi $t \leq \log \frac{1}{3} = -\log 3$.
2. $-1 - \frac{\pi}{4}$ e $-1 + \frac{\pi}{4}$.
3. a) $(3x \log x)' = 3(\log x + 1)$; b) $\dfrac{2}{\cos^2(1+2x)} = 2\big[1 + \tan^2(1+2x)\big]$; c) $\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.
4. $\min = 1$ e $\max = e^2$.
5. a) 0; b) 0.
6. a) 0; b) non esiste; c) $\frac{1}{4}$.

7. $\dfrac{x^4}{2}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Deve essere $-1 \leq \log t \leq 1$ e quindi $\dfrac{1}{e} \leq t \leq e$.

2. $\dfrac{\pi}{4} - 2$ e $\dfrac{3\pi}{4} - 2$.

3. a) $2(\log x + 1)$; b) $\dfrac{3}{\cos^2(1+3x)} = 3\big[1 + \tan^2(1+3x)\big]$; c) $\dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$.

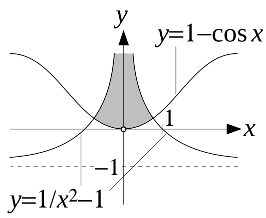
4. $\min = e^{-18}$ e $\max = e^2$.

5. a) $+\infty$; b) non esiste.

6. a) $-\infty$; b) $+\infty$; c) $-\dfrac{1}{5}$.

7. x^2.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Usando il fatto che $\log(1+t) = t + O(t^2)$ per $t \to 0$ si ottiene

$$\begin{aligned}\log(1-3x^2) + \big[\log(1-x)\big]^2 &= -3x^2 + O(x^4) + [-x + O(x^2)]^2 \\ &= -3x^2 + x^2 + O(x^3) \sim -2x^2 .\end{aligned}$$

b) In questo caso il ragionamento precedente porta solo a dire che la funzione è $O(x^3)$. Proviamo dunque a cercare lo sviluppo all'ordine 3, e per farlo usiamo lo sviluppo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ (solo per il secondo addendo della funzione, visto che il primo è già sviluppato all'ordine 3):

$$\begin{aligned}&\log(1-3x^2) + 3\big[\log(1-x)\big]^2 \\ &\qquad = -3x^2 + O(x^4) + 3\Big[(-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + O(x^3)\Big]^2 \\ &\qquad = -3x^2 + O(x^4) + 3\Big[x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^2 \\ &\qquad = -3x^2 + O(x^4) + 3[x^2 + x^3 + O(x^4)] \\ &\qquad = 3x^3 + O(x^4) \sim 3x^3 .\end{aligned}$$

c) Procediamo come al punto precedente, cercando lo sviluppo all'ordine 4:

$$\begin{aligned}&\log(1-3x^3) - 3\big[\log(1-x)\big]^3 \\ &\qquad = -3x^3 + O(x^6) + 3\Big[x + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^3 \\ &\qquad = -3x^3 + O(x^6) + 3\Big[x^3 + \frac{3}{2}x^4 + O(x^5)\Big] \\ &\qquad = \frac{9}{2}x^4 + O(x^5) \sim \frac{9}{2}x^4 ;\end{aligned}$$

per sviluppare il cubo nella seconda riga ho usato il binomio di Newton

$$(a+b)^3 = a^2 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

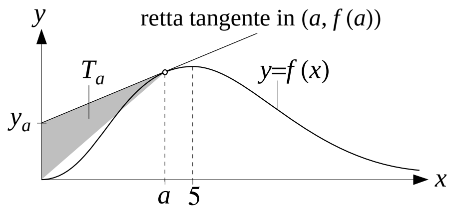
con $a := x$ e $b := \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$, e ho semplificato gli addendi $3ab^2$ e b^3 usando il fatto che $b = O(x^2)$.

2. a) Consideriamo la funzione $f(x) := x^3 - 15\log x + 3$. La domanda diventa quindi se è vero o meno che $f(x) \geq 0$ per ogni $x > 0$.

   Per rispondere cerchiamo il valore minimo della funzione $f(x)$ sull'insieme di definizione $x > 0$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = 3x^2 - \frac{15}{x} = \frac{3}{x}(x^3 - 5)$$
otteniamo che f è decrescente nell'intervallo $(0, \sqrt[3]{5}]$ e crescente in $[\sqrt[3]{5}, +\infty)$. Ne segue che $\sqrt[3]{5}$ è il punto di minimo *assoluto* di f, e quindi il valore minimo è
$$f(\sqrt[3]{5}) = 5(1 - \log 5) + 3 \simeq -0{,}05\,.$$
Pertanto non è vero che $f(x) \geq 0$ per ogni x.

   b) Procediamo come per il punto a), ponendo $f(x) := x^3 - 15\log x - a$. Il problema è quindi determinare per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo di f risulta essere positivo (o nullo). Come prima, il punto di minimo assoluto di f è $\sqrt[3]{5}$ e quindi il valore minimo è
$$f(\sqrt[3]{5}) = 5(1 - \log 5) - a\,.$$
Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono
$$a \leq 5(1 - \log 5)\,.$$

3. a) La funzione $f(x)$ è definita e positiva per tutti gli $x \geq 0$, e ha limite 0 a $+\infty$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) := (5 - x)x^4 e^{-x}$$
si ottiene che f è crescente nell'intervallo $[0, 5]$ e decrescente in $5, +\infty$; usando queste informazioni tracciamo il grafico di f nella figura sottostante.

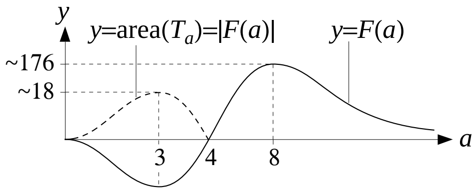


   b) Se scegliamo come base del triangolo T_a il lato che sta sull'asse delle y, vale a dire il segmento di estremi 0 e y_a allora la lunghezza della base è $|y_a|$ e l'altezza è a (si noti che y_a può essere negativo).

   Per ottenere l'area di T_a dobbiamo quindi determinare y_a; per far questo ricordiamo che l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(a, f(a))$ è $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ e quindi
$$y_a = -af'(a) + f(a) = (a - 4)a^5 e^{-a}\,.$$
Pertanto area$(T_a) = |F(a)|$ dove
$$F(a) := \frac{1}{2}a\,y_a = \frac{1}{2}(a - 4)a^6 e^{-a}\,.$$

   c) Per trovare il massimo e il minimo dell'area di T_a studiamo la funzione $F(a)$ per $a \geq 0$. Si vede subito che $F(a)$ è negativa per $0 \leq a < 4$, positiva per $a > 4$, e tende a 0 per $a \to +\infty$.

   Studiando inoltre il segno della derivata
$$F'(a) = -\frac{1}{2}(a^2 - 11a + 24)a^5 e^{-a}$$
si ottiene che F è crescente nell'intervallo $[3, 8]$ e decrescente altrove; usando queste informazioni tracciamo il grafico di $F(a)$ e di area(T_a) nella figura sotto (il primo con tratto continuo, il secondo tratteggiato).



Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 4$ (oppure quando a tende a 0 o a $+\infty$); inoltre, confrontando il valore assoluto di F nel punto di minimo $a = 3$, vale a dire $|F(3)| \simeq 18$, con il valore nel punto di massimo $a = 8$, vale a dire $F(8) \simeq 176$, si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 8$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 2

1. Analogo al gruppo 1.

a)
$$\begin{aligned} \log(1-x^2) + \big[\log(1+2x)\big]^2 &= -x^2 + O(x^4) + [2x + O(x^2)]^2 \\ &= -x^2 + O(x^4) + 4x^2 + O(x^3) \\ &= 3x^2 + O(x^3) \sim 3x^2 \,. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 4\log(1-x^2) + \big[\log(1+2x)\big]^2 &= -4x^2 + O(x^4) + \big[2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^2 \\ &= -4x^2 + O(x^4) + 4x^2 - 8x^3 + O(x^4) \\ &= -8x^3 + O(x^4) \sim -8x^3 \,. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 8\log(1-x^3) + \big[\log(1+2x)\big]^3 &= -8x^3 + O(x^6) + \big[2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^3 \\ &= -8x^3 + O(x^6) + 8x^3 - 24x^4 + O(x^5) \\ &= -24x^4 + O(x^5) \sim -24x^4 \,. \end{aligned}$$

2. Analogo al gruppo 1.

b) La domanda equivale a chiedere per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo della funzione

$$f(x) := x^3 - 18\log x - a$$

è positivo o nullo. Studiando il segno della derivata $f'(x) = 3x^{-1}(x^3 - 6)$ si ottiene che $\sqrt[3]{6}$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi il valore minimo è $f(\sqrt[3]{6}) = 6(1 - \log 6) - a$. Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono

$$a \le 6(1 - \log 6) \simeq -4{,}75 \,. \qquad (1)$$

a) Siccome -5 risulta tra i valori di a che soddisfano la condizione (1), è effettivamente vero che $x^3 - 18\log x + 5 \ge 0$ per ogni x.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso

$$\text{area}(T_a) = |F(a)| \quad \text{con } F(a) := (a-5)a^{12}e^{-2a} \,;$$

la funzione $F(a)$ si annulla per $a = 5$ e i suoi punti di minimo e massimo assoluto sono rispettivamente $a = 4$ e $a = 15/2$, e quindi i valori minimo e il massimo sono rispettivamente $F(4) \simeq -5{,}6 \cdot 10^3$ e $F(15/2) \simeq 2{,}4 \cdot 10^4$.

Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 5$, mente dal confronto dei valori assoluti del massimo e del minimo di F si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 15/2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO 3

1. Analogo al gruppo 1.

a)
$$\log(1-x^2) + \big[\log(1-2x)\big]^2 = -x^2 + O(x^4) + [-2x + O(x^2)]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= -x^2 + O(x^4) + 4x^2 + O(x^3) \\
&= 3x^2 + O(x^3) \sim 3x^2 .
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
4\log(1-x^2) + \big[\log(1-2x)\big]^2 &= -4x^2 + O(x^4) + \big[-2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^2 \\
&= -4x^2 + O(x^4) + 4x^2 + 8x^3 + O(x^4) \\
&= 8x^3 + O(x^4) \sim 8x^3 .
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
8\log(1-x^3) - \big[\log(1-2x)\big]^3 &= -8x^3 + O(x^6) - \big[-2x - 2x^2 + O(x^3)\big]^3 \\
&= -8x^3 + O(x^6) + 8x^3 + 24x^4 + O(x^5) \\
&= 24x^4 + O(x^5) \sim 24x^4 .
\end{aligned}
$$

2. Analogo al gruppo 1.

   b) La domanda equivale a chiedere per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo della funzione
$$f(x) := x^4 - 20\log x - a$$
è positivo o nullo. Studiando il segno della derivata $f'(x) = 4x^{-1}(x^4 - 5)$ si ottiene che $\sqrt[4]{5}$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi il valore minimo è $f(\sqrt[4]{5}) = 5(1 - \log 5) - a$. Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono
$$a \le 5(1 - \log 5) \simeq -3{,}05 . \tag{2}$$
a) Siccome -3 non risulta tra i valori di a che soddisfano la condizione (2), non è vero che $x^3 - 18\log x + 5 \ge 0$ per ogni x.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso
$$\text{area}(T_a) = |F(a)| \quad \text{con } F(a) := (a-2)a^6 e^{-2a} ;$$
la funzione $F(a)$ si annulla per $a = 2$ e i suoi punti di minimo e massimo assoluto sono rispettivamente $a = 3/2$ e $a = 4$, e quindi i valori minimo e massimo sono rispettivamente $F(3/2) \simeq -0{,}28$ e $F(4) \simeq 2{,}7$. Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 2$ mentre dal confronto dei valori assoluti del massimo e del minimo di F si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 4$.

Seconda parte, gruppo 4

1. Analogo al gruppo 1.

a)
$$
\begin{aligned}
\log(1+3x^2) + \big[\log(1-x)\big]^2 &= 3x^2 + O(x^4) + [-x + O(x^2)]^2 \\
&= 3x^2 + O(x^4) + x^2 + O(x^3) \\
&= 4x^2 + O(x^3) \sim 4x^2 .
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
\log(1+3x^2) - 3\big[\log(1-x)\big]^2 &= 3x^2 + O(x^4) - 3\Big[-x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^2 \\
&= 3x^2 + O(x^4) - 3x^2 - 3x^3 + O(x^4) \\
&= -3x^3 + O(x^4) \sim -3x^3 .
\end{aligned}
$$

c)
$$
\begin{aligned}
\log(1+3x^3) + 3\big[\log(1-x)\big]^3 &= 3x^3 + O(x^6) + 3\Big[-x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)\Big]^3 \\
&= 3x^3 + O(x^6) - 3x^3 - \frac{9}{2}x^4 + O(x^5) \\
&= -\frac{9}{2}x^4 + O(x^5) \sim -\frac{9}{2}x^4 .
\end{aligned}
$$

2. Analogo al gruppo 1.

   b) La domanda equivale a chiedere per quali $a \in \mathbb{R}$ il valore minimo della funzione
$$f(x) := x^4 - 24\log x - a$$

è positivo o nullo. Studiando il segno della derivata $f'(x) = 4x^{-1}(x^4 - 6)$ si ottiene che $\sqrt[4]{6}$ è il punto di minimo assoluto di f, e quindi il valore minimo è $f(\sqrt[4]{6}) = 6(1 - \log 6) - a$. Pertanto i valori di a per cui questo minimo è positivo o nullo sono

$$a \leq 6(1 - \log 6) \simeq -4{,}75\,. \tag{3}$$

a) Siccome -5 risulta tra i valori di a che soddisfano la condizione (3), è effettivamente vero che $x^4 - 24\log x + 5 \geq 0$ per ogni x.

3. Analogo al gruppo 1. In questo caso

$$\text{area}(T_a) = |F(a)| \quad \text{con } F(a) := \frac{1}{2}(a - 10)a^{12}e^{-a}\,;$$

la funzione $F(a)$ si annulla per $a = 10$ e i suoi punti di minimo e massimo assoluto sono rispettivamente $a = 8$ e $a = 15$, e quindi i valori minimo e massimo sono rispettivamente $F(8) \simeq -2{,}3 \cdot 10^7$ e $F(15) \simeq 9{,}9 \cdot 10^7$. Pertanto il valore minimo dell'area di T_a è 0 e viene assunto per $a = 10$ mentre dal confronto dei valori assoluti del massimo e del minimo di F si ottiene che il valore massimo dell'area di T_a viene assunto per $a = 15$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 8. Alcuni dei presenti hanno confuso il grafico di $1/x^2$ con quello di $1/x$ (sono effettivamente simili per $x > 0$, ma la prima funzione è pari e sempre positiva, mentre la seconda è dispari e negativa per $x < 0$).

- Seconda parte, esercizio 1. Molti dei presenti hanno svolto l'esercizio fino in fondo ottenendo risultati corretti, ma quasi nessuno ha trattato appropriatamente i resti nello sviluppo usato per il punto c); alcuni hanno completamente trascurato i resti in tutti e tre i punti.

- Seconda parte, esercizio 1. Diversi dei presenti hanno fatto errori nella sostituzione usata per passare dallo sviluppo di $\log(1 + t)$ a quello di $\log(1 - x^2)$ o delle altre funzioni presenti nelle varie versioni di questo esercizio.

- Seconda parte, esercizio 2. Per rispondere alla domanda a) è necessario confrontare un certo numero (-3 o -5 a seconda dei gruppi) con un altro, dato da un'espressione più complicata ($5(1 - \log 5)$ o $6(1 - \log 6)$ a seconda dei gruppi); per farlo è necessario usare la calcolatrice.

- Seconda parte, esercizio 2. Per rispondere al punto a) diverse persone hanno usato un disegno approssimativo dei grafici delle funzioni x^3 e $15\log x - 3$ (mi riferisco al gruppo 1, ma vale un discorso analogo per gli altri gruppi) per sostenere a seconda dei casi che questi grafici non si intersecano oppure che si intersecano. In realtà i due grafici sono molto vicini, e quindi non è possibile usare un disegno approssimativo per decidere se si intersecano o meno.

- Seconda parte, esercizio 2. Nel rispondere al punto b) diversi dei presenti hanno cercato il valore del parametro a per il quale i grafici della funzione x^3 e della funzione $15\log x + a$ (mi riferisco al gruppo 1) sono tangenti in un punto, impostando però il problema in modo "strano", cioè imponendo solamente che in tal punto i valori delle derivate delle due funzioni coincidano (bisognerebbe anche imporre che i valori delle funzioni coincidano).

- Seconda parte, esercizio 2. Per errore la versione del gruppo 4 di questo esercizio che è stata stampata e distribuita in classe non era quella definitiva, e in particolare la disuguaglianza da discutere al punto a) era $x^4 \geq 24\log x + 5$ invece di $x^4 \geq 24\log x - 5$, come riportato qui.

- Seconda parte, esercizio 3. Per rispondere alla domanda c) è necessario confrontare il valore assoluto della funzione F nei punti di minimo e di massimo; per farlo è necessario usare la calcolatrice.

Prima parte.

1. a) $(2x - x^2)\exp(1-x)$; b) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-1/2}$.

2. a) 2; b) 0; c) 0.

3. Uso il cambio di variabile $y = x^4$: $\displaystyle\int \frac{x^3}{\exp(x^4)}\,dx = \frac{1}{4}\int e^{-y}\,dy = -\frac{1}{4}e^{-y}+c = -\frac{1}{4}\exp(-x^4)+c.$

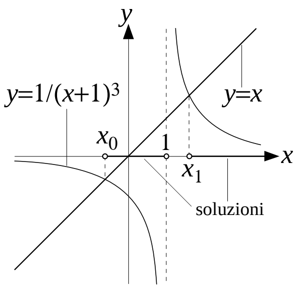
4. Integro per parti: $\displaystyle\int_0^1 3x^2\log x\,dx = \Big|x^3\log x\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3\frac{1}{x}\,dx = -\frac{1}{3}.$

5. Siccome $x\sin(1/x^a) \sim 1/x^{a-1}$ per $x \to +\infty$, deve essere $a-1>1$, ovvero $a>2$.

6. Siccome $\log(1+n^{-a}) \sim 1/n^a$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 1$.

7. Equazione a variabili separabili: $e^{-x}\dot{x} = \sin t$, cioè $\int e^{-x}dx = \int \sin t\,dt$, cioè $e^{-x} = \cos t + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale si ottiene $c = 2$ e quindi $x = -\log(\cos t + 2)$.

8. Le soluzioni sono $x \in [x_0, 0]$ dove x_0 è dato nella figura accanto.



Seconda parte.

1. a) La (*) è un'equazione differenziale del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti, non omogenea. L'equazione omogenea associata è $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$, e l'equazione caratteristica di quest'ultima, vale a dire $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, ha due soluzioni coincidenti $\lambda = 2$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) := e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Siccome il termine noto $8t$ è un polinomio di primo grado, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea (*) tra i polinomi di primo grado, vale a dire una soluzione della forma $x(t) = a_0 + a_1 t$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Per le funzioni di questo tipo l'equazione (*) si riduce a
$$(4a_1 - 8)t + (4a_0 - 4a_1) = 0$$
ed è verificata se $4a_1 - 8 = 0$ e $4a_0 - 4a_1 = 0$, cioè per $a_0 = a_1 = 2$. Dunque la soluzione particolare cercata è $x(t) = 2 + 2t$, e di conseguenza la soluzione generale della (*) è
$$x(t) := 2 + 2t + e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
b) Dalla formula (1) si ottiene che $\dot{x}(t) = 2 + e^{2t}(2c_1 + c_2 + 2c_2 t)$ e quindi le condizioni iniziali diventano
$$\begin{cases} 0 = x(0) = 2 + c_1 \\ 0 = \dot{x}(0) = 2 + 2c_1 + c_2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 2 \end{cases}$$
e dunque la soluzione cercata è
$$x(t) := 2 + 2t + e^{2t}(2t - 2)\,.$$
c) Dalla formula (1) è evidente che quando c_2 è diverso da 0 la soluzione soddisfa $x(t) \sim c_2 t e^{2t}$ e dunque non è $O(e^{2t})$ (e anzi $e^{2t} \ll x(t)$). Se invece $c_2 = 0$ allora $x(t)$ è somma di addendi che sono tutti $O(e^{2t})$ e quindi è essa stessa $O(e^{2t})$. In altre parole le soluzioni cercate sono tutte e solo quelle con $c_2 = 0$, vale a dire
$$x(t) := 2 + 2t + c_1 e^{2t} \quad \text{con } c_1 \in \mathbb{R}.$$

2. Siccome $n\sin(1/n)$ converge a 1 per $n \to +\infty$, per $a \neq 1$ si ha che il termine generico della serie soddisfa
$$\frac{a - n\sin(1/n)}{n^a} \sim \frac{a-1}{n^a} \quad \text{per } n \to +\infty,$$
e quindi la serie converge se e solo se $a > 1$.

Per $a = 1$ il discorso cambia: in questo caso il numeratore $1 - n\sin(1/n)$ tende a 0 per $n \to +\infty$ e dobbiamo quindi cercarne la parte principale: usando il fatto che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ per $x \to 0$ e ponendo $x = 1/n$ otteniamo

$$1 - n\sin(1/n) = 1 - n\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + O\Big(\frac{1}{n^5}\Big)\right] = \frac{1}{6n^2} + O\Big(\frac{1}{n^4}\Big) \sim \frac{1}{6n^2}\,.$$

Pertanto il termine generico della serie soddisfa

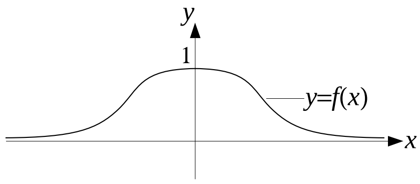
$$\frac{1 - n\sin(1/n)}{n} \sim \frac{1}{6n^3} \quad \text{per } n \to +\infty,$$

e quindi la serie converge. Riassumendo, la serie converge per $a \geq 1$.

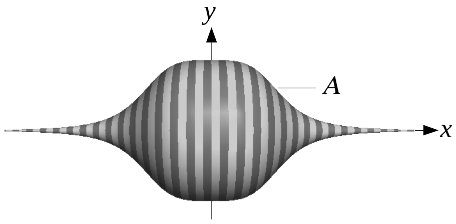
3. a) la funzione $f(x)$ è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, pari, positiva, e tende a 0 per $x \to \pm\infty$. Studiando il segno della derivata prima

$$f'(x) = \big[(1 + x^4)^{-a}\big]' = -a(1 + x^4)^{-a-1}4x^3$$

si ottiene che la funzione cresce per $x \leq 0$ e descresce per $x \geq 0$. Sulla base di quanto appena detto disegniamo il grafico di f.



b) Partendo dal grafico di $f(x)$ disegnato sopra disegniamo la figura solida A:

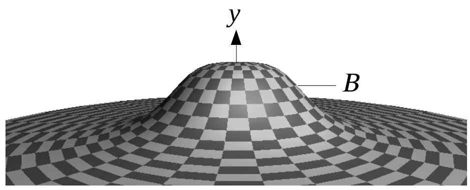


La formula per il volume dei solidi di rotazione dà

$$\begin{aligned}\text{volume}(A) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \pi\big[f(x)\big]^2\,dx \\ &= \pi\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^4)^{2a}}\,dx = 2\pi\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + x^4)^{2a}}\,dx\,,\end{aligned}$$

e siccome la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $1/x^{8a}$ per $x \to +\infty$, questo integrale improprio ha valore finito se e solo se $8a > 1$, ovvero $a > 1/8$.

c) Siccome la funzione $f(x)$ è pari, otteniamo B facendo ruotare attorno all'asse delle y il grafico della funzione $f(x)$ ristretta alla semiretta $x \geq 0$:



Per poter applicare la formula per il volume dei solidi di rotazione dobbiamo esplicitare x come funzione di y (ovvero calcolare l'inversa della restrizione di $f(x)$ alla semiretta $x \geq 0$): partendo dall'equazione

$$y = (1 + x^2)^{-a}$$

con $x \geq 0$ otteniamo

$$x = (y^{-1/a} - 1)^{1/4}$$

con $0 < y \leq 1$. Pertanto

$$\text{volume}(B) = \int_0^1 \pi(y^{-1/a} - 1)^{1/2}\, dy\,,$$

e siccome la funzione integranda è asintoticamente equivalente a $y^{-1/(2a)}$ per $y \to 0^+$, questo integrale improprio ha valore finito se e solo se $1/(2a) < 1$, ovvero $a > 1/2$.

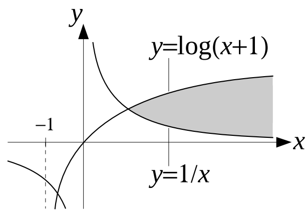
Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Tra i presenti sembra esserci stata un po' di confusione sul significato dell'espressione $x(t) = O(e^{2t})$ per $t \to +\infty$. Inoltre alcuni hanno riferito la domanda alla soluzione trovata al punto b).

- Seconda parte, esercizio 2. Molti dei presenti non si sono accorti che il caso $a = 1$ va trattato a parte perché il numeratore del termine generico della serie tende a zero per $n \to +\infty$, e anzi hanno scritto che questo termine è asintoticamente equivalente a $0/n$, cosa che non ha senso.

Prima parte.

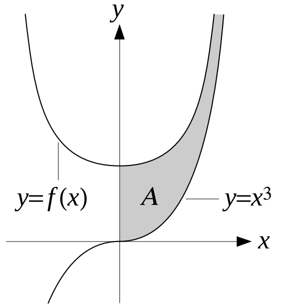
1. Deve essere $x > 2$ oppure $-2 < x < 1$.
2. Il valore massimo è $\log 5$ e quello minimo 0 (presi rispettivamente per $x = 0$ e $x = 2$).
3. a) 0; b) 0; c) 2.
4. $-\dfrac{x^2}{2}$.
5. $\dfrac{\log 3}{2}$.
6. $a = 4$.
7. $x(t) = e^t(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
8. L'insieme cercato è quello disegnato in grigio nella figura accanto.



Seconda parte.

1. Rispondiamo direttamente alla domanda b). La disequazione $x^4 + a \geq 4x^3$ può essere riscritta come $x^4 - 4x^3 + a \geq 0$, ed è quindi verifica per ogni $x \in \mathbb{R}$ quando il valore minimo della funzione
$$f(x) := x^4 - 4x^3 + a$$
è positivo o nullo.
   La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e studiando il segno della derivata
$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$
si ottiene che f decresce per $x \leq 3$ e cresce per $x \geq 3$. Pertanto 3 è il punto di minimo assoluto di f; da questo segue che il valore minimo di f è
$$\min f = f(3) = -27 + a\,,$$
e pertanto la disequazione è soddisfatta se
$$a \geq 27\,.$$
In particolare la risposta alla domanda a) è affermativa.

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed è pari e positiva. Inoltre il limite di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$ è $+\infty$, e dallo studio del segno della derivata
$$f'(x) = \frac{3x^5}{\sqrt{x^6+1}}$$
si ottiene che $f(x)$ decresce per $x \leq 0$ e cresce per $x \geq 0$. Studiando inoltre il segno della derivata seconda si ottiene che f è convessa.
   Sulla base di queste informazioni si traccia il grafico nella figura sotto.



b) Siccome $f(x) \geq x^3$ per ogni x, l'insieme A è quello disegnato nella figura sopra.

c) L'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_0^{+\infty} f(x) - x^3 \, dx \,. \tag{1}$$

Dobbiamo dunque capire se questo integrale improprio è finito o infinito. Siccome l'integrale è improprio solo a $+\infty$, si tratta di trovare la parte principale di $f(x) - x^3$ per $x \to +\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) - x^3 = \sqrt{x^6+1} - x^3 &= x^3 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^6}} - 1 \right] \\ &= x^3 \left[1 + \frac{1}{2x^6} + O\Big(\frac{1}{x^{12}}\Big) - 1 \right] \sim \frac{1}{2x^3} \,, \end{aligned} \tag{2}$$

dove la terza uguaglianza la abbiamo ottenuta usando lo sviluppo di Taylor

$$\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2} = 1 + \frac{t}{2} + O(t^2) \quad \text{per } t \to 0.$$

Usando la stima (2), il principio del confronto asintotico, e il fatto che l'integrale di $1/x^3$ tra 1 e $+\infty$ è finito, otteniamo infine che l'integrale improprio in (1) è finito.

3. Rispondiamo direttamente alla domanda b). Volendo scrivere il termine generico della serie $a_n := (\log n)^{-(\log n)^a}$ nella forma n^{b_n}, l'esponente b_n deve essere il logaritmo di a_n in base n, ovvero

$$\begin{aligned} b_n = \frac{\log a_n}{\log n} &= \frac{\log\big((\log n)^{-(\log n)^a}\big)}{\log n} \\ &= \frac{-(\log n)^a \log\log n}{\log n} = -(\log n)^{a-1} \log\log n \,. \end{aligned}$$

Studiamo ora il limite di b_n quando $n \to +\infty$, in modo da poter applicare il principio del confronto con la serie di tipo $\sum 1/n^c$. Usando il fatto che $\log\log n = o(\log n)$ per $n \to +\infty$ otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a < 1, \\ -\infty & \text{se } a \geq 1. \end{cases}$$

Pertanto, se $a < 1$, l'esponente b_n soddisfa $b_n \geq -1$ "da un certo punto in poi" (cioè per tutti gli indici n più grandi di un certo n_0) e quindi

$$a_n = n^{b_n} \geq \frac{1}{n} \,;$$

siccome la serie $\sum 1/n$ diverge a $+\infty$, per il principio del confronto lo stesso vale per $\sum a_n$.

Viceversa, quando $a \geq 1$ abbiamo che l'esponente b_n soddisfa $b_n \leq -2$ da un certo punto in poi, e quindi

$$a_n = n^{b_n} \leq \frac{1}{n^2} \,;$$

siccome la serie $\sum 1/n^2$ converge a un numero finito, lo stesso vale per $\sum a_n$.

Riassumendo, la serie di partenza converge ad un numero finito se e solo se $a \geq 1$.

Commenti

- Seconda parte esercizio 1. Diversi dei presenti hanno detto che "si vede" dal disegno dei grafici delle funzioni $x^4 + 28$ e $4x^3$ che la disequazione al punto a) è sempre soddisfatta. Questa risposta non è accettabile, visto che mettendo 26 al posto di 28 la disuguaglianza non è sempre soddisfata, e non credo che sia possibile vedere una differenza tra 26 e 28 in un disegno fatto a mano libera.

- Seconda parte esercizio 1. Nel rispondere al punto b) alcuni dei presenti hanno trovato i punti in cui si annulla la derivata della funzione $x^4 - x^3$, vale a dire 0 e 3, ed hanno deciso sulla base del valore della funzione in questi punti che il secondo è un punto di minimo assoluto. Questo ragionamento non è corretto, perché non è detto a priori che il punto di minimo assoluto esista (in particolare 3 avrebbe potuto essere un punto di minimo locale).

Prima parte, gruppo 1

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$.

2. a) $(2x - x^2)e^{-x}$; b) $\left[\log\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)\right]' = \left[\log(x^2+1) - \log(x^2-1)\right]' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$.

3. a) 1; b) $+\infty$; c) -2.

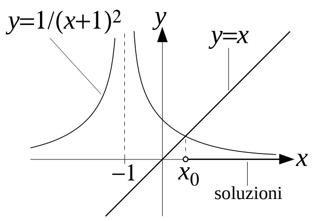
4. Integriamo per parti (derivando il fattore x e integrando e^{2x}):
$$\int xe^{2x}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \Big(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\Big)e^{2x} + c\,.$$

5. L'integrale converge per tutti i numeri reali $a > 0$. Infatti si ha $x^{a+2} \ll e^x$ per $x \to +\infty$ e quindi $x^a/e^x \ll x^a/x^{a+2} = 1/x^2$, e questa funzione ha integrale finito.

6. Siccome $n^a/(1+n^{3a}) \sim 1/n^{2a}$ per $n \to +\infty$, per il principio del confronto asintotico la serie converge se e solo se $2a > 1$, ovvero $a > 1/2$.

7. Equazione a variabili separabili: $2x\dot{x} = e^t$, quindi $\int 2x\,dx = \int e^t dt$, e pertanto $x^2 = e^t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta per $c = 3$, e dunque $x(t) = \sqrt{e^t + 3}$.

8. Le soluzioni sono $x \geq x_0$ dove x_0 è preso come nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 2

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

2. a) $(3x^2 + 2x^3)e^{2x}$; b) $\left[\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\right]' = \left[\log(x^2-1) - \log(x^2+1)\right]' = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} = \frac{4x}{x^4-1}$.

3. a) 0; b) $-\frac{1}{2}$; c) 1.

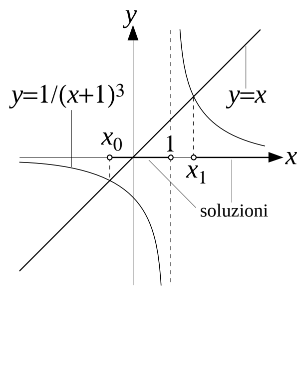
4. Integriamo per parti (derivando il fattore $\log(2x)$ e integrando x^3):
$$\int x^3 \log(2x)\,dx = \frac{x^4}{4}\log(2x) - \int \frac{x^4}{4}\frac{2}{2x}\,dx = \frac{x^4}{4}\log(2x) - \frac{x^4}{16} + c\,.$$

5. Siccome $\frac{\sin(x^a)}{x^{3a}} \sim \frac{1}{x^{2a}}$ per $x \to 0$, deve essere $2a < 1$, ovvero $a < 1/2$.

6. La serie converge per ogni $a > 0$. Infatti $\log n = o(n^{1/(2a)})$ per $n \to +\infty$, quindi $(\log n)^a/n^2 = o(n^{1/2-2}) = o(n^{-3/2})$, ed è noto che la serie $\sum n^{-3/2}$ converge.

7. Equazione a variabili separabili: $3x^2\dot{x} = e^t$, quindi $\int 3x^2\,dx = \int e^t dt$, e pertanto $x^3 = e^t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta se $c = 7$, e dunque $x(t) = \sqrt[3]{e^t + 7}$.

8. Le soluzioni sono $x_0 \leq x < 1$ e $x \geq x_1$ dove x_0 e x_1 sono presi come nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 3

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$.

2. a) $(1-2x)e^{-2x}$; b) $\Big[\log\Big(\dfrac{x^3+1}{x^3-1}\Big)\Big]' = \big[\log(x^3+1)-\log(x^3-1)\big]' = \dfrac{3x^2}{x^3+1}-\dfrac{3x^2}{x^3-1} = \dfrac{-6x^2}{x^6-1}$.

3. a) $\dfrac{1}{3}$; b) 1; c) 0.

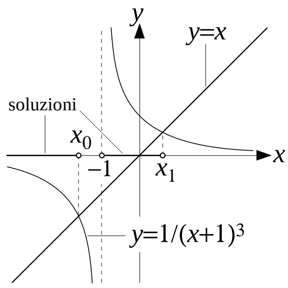
4. Integriamo per parti (derivando $\log(3x)$ e integrando x^2):
$$\int x^2\log(3x)\,dx = \frac{x^3}{3}\log(3x) - \int \frac{x^3}{3}\frac{3}{3x}\,dx = \frac{x^3}{3}\log(3x) - \frac{x^3}{9} + c\,.$$

5. Siccome $x^a\sin\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big) \sim \dfrac{1}{x^{2-a}}$ per $x\to+\infty$, deve essere $2-a>1$, ovvero $a<1$.

6. Tutti gli $a>0$ (analogo all'esercizio 5 del gruppo 1).

7. Equazione a variabili separabili: $2x\dot x = \cos t$, quindi $\int 2x\,dx = \int\cos t\,dt$, e pertanto $x^2 = \sin t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta se $c=4$, e dunque $x(t)=\sqrt{\sin t+4}$.

8. Le soluzioni sono $x\le x_0$ e $-1<x\le x_1$ e dove x_0 e x_1 sono presi come nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 4

1. Le soluzioni sono i numeri x in $\Big[0,\dfrac{2\pi}{3}\Big]\cup\Big[\dfrac{4\pi}{3},2\pi\Big]$.

2. a) $(3x^2-x^3)e^{-x}$; b) $\Big[\log\Big(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\Big)\Big]' = \big[\log(x^3-1)-\log(x^3+1)\big]' = \dfrac{3x^2}{x^3-1}-\dfrac{3x^2}{x^3+1} = \dfrac{6x^2}{x^6-1}$.

3. a) 0; b) $+\infty$; c) $+\infty$.

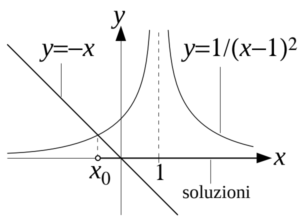
4. Integriamo per parti (derivando x e integrando e^{-x}):
$$\int xe^{-x}\,dx = x(-e^{-x}) - \int(-e^{-x})\,dx = -(x+1)e^{-x} + c\,.$$

5. Tutti gli $a>0$ (analogo all'esercizio 6 del gruppo 2).

6. Siccome $n^a\sin\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big) \sim \dfrac{1}{n^{3-a}}$ per $n\to+\infty$, deve essere $3-a>1$, ovvero $a<2$.

7. Equazione a variabili separabili: $3x^2\dot x = \cos t$, quindi $\int 3x^2\,dx = \int\cos t\,dt$, e pertanto $x^3 = \sin t + c$. La condizione iniziale è soddisfatta se $c=8$, e dunque $x(t)=\sqrt[3]{\sin t+8}$.

8. Le soluzioni sono $x\le x_0$ dove x_0 è preso come nella figura accanto.



Seconda parte, gruppo 1

1. a) Per $a=5$ l'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot x+4\dot x+5x=0$; l'equazione caratteristica corrispondente è allora $\lambda^2+4\lambda+5=0$ ed ha come soluzioni $\lambda_{1,2}=-2\pm i$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\rm om}(t) = e^{-2t}(c_1\cos t + c_2\sin t) \quad \text{con } c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$
Siccome il termine noto della (*) è un multiplo dell'esponenziale e^{-2t} e questa funzione non è una soluzione dell'equazione omogenea, possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde x = ce^{-2t}$. Sostituendo questa espressione nella (*) otteniamo $ce^{-2t}=2e^{-2t}$, e questa

identità vale per ogni t se $c = 2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è $\tilde{x}(t) = 2e^{-2t}$, e la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è $\lambda^2 + 4\lambda + a = 0$ ed ha come soluzioni

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - a}\,.$$

Dobbiamo dunque considerare diversi casi:

(i) Se $a > 4$ allora $\lambda_{1,2}$ sono numeri complessi della forma $-2 \pm \omega i$, e quindi la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t))\,,$$

e in particolare soddisfa $x_{\text{om}}(t) = O(e^{-2t}) = o(e^{-t})$ per qualunque scelta di c_1 e c_2. Inoltre possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-2t}$, che dunque soddisfa $\tilde{x}(t) = o(e^{-t})$. Pertanto ogni soluzione della (*), essendo della forma $x = x_{\text{om}} + \tilde{x}$, soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$.

(ii) Se $a = 4$ allora $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, e la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (*) è

$$x_{\text{om}}(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)\,,$$

e in particolare si ha che $x_{\text{om}}(t) = o(e^{-t})$ (ricordo che $t = o(e^t)$). Inoltre possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = ct^2 e^{-2t}$, e quindi $\tilde{x}(t) = o(e^{-t})$ perché $t^2 = o(e^t)$. Pertanto anche in questo caso ogni soluzione della (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$.

(iii) Se $a < 4$ allora λ_1 e λ_2 sono numeri reali diversi da -2 e quindi possiamo trovare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = ce^{-2t} = o(e^{-t})$. Pertanto le soluzioni della (*) soddisfano $x(t) = o(e^{-t})$ se e solo se $x_{\text{om}}(t) = o(e^{-t})$, e siccome

$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\,,$$

questo succede se e solo se $\lambda_1, \lambda_2 < -1$, cioè $-2 + \sqrt{4 - a} < -1$, cioè $a > 3$.

Mettendo insieme quanto detto sopra otteniamo che gli a cercati sono quelli tali che $a > 3$.

2. a) Cerchiamo la parte principale della funzione integranda

$$f(x) := \frac{3x^3 - \log(1 + 3x^3)}{x^{2a}}$$

per $x \to 0$: usando lo sviluppo di Taylor $\log(1 + t) = t - \frac{1}{2}t^2 + O(t^3)$ (per $t \to 0$) otteniamo

$$f(x) = \frac{3x^3 - \left[3x^3 - \frac{1}{2}(3x^3)^2 + O((3x^3)^3)\right]}{x^{2a}} = \frac{\frac{9}{2}x^6 + O(x^9)}{x^{2a}} \sim \frac{9}{2}x^{6-2a}\,.$$

Pertanto la funzione $f(x)$ ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $6 - 2a \geq 0$, vale a dire $a \leq 3$.

b) La funzione integranda $f(x)$ è continua sulla semiretta $(0, +\infty)$ ma non è definita in 0. Quindi spezziamo l'integrale improprio come somma di due integrali impropri semplici: $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Siccome $f(x) \sim \frac{9}{2}x^{6-2a}$ per $x \to 0$, per il principio del confronto asintotico il primo di questi due integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $6 - 2a > -1$, cioè $a < 7/2$. D'altra parte quando $t \to +\infty$ si ha $\log(1 + t) \sim \log t = o(t)$ e quindi

$$f(x) = \frac{3x^3 - o(3x^3)}{x^{2a}} \sim 3x^{3-2a} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

e quindi, sempre per il principio del confronto asintotico, il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $3 - 2a < -1$, cioè $a > 2$.

Dunque l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $2 < a < 7/2$.

3. a) Ci basta far vedere che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Un semplice calcolo mostra che

$$f''(x) = 6(5x^2 + a)(x^2 + a)$$

e siccome $a > 0$ ciascuno dei fattori alla destra dell'uguale è una funzione sempre positiva, e lo stesso vale quindi per f''.
b) La retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$ interseca il grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 se $\frac{27}{4}x_0 = f(x_0)$, ed è tangente al grafico di f se il suo coefficiente angolare coincide con la derivata di f in x_0, vale a dire se $\frac{27}{4} = f'(x_0)$. Quindi i valori cercati di a e di x_0 sono quelli che risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{27}{4}x_0 = (x_0^2 + a)^3 \\ \frac{27}{4} = 6x_0(x_0^2 + a)^2 \end{cases},$$

quindi, ricavando $x_0^2 + a$ dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda

$$\begin{cases} x_0^2 + a = \big(\frac{27}{4}x_0\big)^{1/3} \\ \frac{27}{4} = 6x_0\big(\frac{27}{4}x_0\big)^{2/3} \end{cases},$$

e ricavando x_0 dalla seconda equazione e poi a dalla prima

$$\begin{cases} a = \big(\frac{27}{4}x_0\big)^{1/3} - x_0^2 = \frac{5}{4} \\ x_0 = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

c) Se $a = 5/4$ ed il grafico di f è tangente alla retta di equazione $y = \frac{27}{4}x$, e siccome f è convessa, questo grafico si trova al di sopra della retta, ovvero

$$\Big(x^2 + \frac{5}{4}\Big)^3 \geq \frac{27}{4}x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Ma allora per ogni $a \geq 5/4$ si ha che

$$f(x) := (x^2 + a)^3 \geq \Big(x^2 + \frac{5}{4}\Big)^3 \geq \frac{27}{4}x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Viceversa se $a < 5/4$ allora la disuguaglianza $f(x) \geq \frac{27}{4}x$ non vale per ogni x, ed in particolare non vale per $x = 1/2$.

In conclusione, i valori di a cercati sono $a \geq 5/4$.

Seconda parte, gruppo 2

1. a) In questo caso la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è
$$x_{\rm om}(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x} = ce^{-3t}$, otteniamo che c deve essere -1, cioè $\tilde{x}(t) = -e^{-3t}$; pertanto la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t - 1) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
b) L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è $\lambda^2 + 6\lambda + a = 0$ ed ha come soluzioni
$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - a}\,.$$
Procedendo come per il gruppo 1 si vede che quando queste soluzioni sono complesse oppure reali e coincidenti allora la soluzione della (*) soddisfa $x(t) = o(e^{-t})$. Invece quando queste soluzioni sono reali e distinte (cioè per $a < 9$) allora si ha che $x(t) = o(e^{-t})$ se e solo se $\lambda_1, \lambda_2 < -1$, cioè $-2 + \sqrt{4 - a} < -1$, cioè $a > 5$. Riassumendo, gli a cercati sono quelli tali che $a > 5$.

2. a) La funzione integranda soddisfa
$$f(x) := \frac{4x^3 - \log(1 + 4x^3)}{x^a} \sim 8x^{6-a} \quad \text{per } x \to 0,$$
e quindi ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $6 - a \geq 0$, vale a dire $a \leq 6$.
b) Anche in questo caso spezziamo l'integrale improprio come somma dei due integrali impropri semplici $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Siccome $f(x) \sim 8x^{6-a}$ per $x \to 0$, il primo di questi due

integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $6-a > -1$, cioè $a < 7$. D'altra parte $f(x) \sim 4x^{3-a}$ per $x \to +\infty$, e quindi il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $3-a < -1$, cioè $a > 4$. Riassumendo, l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $4 < a < 7$.

3. a) Sostanzialmente uguale al gruppo 1.
   b) I valori cercati di a e di x_0 sono quelli che risolvono il sistema
   $$\begin{cases} \frac{27}{2}x_0 = f(x_0) = (4x_0^2 + a)^3 \\ \frac{27}{2} = f'(x_0) = 24x_0(4x_0^2 + a)^2 \end{cases},$$
   cioè $x_0 = 1/4$ e $a = 5/4$.
   c) I valori di a cercati sono quelli per cui $a \geq 5/4$.

Seconda parte, gruppo 3

1. a) In questo caso la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è
   $$x_{\rm om}(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x} = ce^{-2t}$, otteniamo che c deve essere -1, cioè $\tilde{x}(t) = -e^{-2t}$; pertanto la soluzione generale della (*) è
   $$x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) - 1) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   b) Sostanzialmente uguale al gruppo 1: gli a cercati sono quelli tali che $a > 3$.

2. a) La funzione integranda soddisfa
   $$f(x) := \frac{2x^2 - \log(1 + 2x^2)}{x^a} \sim 2x^{4-a} \quad \text{per } x \to 0,$$
   e quindi ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $4 - a \geq 0$, vale a dire $a \leq 4$.
   b) Spezziamo l'integrale improprio di partenza come somma degli integrali impropri semplici $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Siccome $f(x) \sim 2x^{4-a}$ per $x \to 0$, il primo di questi due integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $4 - a > -1$, cioè $a < 5$. D'altra parte $f(x) \sim 2x^{2-a}$ per $x \to +\infty$, e quindi il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $2 - a < -1$, cioè $a > 3$. Riassumendo, l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $3 < a < 5$.

3. Uguale al gruppo 1.

Seconda parte, gruppo 4

1. a) In questo caso la soluzione generale dell'equazione omogenea associata alla (*) è
   $$x_{\rm om}(t) = e^{-3t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x} = ce^{-3t}$, otteniamo che c deve essere 1, cioè $\tilde{x}(t) = e^{-3t}$; pertanto la soluzione generale della (*) è
   $$x(t) = e^{-3t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) + 1) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   b) Sostanzialmente uguale al gruppo 2: gli a cercati sono quelli tali che $a > 5$.

2. a) La funzione integranda soddisfa
   $$f(x) := \frac{3x^2 - \log(1 + 3x^2)}{x^{2a}} \sim \frac{9}{2}x^{4-2a} \quad \text{per } x \to 0,$$
   e quindi ammette limite finito per $x \to 0^+$ se e solo se $4 - 2a \geq 0$, vale a dire $a \leq 2$.
   b) Spezziamo l'integrale improprio di partenza come somma degli integrali impropri semplici $\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Siccome $f(x) \sim \frac{9}{2}x^{4-2a}$ per $x \to 0$, il primo di questi due integrali impropri esiste ed è finito se e solo se $4 - 2a > -1$, cioè $a < 5/2$. D'altra parte $f(x) \sim 3x^{2-2a}$ per $x \to +\infty$, e quindi il secondo integrale improprio esiste ed è finito se e solo se $2 - 2a < -1$,

cioè $a > 3/2$. Riassumendo, l'integrale improprio di partenza esiste ed è finito se e solo se $3/2 < a < 5/2$.

3. Uguale al gruppo 2.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1a). Molti dei presenti hanno sostenuto che il termine noto dell'equazione (*) risolve l'equazione omogenea, mentre non è così: per esempio, nel caso del gruppo 1, il termine noto è $2e^{-2t}$, mentre la soluzione generale dell'equazione omogenea è $e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$; nonostante il fatto che in questa formula appaia l'espressione e^{-2t}, non è possibile scegliere le costanti c_1 e c_2 in modo da ottenere e^{-2t} (in ogni caso ci sarà anche un $\cos t$ o un $\sin t$).

- Seconda parte, esercizio 1b). Nel risolvere questo esercizio, diversi dei presenti hanno considerato solo uno dei tre casi discussi nella soluzione data sopra.

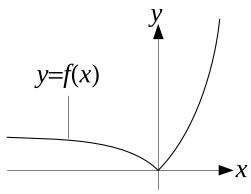
- Seconda parte, esercizio 2a). Stranamente diversi dei presenti, invece di dire per quali a la funzione integranda $f(x)$ ha limite finito per $x \to 0$, hanno determinato gli a per cui l'integrale improprio $\int_0^1 f(x)\,dx$ è finito.

- Seconda parte, esercizio 2b). Alcuni dei presenti hanno usato usato lo sviluppo $\log(1+x) = x - x^2/2 + O(x^3)$ anche per calcolare la parte principale di $f(x)$ per $x \to +\infty$, cosa che non è corretta.

- Seconda parte, esercizio 2b). Alcuni dei presenti hanno spezzato l'integrale improprio proposto come somma di due integrali scrivendo la funzione f come somma di due funzioni—per esempio, nel caso del gruppo 1,
$$\int_0^{+\infty} \frac{3x^3 - \log(1+3x^3)}{x^{2a}}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{3x^3}{x^{2a}}\,dx - \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+3x^3)}{x^{2a}}\,dx\,.$$
Così facendo, tuttavia, non si ottengono due integrali impropri semplici.

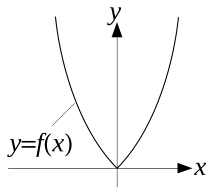
Prima parte, gruppo 1

1. Deve essere $4 - x^2 > 0$, ovvero $-2 < x < 2$.
2. a) $2x \sin(1 - x^2)$; b) $\left[4^{2x}/2^{3x}\right]' = (2^x)' = \log 2 \cdot 2^x$.
3. a) $-\infty$; b) 0; c) $\dfrac{1}{2}$.
4. $2x$.
5. Usando il cambio di variabile $y = 2x$ si ottiene
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{2}\Big|\arctan y\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}\,.$$
6. Siccome $\dfrac{\cos n - n^2}{1+n^a} \sim \dfrac{-1}{n^{a-2}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 3$.
7. Equazione lineare del primo ordine, che si risolve moltiplicando per il fattore integrante $e^{\sin t}$: $0 = e^{\sin t}(\dot{x} + x\cos t) = (e^{\sin t}x)'$ ovvero $x(t) = ce^{-\sin t}$ con $c \in \mathbb{R}$; imponendo che valga la condizione iniziale $x(0) = 2$ si ottiene $x(t) = 2e^{-\sin t}$.
8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 2

1. Deve essere $8 - x^3 > 0$, ovvero $x < 2$.
2. a) $2x \exp(1 + x^2)$; b) $\left[2^{6x}/4^{2x}\right]' = (2^{2x})' = (4^x)' = \log 4 \cdot 4^x$.
3. a) 0; b) $+\infty$; c) $+\infty$.
4. x.
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(3x)^2}\, dx = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{3}\Big|\arctan y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{3}$.
6. Siccome $\dfrac{n^3 + \sin n}{4 + n^{2a}} \sim \dfrac{1}{n^{2a-3}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 2$.
7. $x(t) = 4e^{-\sin t}$.
8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 3

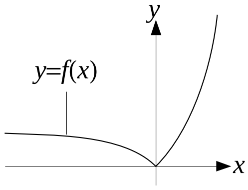
1. Deve essere $x^2 > 4$, ovvero $x > 2$ oppure $x < -2$.
2. a) $3x^2 \cos(x^3 - 1)$; b) $\left[3^{5x}/9^{2x}\right]' = (3^x)' = \log 3 \cdot 3^x$.
3. a) 3; b) $+\infty$; c) 0.
4. $-\dfrac{x^2}{4}$.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+(3x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{3}\Big|\arctan y\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{\pi}{6}.$

6. Siccome $\dfrac{n^2+\log n}{4+n^{2a}} \sim \dfrac{-1}{n^{2a-2}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 3/2$.

7. $x(t) = 4e^{\cos t - 1}$.

8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. Deve essere $x^3 - 8 > 0$, ovvero $x > 2$.

2. a) $2x\,\cos(x^2-1)$; b) $\big[9^{3x}/3^{4x}\big]' = (3^{2x})' = (9^x)' = \log 9 \cdot 9^x$.

3. a) $+\infty$; b) 0; c) $-\infty$.

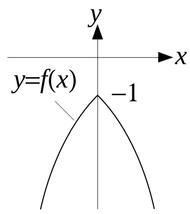
4. $-\dfrac{3}{x}$.

5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\Big|\arctan y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

6. Siccome $\dfrac{\log n - n^3}{1+n^a} \sim \dfrac{-1}{n^{a-3}}$ per $n \to +\infty$, deve essere $a > 4$.

7. $x(t) = 2e^{\cos t - 1}$.

8. Il grafico della funzione $f(x)$ è quello disegnato nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) Usando lo sviluppo $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + O(y^4)$ con $y = 4x$ otteniamo $\cos(4x) = 1 - 8x^2 + O(x^4)$; usando quindi lo sviluppo $(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}t + O(t^2)$ con $t = -8x^2 + O(x^4)$,
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x)} &= [1 - 8x^2 + O(x^4)]^{1/4}\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}t + O(t^2)\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}[-8x^2 + O(x^4)] + O(x^4) = 1 - 2x^2 + O(x^4)\,,\end{aligned}$$
e quindi la parte principale di $\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1$ è $-2x^2$.
b) Con gli sviluppi usati al punto precedente si ottiene solamente
$$\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1 + 2x^2 = O(x^4)\,.$$
Servono quindi sviluppi più precisi. Partendo da $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + O(y^6)$ otteniamo $\cos(4x) = 1 - 8x^2 + \frac{32}{3}x^4 + O(x^6)$; usando quindi lo sviluppo $(1+t)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}t - \frac{3}{32}t^2 + O(t^3)$ con
$$t = -8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6) = -8x^2 + O(x^4)$$
otteniamo
$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\cos(4x)} &= [1 - 8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6)]^{1/4}\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}t - \tfrac{3}{32}t^2 + O(t^3)\\ &= 1 + \tfrac{1}{4}\big[-8x^2 + \tfrac{32}{3}x^4 + O(x^6)\big] - \tfrac{3}{32}\big[-8x^2 + O(x^4)\big]^2 + O((-8x^2)^3)\\ &= 1 - 2x^2 + \tfrac{8}{3}x^4 - 6x^4 + O(x^6) = 1 - 2x^2 - \tfrac{10}{3}x^4 + O(x^6)\end{aligned}$$

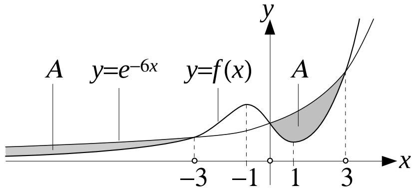
Pertanto

$$\sqrt[4]{\cos(4x)} - 1 + 2x^2 = -\frac{10}{3}x^4 + O(x^6) \sim -\frac{10}{3}x^4 \, .$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ ed è sempre positiva; il limite per $x \to +\infty$ è $+\infty$, mentre quello per $x \to -\infty$ è 0. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)\exp(x^3 - 3x)$$

si ottiene inoltre che f è crescente negli intervalli $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$ e decrescente in $[-1, 1]$. A partire da queste informazioni si ottiene il grafico di f disegnato nella figura sotto (si noti che in questa figura le scale non sono rispettate).



b) La disequazione $f(x) \le e^{6x}$ equivale a $x^3 - 3x \le 6x$, ovvero $x(x^2 - 9) \le 0$; studiando separatamente il segno dei fattori x e $x^2 - 9$ si ottiene che le soluzioni della disequazione sono $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$. Utilizzando questo fatto si ottiene il disegno di A nella figura sopra.

c) Per quanto visto al punto precedente, l'area di A è data da

$$\text{area}(A) = \int_{-\infty}^{-3} e^{6x} - f(x)\,dx + \int_0^3 e^{6x} - f(x)\,dx \, . \tag{1}$$

Osserviamo ora che il secondo integrale non è improprio, ed è quindi finito. Riguardo al primo integrale, invece, osserviamo che è improprio a $-\infty$, e che per $x \le -3$ si ha $0 \le f(x) \le e^{6x}$, e quindi

$$0 \le e^{6x} - f(x) \le e^{6x} \, ;$$

poiché l'integrale $\int_{-3}^{+\infty} e^{6x} dx$ è finito, per il principio del confronto anche il primo integrale in (1) è finito, e quindi l'area di A è finita.

3. a) L'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a è

$$y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$

e quindi interseca l'asse delle x nel punto di ascissa $a - f(a)/f'(a)$. Pertanto il triangolo T ha altezza $f(a)$ e base di lunghezza $-f(a)/f'(a)$ (si noti che questo numero è positivo perché $f(a)$ è positivo e $f'(a)$ è negativo). Pertanto

$$\text{area}(T) = -\frac{(f(a))^2}{2f'(a)} \, .$$

b) Vogliamo trovare le funzioni positive f definite su $(0, +\infty)$ per cui

$$-\frac{(f(a))^2}{2f'(a)} = 1$$

per ogni $a > 0$. Questo significa che la funzione f risolve l'equazione differenziale a variabili separabili

$$-\frac{f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{1}{2} \, .$$

Risolvendo questa equazione secondo la solita procedura si ottiene

$$\int \frac{1}{2}\,dx = \int -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}\,dx = \int -\frac{1}{f^2}\,df \quad \text{ovvero} \quad \frac{x}{2} + c = \frac{1}{f(x)} \, ,$$

e dunque

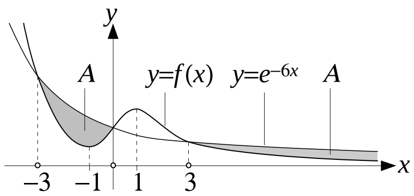
$$f(x) = \frac{2}{x + c} \quad \text{con } c \ge 0$$

(la condizione $c \ge 0$ segue dal fatto che f deve essere definita per ogni $x > 0$).

Seconda parte, gruppo 2

1. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\cos(6x)} &= [1-18\,x^2+54\,x^4+O(x^6)]^{1/3}\\ &= 1+\tfrac{1}{3}\big[-18\,x^2+54\,x^4+O(x^6)\big]-\tfrac{1}{9}\big[-18\,x^2+O(x^4)\big]^2+O((-18\,x^2)^3)\\ &= 1-6x^2+18\,x^4-36\,x^4+O(x^6)=1-6x^2-18\,x^4+O(x^6)\end{aligned}$$
Pertanto a) $\sqrt[3]{\cos(6x)}-1\sim -6x^2$; b) $\sqrt[3]{\cos(6x)}-1+6x^2\sim -18x^4$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo il grafico di f e l'insieme A disegnati nella figura sotto. Anche in questo caso l'area di A è finita.

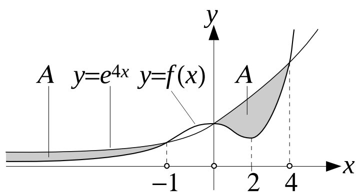


3. Uguale al gruppo 1, tranne per il fatto che le funzioni f cercate al punto b) risolvono l'equazione differenziale $-f'(x)/(f(x))^2=1$ e sono quindi date da
$$f(x)=\frac{1}{x+c}\quad \text{con } c\geq 0.$$

Seconda parte, gruppo 3

1. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(4x)} &= [1-8x^2+\tfrac{32}{3}x^4+O(x^6)]^{1/2}\\ &= 1+\tfrac{1}{2}\big[-8x^2+\tfrac{32}{3}x^4+O(x^6)\big]-\tfrac{1}{8}\big[-8x^2+O(x^4)\big]^2+O((-8x^2)^3)\\ &= 1-4x^2+\tfrac{16}{3}x^4-8x^4+O(x^6)=1-4x^2-\tfrac{8}{3}x^4+O(x^6)\end{aligned}$$
Pertanto a) $\sqrt{\cos(4x)}-1\sim -4x^2$; b) $\sqrt{\cos(4x)}-1+4x^2\sim -\frac{8}{3}x^4$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo il grafico di f e l'insieme A disegnati nella figura sotto. Anche in questo caso l'area di A è finita.



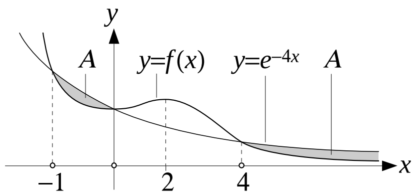
3. Uguale al gruppo 2.

Seconda parte, gruppo 4

1. Procedendo come per il gruppo 1 si ottiene
$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(2x)} &= [1-2x^2+\tfrac{2}{3}x^4+O(x^6)]^{1/2}\\ &= 1+\tfrac{1}{2}\big[-2x^2+\tfrac{2}{3}x^4+O(x^6)\big]-\tfrac{1}{8}\big[-2x^2+O(x^4)\big]^2+O((-2x^2)^3)\\ &= 1-x^2+\tfrac{1}{3}x^4-\tfrac{1}{2}x^4+O(x^6)=1-x^2-\tfrac{1}{6}x^4+O(x^6)\end{aligned}$$

Pertanto a) $\sqrt{\cos(2x)} - 1 \sim -x^2$; b) $\sqrt{\cos(2x)} - 1 + x^2 \sim -\frac{1}{6}x^4$.

2. Procedendo come per il gruppo 1 otteniamo il grafico di f e l'insieme A disegnati nella figura sotto. Anche in questo caso l'area di A è finita.



3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Prima parte, esercizio 4. Molti dei presenti hanno dato come risposta funzioni che non sono della forma ax^b, come invece deve essere per le parti principali.

- Prima parte, esercizio 5. Molti dei presenti, pur avendo capito come calcolare l'integrale, applicato in modo errato la formula di cambio di variabile.

- Seconda parte, esercizio 1. Quasi tutti i presenti hanno dato una soluzione sbagliata del punto b); tipicamente l'errore è consistito nell'usare lo sviluppo al quarto ordine di $\cos x$ (com'è giusto) ma solo lo sviluppo al primo ordine di $(1+x)^a$, o viceversa usare lo sviluppo al secondo ordine di $(1+x)^a$ ma solo lo sviluppo al secondo ordine di $\cos x$.

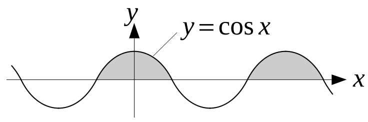
  In entrambi i casi l'errore sarebbe stato evidente sei si fosse tenuto conto dei resti (a questo proposito bisogna aggiungere che molti dei presenti hanno anche indicato alcuni resti, ma spesso in modo poco più che estemporaneo).

- Seconda parte, esercizio 2. Nel risolvere il punto b), molti dei presenti non hanno saputo usare le informazioni ottenute risolvendo la disequazione con il disegno per tracciare correttamente l'insieme A.

- Seconda parte, esercizio 2. Anche tra coloro che hanno disegnato correttamente l'insieme A sono stati pochi quelli che hanno dato una spiegazione corretta del fatto che l'area di A è finita. Inoltre alcune delle spiegazioni proposte sono grossolanamente errate (per esempio c'è chi ha sostenuto che l'integrale improprio di una funzione su una semiretta è finito quando la funzione tende a zero all'infinito).

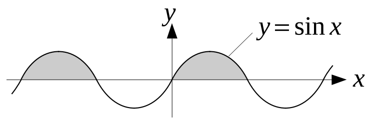
PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. $x > e$.
2. a) $+\infty$; b) 1; c) 0.
3. $-2x^3 - 2x^6$.
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int 4x\cos(x^2)\,dx = 2\int \cos y\,dy = 2\sin y + c = 2\sin(x^2) + c$.
5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^a - 2}{x^2+1} \sim x^{a-2}$, ed è dunque finito se e solo se $a < 1$.
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$.
7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = 2t(1+x^2)$ cioè $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 2t\,dt$, cioè $\arctan x = t^2 + c$, e infine $x = \tan(t^2 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

1. $x > \log\log 2$.
2. a) non esiste; b) 0; c) 2.
3. $1 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^8$.
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int 4x\,\exp(x^2)\,dx = 2\int \exp(y)\,dy = 2\exp(y) + c = 2\exp(x^2) + c$.
5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^a + 3}{x^3+1} \sim x^{a-3}$, ed è dunque finito se e solo se $a < 2$.
6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{1-1/3} = \frac{3}{2}$.
7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = 3t^2(1+x^2)$ cioè $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int 3t^2\,dt$, cioè $\arctan x = t^3 + c$, e infine $x = \tan(t^3 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.
8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3

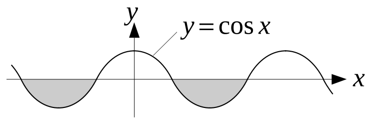
1. $x > e^e$.
2. a) $+\infty$; b) 1; c) 0.
3. $-2x^4 - 2x^8$.
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\,\cos(x^2)\,dx = \int_0^{\pi} \cos y\,dy = \Big|\sin y\Big|_0^{\pi} = 0$.

5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^2-1}{x^a+2} \sim x^{2-a}$, ed è dunque finito se e solo se $a > 3$.

6. Il termine generico della serie è asintoticamente equivalente a $1/n$ e quindi la somma è $+\infty$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -2te^x$ cioè $\int -e^{-x} dx = \int 2t\, dt$, cioè $e^{-x} = t^2 + c$, e infine $x = -\log(t^2 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 4

1. $x > \log\log 4$.

2. a) $+\infty$; b) $1/2$; c) 0.

3. $3x^2 - \frac{9}{2}x^6$.

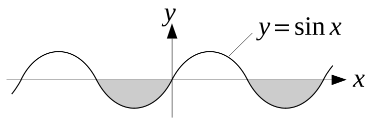
4. Ponendo $y = x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^2 2x \exp(x^2)\, dx = \int_0^4 e^y\, dy = \Big| e^y \Big|_0^4 = e^4 - 1$.

5. L'integrale è improprio all'infinito, dove $\dfrac{x^3+1}{x^a+3} \sim x^{3-a}$, ed è dunque finito se e solo se $a > 4$.

6. Il termine generico della serie tende a 1 e quindi la somma è $+\infty$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -3t^2e^x$ cioè $\int -e^{-x} dx = \int 3t^2\, dt$, cioè $e^{-x} = t^3 + c$, e infine $x = -\log(t^3 + c)$ con $c \in \mathbb{R}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. Rispondiamo direttamente alla domanda più generale, vale a dire c).

   L'equazione omogenea associata alla (*) è
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0\,,$$
   l'equazione caratteristica è quindi $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = -1, -3$. Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$x_{\rm om}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Risolviamo ora l'equazione non omogenea (*) cercandone una soluzione particolare; nel far questo dobbiamo considerare diversi casi.

   Primo caso: $a \neq -1, -3$. Cerchiamo una soluzione particolare della forma
$$\tilde{x}(t) = ce^{at}\,.$$
   Con questa sostituzione l'equazione (*) si riduce a $c(a^2 + 4a + 3)e^{at} = e^{at}$, ed è verificata per $c = 1/(a^2 + 4a + 3)$; pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{at}}{a^2 + 4a + 3}$$
   e la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} + \frac{e^{at}}{a^2 + 4a + 3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
   Secondo caso: $a = -1$. In questo caso la funzione ce^{-t} risolve l'equazione omogenea e quindi non può risolvere la non omogenea (e infatti nella formula per $\tilde{x}$ data sopra si annulla il

denominatore). Dobbiamo quindi cercare una soluzione particolare della (*) della forma

$$\tilde{x}(t) = cte^{-t}\,.$$

Imponendo questa sostituzione la (*) diventa $2ce^{-t} = e^{-t}$ ed è dunque verificata per $c = 1/2$. Pertanto la soluzione particolare cercata è

$$\tilde{x}(t) = \frac{t}{2}e^{-t}\,,$$

e la soluzione generale della (*) è

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} + \frac{t}{2}e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Terzo caso: $a = -3$. Analogo al caso $a = -1$; procedendo allo stesso modo si ottiene

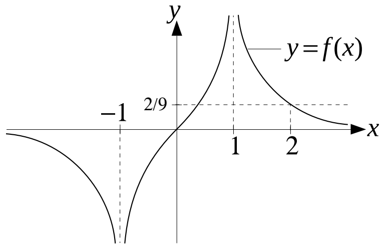
$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} - \frac{t}{2}e^{-3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. a) La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq \pm 1$, positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$ (si noti che il denominatore è sempre positivo). Osserviamo poi che $f(x)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, tende a $+\infty$ per $x \to 1$, e tende a $-\infty$ per $x \to -1$. Infine, studiando il segno della derivata

$$f'(x) = -\frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3}\,,$$

si ottiene che f è crescente per $-1 < x < 1$ e decrescente per $x < -1$ e per $x > 1$.

Usando queste informazioni tracciamo il disegno sottostante.



b) Siccome $f(2) = 2/9$, dal disegno sopra risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$ ha due soluzioni $x \le 2$ quando $a \ge 2/9$, e una sola quando $0 < a < 2/9$.

c) Dal disegno sopra risulta chiaro che $x(a)$ tende a $+\infty$ quando $a \to 0^+$. Siccome $f(x) \sim 1/x^3$ per $x \to +\infty$, quando a tende a 0^+ si ha che

$$a = f(x(a)) \sim 1/(x(a))^3\,,$$

e dunque

$$x(a) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\,.$$

3. Raccogliendo n^{2a} ed usando lo sviluppo di Taylor $(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$ con $x = 1/n^2$ otteniamo che il termine generico della serie soddisfa

$$\begin{aligned}(n^2 + 1)^a - n^{2a} &= n^{2a}\big[(1 + 1/n^2)^a - 1\big] \\ &= n^{2a}\big[1 + a/n^2 + o(1/n^2) - 1\big] \sim an^{2a-2}\end{aligned}$$

e dunque, per il principio del confronto asintotico, la serie converge se e solo se $2a - 2 < -1$, vale a dire

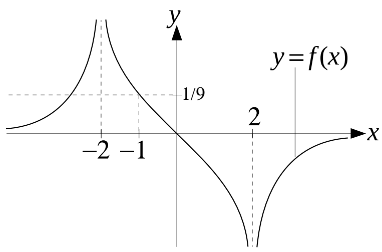
$$a < 1/2\,.$$

Volendo essere precisi osserviamo che l'uso dello sviluppo di Taylor $(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$ con $x = 1/n^2$ è legittimo perché $1/n^2$ tende a 0 per $n \to +\infty$, Osserviamo inoltre che questo sviluppo non ha senso per $a = 0$, ma in quel caso si vede subito che il termine generico della serie è esattamente zero, e quindi la serie converge.

Seconda parte, gruppo 2

1. Analogo al gruppo 1. Anche in questo caso rispondiamo direttamente alla domanda c).
L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata alla (*) è $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = 1, 3$; pertanto la soluzione dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Risolviamo l'equazione non omogenea (*) cercandone una soluzione particolare.
Primo caso: $a \neq 1, 3$. Cercando una soluzione particolare della forma $\tilde{x}(t) = ce^{at}$ otteniamo che c deve essere uguale a $1/(a^2 - 4a + 3)$; pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = \frac{e^{at}}{a^2 - 4a + 3}$$
e quindi la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{e^{at}}{a^2 - 4a + 3} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Secondo caso: $a = 1$. In questo caso dobbiamo cercare una soluzione particolare della (*) della forma $\tilde{x}(t) = cte^t$. Facendo i conti otteniamo che $c = -1/2$; pertanto la soluzione particolare cercata è
$$\tilde{x}(t) = -\frac{t}{2} e^{-t},$$
e la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} - \frac{t}{2} e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Terzo caso: $a = 3$. Analogo al caso $a = 1$:
$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{t}{2} e^{3t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Analogo al gruppo 1.
a) La funzione $f(x)$ è definita per $x \neq \pm 2$, positiva per $x < 0$ e negativa per $x > 0$; inoltre $f(x)$ tende a 0 per $x \to \pm\infty$, tende a $+\infty$ per $x \to -2$, e tende a $-\infty$ per $x \to +2$. Studiando il segno della derivata
$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4}{(x^2 - 2)^3},$$
si ottiene che f è decrescente per $-2 < x < 2$ e crescente per $x < -2$ e per $x > 2$.



b) Siccome $f(-1) = 1/9$, dal disegno risulta chiaro che l'equazione $f(x) = a$ ha una soluzione $x \geq -1$ quando $0 < a \leq 1/9$, nessuna quando $a > 1/9$.
c) Dal disegno sopra risulta chiaro che $x(a)$ tende a $-\infty$ quando $a \to 0^+$. Siccome $f(x) \sim -1/x^3$ per $x \to -\infty$, per $a \to 0^+$ si ha che $a \sim -1/(x(a))^3$ e dunque
$$x(a) \sim -\frac{1}{\sqrt[3]{a}}.$$

3. Analogo al gruppo 1. Il termine generico della serie soddisfa
$$\begin{aligned}(n^3 + 1)^a - n^{3a} &= n^{3a}\big[(1 + 1/n^3)^a - 1\big] \\ &= n^{3a}\big[1 + a/n^3 + o(1/n^3) - 1\big] \sim an^{3a-3}\end{aligned}$$
e dunque la serie converge se e solo se $3a - 3 < -1$, vale a dire
$$a < 2/3.$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1c). Al momento di trovare una soluzione particolare dell'equazione (*) della forma ce^{at}, diversi dei presenti hanno avuto problemi al momento di calcolare la costante c in funzione di a.

- Seconda parte, esercizio 1c). Diversi dei presenti hanno risolto l'equazione cercando una soluzione particolare della forma ce^{at} senza accorgersi che per certi valori di a bisognava invece cercare una soluzione della forma cte^{at} (questo pur avendo risolto correttamente il punto b)).

- Seconda parte, esercizio 1c). Diversi dei presenti hanno pensato di dover discutere a parte il caso $a = 0$. In realtà questo non è necessario (ma ovviamente non è neanche sbagliato) perché le equazioni differenziali non omogenee il cui termine noto è costante sono un caso particolare di quelle il cui termine noto è un esponenziale.

- Seconda parte, esercizio 2a). Nel calcolare la derivata di f molti dei presenti non hanno fatto le dovute semplificazioni, e di conseguenza hanno avuto grosse difficoltà con lo studio del segno.

- Seconda parte, esercizio 3. Alcuni hanno risolto l'esercizio presupponendo che l'esponente a sia intero, ed usando quindi la formula del binomio di Newton per sviluppare $(n^2+1)^a$ (mi riferisco al gruppo 1)). Questa soluzione, anche se non completa, è comunque apprezzabile.

Prima parte, gruppo 1

1. $-\dfrac{2\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$.

2. L'unico punto dell'intervallo in cui si annulla la derivata $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ è 1; inoltre $f(0) = 0$, $f(1) = -2$ e $f(3) = 18$. Pertanto il valore minimo è -2 e il massimo è 18.

3. $-3x$.

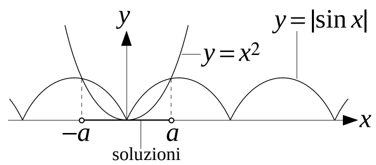
4. $1 + 3x^4$.

5. Ponendo $t = 1-2x$ si ottiene $\displaystyle\int 4\sin(1-2x)\,dx = -2\int \sin t\,dt = 2\cos t + c = 2\cos(1-2x) + c/$

6. Integrando per parti si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} xe^x\,dx = \Big|xe^x\Big|_{-\infty}^{1} - \int_{-\infty}^{1} e^x\,dx = e - \Big|e^x\Big|_{-\infty}^{1} = e - e = 0$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -x^2t^2$ cioè $-\int 1/x^2\,dx = \int t^2\,dt$ cioè $1/x = t^3/3 + c$, e imponendo la condizione $x(0) = 3$ si ottiene $c = 1/3$.
   Quindi $x = 3/(1+t^3)$.

8. La soluzione è $-a \le x \le a$ come nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 2

1. $0 \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$ e $\dfrac{4\pi}{3} \le x \le 2\pi$.

2. La derivata $f'(x) = 3(x^2 - 1)$ si annulla in -1; inoltre $f(-3) = -18$, $f(-1) = 2$ e $f(0) = 0$. Pertanto il valore minimo è -18 e il massimo è 2.

3. $2x^2$.

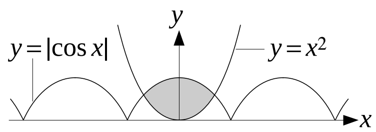
4. $1 + 2x^3$.

5. Integrando per parti si ottiene
$$\int 4x\,\cos(2x)\,dx = 2x\,\sin(2x) - \int 2\,\sin(2x)\,dx = 2x\,\sin(2x) + \cos(2x) + c\,.$$

6. Ponendo $t = 1-2x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-2x)^3} = \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\Big| -\frac{1}{2t^2}\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{1}{4}$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -2x^3t^3$ cioè $-\int 1/x^3\,dx = \int 2t^3\,dt$ cioè $1/(2x^2) = t^4/2 + c$, e imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = 1/2$.
   Quindi $x = 1/\sqrt{1+t^4}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 3

1. $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{5\pi}{3}$.

2. La derivata $f'(x) = 3(1 - x^2)$ si annulla in 1; inoltre $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ e $f(2) = -2$. Pertanto il valore minimo è -2 e il massimo è 2.

3. $-4x$.

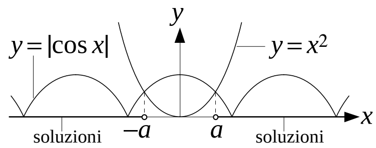
4. $1 - 3x^3$.

5. Ponendo $t = x^2 - 1$ si ottiene $\int 4x \cos(x^2 - 1)\, dx = 2 \int \cos t\, dt = 2 \sin t + c = 2 \sin(x^2 - 1) + c$.

6. Integrando per parti si ottiene $\int_0^1 x \log x\, dx = \Big|\frac{x^2}{2} \log x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{2}\, dx = -\Big|\frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -x^2 e^t$ cioè $-\int 1/x^2\, dx = \int e^t\, dt$ cioè $1/x = e^t + c$, e imponendo la condizione $x(0) = 2$ si ottiene $c = -1/2$.
Quindi $x = 1/(e^t - 1/2)$.

8. Le soluzioni sono $x \leq -a$ e $x \geq a$ come nella figura accanto.



Prima parte, gruppo 4

1. $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$.

2. La derivata $f'(x) = 3(1 - x^2)$ si annulla in -1; inoltre $f(-2) = 2$, $f(-1) = -2$ e $f(0) = 0$. Pertanto il valore minimo è -2 e il massimo è 2.

3. $-x^2$.

4. $1 - 2x^4$.

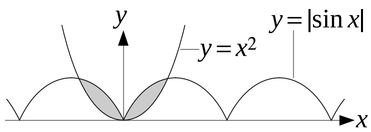
5. Ponendo $t = 2x - 1$ si ottiene

$$\int 4 \log(2x + 1)\, dx = 2 \int \log t\, dt = 2t(\log t - 1) + c = (4x + 2)(\log(2x + 1) - 1) + c\,.$$

6. Ponendo $t = 1 - x$ si ottiene $\int_{-3}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = \int_0^4 t^{-1/2} dt = \Big|2t^{1/2}\Big|_0^4 = 4$.

7. Equazione a variabili separabili: $\dot{x} = -x^3 e^t$ cioè $-\int 1/x^3\, dx = \int e^t\, dt$ cioè $1/(2x^2) = e^t + c$, e imponendo la condizione $x(0) = 1$ si ottiene $c = -1/2$.
Quindi $x = 1/\sqrt{2e^t - 1}$.

8. L'insieme cercato è quello in grigio nella figura accanto.



Seconda parte, gruppo 1

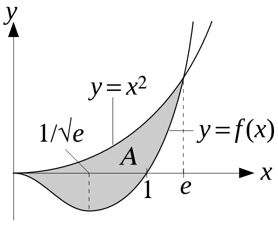
1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$, è negativa per $x < 1$ e positiva altrimenti, e infine tende a 0 per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata

$$f'(x) := x(2 \log x + 1)$$

si ottiene inoltre che che $f(x)$ è decrescente per $x < \varepsilon(-1/2) = 1/\sqrt{e}$ e crescente altrimenti. Inoltre $f'(x)$ tende a 0 per $x \to 0^+$, e questo significa che la retta tangente al grafico nell'origine è orizzontale. Studiando il segno della derivata seconda

$$f''(x) := 2 \log x + 3$$

si ottiene infine che la funzione è concava per $x \leq \exp(-3/2)$ e convessa altrimenti. Sulla base di queste informazioni tracciamo il grafico nella figura sotto (nel farlo non abbiamo rispettato le proporzioni reali).



b) La disequazione $f(x) \leq x^2$ è soddisfatta per $x \leq e$ e questo permette di disegnare l'insieme A come nella figura sopra. Inoltre

$$\begin{aligned}\text{area}(A) = \int_0^e x^2 - f(x)\,dx &= \int_0^e x^2(1-\log x)\,dx \\ &= \left|\frac{x^3}{3}(1-\log x)\right|_0^e + \int_0^e \frac{x^2}{3}\,dx = \left|\frac{x^3}{9}\right|_0^e = \frac{e^3}{9}\end{aligned}$$

(nel terzo passaggio abbiamo integrato per parti derivando il fattore $1 - \log x$).

2. a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine, che risolviamo moltiplicandola per il fattore integrante $\exp(A(t))$ dove $A(t)$ è una primitiva del coefficiente $a(t) := 2/t$, ovvero $\exp(A(t)) = \exp(2\log t) = t^2$. Così facendo otteniamo

$$(t^2x)' = t^2\dot{x} + 2tx = t^2\exp(t^3)\,,$$

dunque

$$t^2x = \int t^2\exp(t^3)\,dt = \frac{1}{3}\exp(t^3) + c$$

(la primitiva è stata calcolata usando la sostituzione $s = t^3$), e infine

$$x(t) = \frac{1}{3t^2}\big(\exp(t^3) + c\big) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

b) Usando lo sviluppo $e^x = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0$ nalla formula risolutiva data sopra si ottiene

$$x(t) = \frac{1}{3t^2}\big(1 + c + t^3 + o(t^3)\big) = \frac{1+c}{3t^2} + \frac{t}{3} + o(t)\,.$$

Dunque se $c \neq -1$ la parte principale di $x(t)$ per $t \to 0$ è $(1+c)/t^2$ e in particolare $x(t)$ tende a $\pm\infty$ per $t \to 0^\pm$. Invece se $c = -1$ la parte principale di $x(t)$ è $t/3$ e quindi $x(t)$ tende a 0. Pertanto la soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{1}{3t^2}\big(\exp(t^3) - 1\big)\,.$$

3. Il numero di pezzi prodotti in un tempo fissato T è vT, e di questi quelli difettosi sono circa pvT; pertanto il numero di pezzi "buoni" è

$$vT - pvT = (1-p)vT$$

e quindi

$$v_{\text{eff}} = \frac{(1-p)vT}{T} = (1-p)v = v - \frac{v^4}{10^3}\,.$$

Dobbiamo dunque cercare il valore massimo della funzione $f(v) := v - v^4/10^3$ nell'intervallo $1 \leq v \leq 10$. Studiando il segno della derivata $f'(v) = 1 - v^3/250$ otteniamo che f cresce per $v \leq \sqrt[3]{250} \simeq 6{,}30$ e decresce altrimenti. Pertanto la velocità ottimale è

$$v_{\text{opt}} := \sqrt[3]{250} \simeq 6{,}30\,.$$

Seconda parte, gruppo 2

1. a) La funzione $f(x)$ è definita per ogni $x > 0$, è negativa per $x < 1$ e positiva altrimenti, e infine tende a $-\infty$ per $x \to 0^+$ e a 0 per $x \to +\infty$. Studiando il segno della derivata

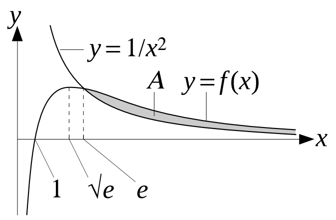
$$f'(x) := \frac{-2\log x + 1}{x^3}$$

si ottiene inoltre che $f(x)$ è crescente per $x < \exp(1/2) = \sqrt{e}$ e decrescente altrimenti. Studiando il segno della derivata seconda

$$f''(x) := \frac{6\log x - 5}{x^4}$$

si ottiene infine che la funzione è concava per $x \le \exp(5/6)$ e convessa altrimenti.

Sulla base di queste informazioni tracciamo il grafico nella figura sotto (nel farlo non abbiamo rispettato le proporzioni reali).



b) La disequazione $f(x) \ge 1/x^2$ è soddisfatta per $x \ge e$ e questo permette di disegnare l'insieme A come nella figura sopra. Inoltre

$$\begin{aligned}\text{area}(A) = \int_e^{+\infty} f(x) - \frac{1}{x^2}\,dx &= \int_e^{+\infty} \frac{\log x - 1}{x^2}\,dx \\ &= \left| -\frac{\log x - 1}{x}\right|_e^{+\infty} + \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left| -\frac{1}{x}\right|_e^{+\infty} = \frac{1}{e}\,.\end{aligned}$$

2. Analogo al gruppo 1. a) Moltiplicando l'equazione per il fattore integrante t^3 otteniamo $(t^3x)' = t^3\sin(t^4)$, quindi

$$t^3x = \int t^3\sin(t^4)\,dt = -\frac{1}{4}\cos(t^4) + c$$

e infine

$$x(t) = \frac{c - \cos(t^4)}{4t^3} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

b) La soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{1 - \cos(t^4)}{4t^3}\,.$$

3. Analogo al gruppo 1. La velocità effettiva della macchina è circa

$$v_{\text{eff}} = (1-p)v = v - \frac{v^5}{10^4}\,.$$

Studiando il segno della derivata di $v - v^5/10^4$ nell'intervallo $1 \le v \le 10$ otteniamo che la velocità ottimale è

$$v_{\text{opt}} := \sqrt[4]{2\cdot 10^3} \simeq 6{,}69\,.$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1a). Nello svolgimento di questo esercizio i presenti hanno fatto in massa alcuni gravi errori. Tra questi spicca l'aver detto che l'insieme di definizione della funzione è tutto $\mathbb{R}$ (o tutto $\mathbb{R}$ tranno lo zero), accompagnato talvolta dal calcolo dei limiti della funzione a $\pm\infty$ (ma non in 0, che invece è essenziale). Inoltre molti hanno tracciato un grafico che non è in accordo con quanto scritto, oppure che richiede informazioni (per esempio sul segno della derivata, o sul limite in 0) che non sono presenti nel testo.

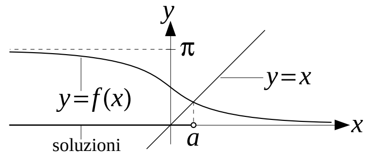
- Seconda parte, esercizio 1b). Il punto chiave qui è trovare l'intervallo di integrazione per l'integrale che serve a calcolare l'area, e questo lo si fa risolvendo una certa disequazione ($f(x) \le x^2$ nel caso del gruppo 1). Molti dei presenti non hanno neanche considerato il problema; altri hanno indicato gli estremi di integrazione corretti, senza spiegare come li hanno ottenuti. Infine in diversi hanno sbagliato il calcolo dell'integrale.

- Seconda parte, esercizio 2a). Diversi dei presenti hanno applicato in modo errato la formula risolutiva dell'equazione lineare del primo ordine, decidendo che la funzione $A(t)$ nel fattore integrante $\exp(A(t))$ era la primitiva di $1/t$ invece che $2/t$ o $3/t$ (a seconda dei gruppi). Molti altri hanno avuto problemi con la semplificazione $\exp(a \log t) = t^a$. Infine alcuni hanno deciso, contro ogni evidenza, che l'equazione in questione è a variabili separabili.

- Seconda parte, esercizio 3). Molti di quelli che hanno provato a risolvere questo esercizio hanno fraintesi il testo, intendendo con p il numero di pezzi difettosi (per secondo) invece che la frazione di pezzi difettosi, nonostante che questo punto fosse stato sottolineato da noi in aula.

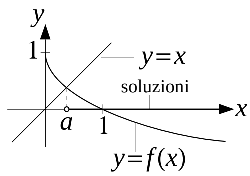
PRIMA PARTE, GRUPPO 1

1. Deve essere $x^2 - 1 > 0$ ovvero $x > 1$ oppure $x < -1$.
2. a) $\log x + 1$; b) $2e^{-x}(1 + e^{-x})^{-3} = 2e^{2x}(1 + e^x)^{-3}$.
3. a) $-\infty$; b) $-\infty$; c) $2/3$.
4. $-2x^2 + \dfrac{4}{3}x^6$.
5. Ponendo $y = -x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}$.
6. Per $n \to +\infty$ il termine generico della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{2a}$ e quindi la serie converge se e solo se $2a > 1$, ovvero $a > 1/2$.
7. $x(t) = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
8. La soluzione è $x \leq a$ dove a è dato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 2

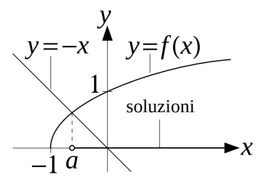
1. Deve essere $x^2 - 1 > 1$ ovvero $x > \sqrt{2}$ oppure $x < -\sqrt{2}$.
2. a) $2x\log x + x = x(2\log x + 1)$; b) $2e^{-x}(1 + e^{-x})^{-3} = 2e^{2x}(1 + e^x)^{-3}$.
3. a) 0; b) $-\infty$; c) 0.
4. $1 - 2x^4 + \dfrac{2}{3}x^8$.
5. Ponendo $y = 1 - x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = -\int_2^0 y^{-1/2}\,dy = \Big| 2y^{1/2} \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}$.
6. Per $n \to +\infty$ il termine generico della serie è asintoticamente equivalente a $1/n^{3a-1}$ e quindi la serie converge se e solo se $3a - 1 > 1$, ovvero $a > 2/3$.
7. $x(t) = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
8. La soluzione è $x \geq a$ dove a è dato nella figura accanto.



PRIMA PARTE, GRUPPO 3

1. Deve essere $2 - x^2 > 1$ ovvero $-1 < x < 1$.
2. a) $\log x + 1$; b) $-2e^{-x}(1 + e^{-x}) = -2e^{-2x}(1 + e^x) = -2e^{-x} - 2e^{-2x}$.
3. a) $-\infty$; b) $\dfrac{3}{2}$; c) $-\infty$.
4. $-4x^3 - 8x^6$.
5. Ponendo $y = -x^2$ si ottiene $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{0} e^y\,dy = \frac{1}{2}\Big| e^y \Big|_0^{+\infty} = -\frac{1}{2}$.
6. Qualunque sia a, per $n \to +\infty$ il termine generico della serie tende a 0 più rapidamente di qualunque potenza negativa di n, e in particolare più rapidamente di $1/n^2$. Dunque la serie

converge per ogni a per via del criterio del confronto asintotico.



7. $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-5t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

8. La soluzione è $x \geq a$ dove a è dato nella figura accanto.

Prima parte, gruppo 4

1. Deve essere $x^2 - 1 < 0$ ovvero $-1 < x < 1$.

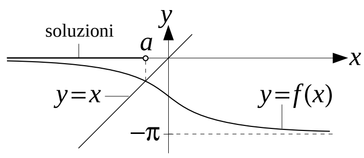
2. a) $2x \log x + x = x(2\log x + 1)$; b) $-2e^{-x}(1 + e^{-x}) = -2e^{-2x}(1 + e^x) = -2e^{-x} - 2e^{-2x}$.

3. a) 1; b) $+\infty$; c) 0.

4. $1 - 2x^2 + 2x^4$.

5. Ponendo $y = 1 + x$ si ottiene $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx = \int_0^3 y^{-1/2} dy = \Big|2y^{1/2}\Big|_0^3 = 2\sqrt{3}$.

6. Qualunque sia a, per $n \to +\infty$ il termine generico della serie tende a 1 e quindi la serie diverge sempre a $+\infty$.



7. $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

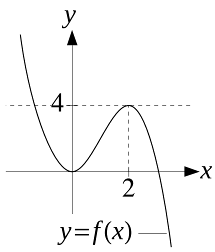
8. La soluzione è $x \leq a$ dove a è dato nella figura accanto.

Seconda parte, gruppo 1

1. a) Moltiplicando entrambi i termini per x^2 l'equazione (*) diventa

$$3x^2 - x^3 = a\,. \tag{1}$$

La funzione $f(x) := 3x^2 - x^3$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $\pm\infty$ per $x \to \mp\infty$, e studiandone il segno della derivata $f'(x) = 3x(2 - x)$ si ottiene che f è crescente per $0 \leq x \leq 2$ e decrescente altrimenti. In particolare $x = 0$ è un punto di minimo locale a cui corrisponde il valore $f(0) = 0$, mentre 2 è un punto di massimo locale a cui corrisponde il valore $f(2) = 4$. Quanto detto permette di tracciare sommariamente il grafico di $f(x)$ nella figura sotto (disegnato senza rispettato le proporzioni) e di ottenere la seguente tabella: per $a > 4$ l'equazione (1), e quindi anche la (*), ha una sola soluzione; per $a = 4$ ne ha due; per $0 < a < 4$ ne ha tre.



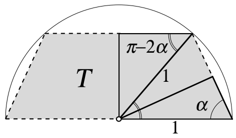
b) Dalla figura sopra risulta chiaro che per ogni $a > 0$ esiste una sola soluzione negativa dell'equazione (*), e che questa soluzione tende a 0 per $a \to 0^+$. Inoltre per $x \to 0$ si ha che $f(x) \sim 3x^2$ e quindi l'equazione $a = f(x)$ diventa $a \sim 3\,x(a)^2$, ovvero

$$x(a) \sim -\sqrt{a/3} \quad \text{per } a \to 0^+.$$

2. Come si vede dalla figura sotto, la base maggiore del trapezio ha lunghezza 2, il lato obliquo ha lunghezza $2\cos\alpha$, e la base minore ha lunghezza $2\cos(\pi - 2\alpha)$. Siccome

$$\cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha) = 1 - 2\cos^2\alpha\,,$$

il perimetro di T è $P = 4(1 + \cos\alpha - \cos^2\alpha)$.



Osserviamo ora che α deve essere compreso tra $\pi/4$ e $\pi/2$ (nel primo estremo la base minore si riduce ad un punto e il trapezio diventa un triangolo isoscele, nel secondo la base minore viene a coincidere con la base maggiore e il trapezio si riduce ad un segmento). Pertanto $\cos\alpha$ è compreso tra $1/\sqrt{2}$ e 0.

Ponendo dunque $t = \cos\alpha$, dobbiamo trovare il valore di t compreso tra 0 e $1/\sqrt{2}$ per cui risulta massima l'espressione

$$P = 4(1 + t - t^2)\,.$$

Studiandone la derivata otteniamo che questa funzione cresce per $0 \le t \le 1/2$ e poi decresce. Pertanto il valore massimo viene raggiunto per $t = 1/2$, ovvero per $\alpha = \pi/3$.

3. La funzione $e^{x\log x} - 1$ è definita per $x > 0$, si annulla per $x \log x = 0$ ovvero per $x = 1$, ed è positiva per $x \log x > 0$, cioè per $x > 1$, e negativa altrimenti. Inoltre questa funzione tende a 0 per $x \to 0^+$ e a $+\infty$ per $x \to +\infty$.

   Pertanto la funzione $f(x)$, che è il suo reciproco, è definita per $x > 0$ e $x \ne 1$, è positiva per $x > 1$ e negativa per $0 < x < 1$. Inoltre $f(x)$ tende a $\pm\infty$ per $x \to 1^\pm$, tende a 0 per $x \to +\infty$ e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$.

   a) Per quanto appena detto questo integrale è improprio a $+\infty$ ed esiste, trattandosi dell'integrale di una funzione positiva. Inoltre per $x > 2$ si ha $x^x > x^2$, quindi

$$f(x) = \frac{1}{x^x - 1} \sim \frac{1}{x^x} \le \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

   e pertanto applicando il principio del confronto asintotico (con l'integrale di $1/x^2$) otteniamo che l'integrale improprio a) è finito.

   b) Per quanto visto sopra l'integrale di $f(x)$ tra 0 e $+\infty$ è improprio in 0, 1 e $+\infty$, e va quindi spezzato come somma di quattro integrali da studiare separatamente:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{2} f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx\,. \tag{2}$$

   Cominciamo con lo studiare il comportamento di $f(x)$ per x vicino a 1. Per farlo conviene usare la sostituzione $x = 1 + y$ e cercare la parte principale per $y \to 0$ di

$$f(1+y) = \frac{1}{\exp\big((1+y)\log(1+y)\big) - 1}\,.$$

   Osserviamo che per $y \to 0$ si ha $(1+y)\log(1+y) \sim y$, e siccome $e^t - 1 \sim t$ per $t \to 0$,

$$\exp\big((1+y)\log(1+y)\big) - 1 \sim y \quad \text{per } y \to 0,$$

   e dunque

$$f(1+y) \sim 1/y \quad \text{per } y \to 0.$$

   Da questo segue che il secondo integrale improprio alla destra dell'uguale in (3) è uguale a $-\infty$ mentre il terzo è uguale a $+\infty$. Questo è sufficiente a dire che l'integrale improprio alla sinistra dell'uguale non esiste.

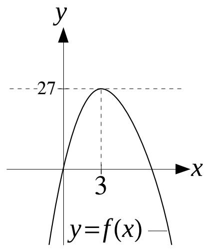
Seconda parte, gruppo 1

1. a) Moltiplicando entrambi i termini per x^3 l'equazione (*) diventa

$$4x^3 - x^4 = a\,. \tag{3}$$

   La funzione $f(x) := 3x^2 - x^3$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, tende a $-\infty$ per $x \to \pm\infty$, e studiandone il segno della derivata $f'(x) = 4x^2(3 - x)$ si ottiene che f è crescente per $x \le 3$ e decrescente altrimenti. In particolare $x = 3$ è un punto di massimo assoluto a cui corrisponde il valore $f(3) = 27$. Quanto detto permette di tracciare sommariamente il grafico di $f(x)$ nella figura sotto (disegnato senza rispettato le proporzioni) e di ottenere la seguente tabella: per $a > 27$

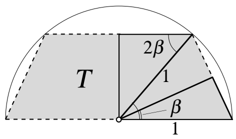
l'equazione (3), e quindi anche la (*), non ha soluzioni; per $a = 27$ ne ha una; per $0 < a < 27$ ne ha due.



b) Dalla figura sopra risulta evidente che per ogni $a < 27$ l'equazione (*) ammette due soluzioni di cui la più piccola tende a 0 per $a \to 0^+$. Inoltre per $x \to 0$ si ha che $f(x) \sim 4x^3$ e quindi l'equazione $a = f(x)$ diventa $a \sim 4\,x(a)^3$, ovvero

$$x(a) \sim \sqrt[3]{a/4} \quad \text{per } a \to 0^+.$$

2. Analogo al gruppo 1. Come si vede dalla figura sotto, la base maggiore del trapezio ha lunghezza 2, il lato obliquo ha lunghezza $2\sin\beta$, e la base minore ha lunghezza $2\cos(2\beta)$. Siccome $\cos(2\beta) = 1 - 2\sin^2\beta$, il perimetro di T è $P = 4(1 + \sin\beta - \sin^2\beta)$.



Osserviamo ora che β deve essere compreso tra 0 e $\pi/4$e quindi $\sin\beta$ è compreso tra 0 e $1/\sqrt{2}$. Ponendo dunque $t = \sin\beta$, dobbiamo trovare il valore di t compreso tra 0 e $1/\sqrt{2}$ per cui risulta massima l'espressione $P = 4(1 + t - t^2)$. Come già visto per il gruppo 1 il massimo è raggiunto per $t = 1/2$, ovvero per $\beta = \pi/6$.

3. Lo studio del dominio e del segno di $f(x)$ è uguale al gruppo 1.

a) Analogo al gruppo 1: per studiare questo integrale improprio bisogna determinare il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to 0^+$. Usando il fatto che $e^y - 1 \sim y$ per $y \to 0$ e che $x \log x$ tende a 0 per $x \to 0^+$ otteniamo che

$$f(x) = \frac{1}{e^{x\log x} - 1} \sim \frac{1}{x \log x} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

e come si è visto a lezione, l'integrale improprio di $1/(x \log x)$ tra 0 e 1/2 lo si può calcolare tramite il cambio di variabile $y = \log x$, ottenendo che vale $-\infty$. Pertanto, per il teorema del confronto asintotico, anche l'integrale di $f(x)$ tra 0 e 1/2 vale $-\infty$.

b) Uguale al gruppo 1: l'integrale non esiste.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2. Per trovare i punti di massimo della funzione P è conveniente fare la sostituzione $t = \cos\alpha$ o $t = \sin\beta$ (a seconda del gruppo) ma non è affatto necessario. Quello che invece è necessario è individuare chiaramente l'intervallo degli α o dei β ammissibili.

- Seconda parte, esercizio 3. Molti hanno avuto difficoltà a determinare l'insieme di definizione ed il segno della funzione, il che è grave.

- Seconda parte, esercizio 3b). Quasi nessuno dei presenti ha spezzato correttamente l'integrale come somma di quattro integrali impropri semplici. Inoltre molti hanno detto che questo integrale non esiste perché il punto 1 non appartiene all'insieme di definizione della funzione da integrare (cosa che non è corretta).

Prima parte, gruppo 1

1. Deve essere $2 - x^2 > 0$, vale a dire $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$.

2. a) $\left[\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}}\right]' = \left[e^{-x} - e^{-3x}\right]' = 3e^{-3x} - e^{-x}$; b) $\dfrac{2x}{1+x^4}$.

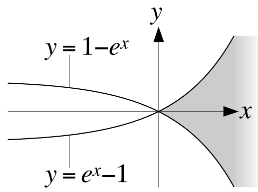
3. a) -1; b) 1; c) 0.

4. $\dfrac{2}{x^2}$.

5. Integriamo per parti: $\displaystyle\int x^3 \log x\,dx = \frac{x^4}{4}\log x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{16}(4\log x - 1) + c$.

6. Usiamo il cambio di variabile $y = x^2$: $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} 4x\sin(x^2)\,dx = 2\int_0^{\pi} \sin y\,dy = 4$.

7. Ponendo $x(t) := t^a$ l'equazione diventa $\big(a^2+4\big)t^a = 0$ e sarebbe soddisfatta se $a^2 + 4 = 0$, ma questo non si verifica per alcun a.



8. L'insieme dato corrisponde all'area in grigio nella figura accanto.

Prima parte, gruppo 2

1. Deve essere $1 - x^2 > 0$, vale a dire $-1 < x < 1$.

2. a) $\left[\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}\right]' = \left[e^{-x} + e^{-3x}\right]' = -e^{-x} - 3e^{-3x}$; b) $\dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$.

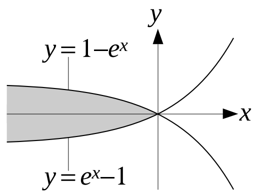
3. a) 1; b) 0; c) -2.

4. $-\dfrac{1}{x^2}$.

5. Integriamo per parti: $\displaystyle\int x^4 \log x\,dx = \frac{x^5}{5}\log x - \int \frac{x^5}{5}\frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{25}(5\log x - 1) + c$.

6. Usiamo il cambio di variabile $y = x^2$: $\displaystyle\int_0^{2} 4x\exp(x^2)\,dx = 2\int_0^{4} \exp(y)\,dy = 2(e^4 - 1)$.

7. Ponendo $x(t) := t^a$ l'equazione diventa $\big(a^2-4\big)t^a = 0$ ed è quindi soddisfatta se e solo se $a^2 - 4 = 0$, vale a dire se e solo se $a = \pm 2$.



8. L'insieme dato corrisponde all'area in grigio nella figura accanto.

Prima parte, gruppo 3

1. Deve essere $2 - x^2 \geq 1$, vale a dire $-1 \leq x \leq 1$.

2. a) $\left[\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{3x}}\right]' = \left[e^{-2x} + e^{-4x}\right]' = -2e^{-2x} - 4e^{-4x}$; b) $\dfrac{3x^2}{1+x^6}$.

3. a) -1; b) $-\infty$; c) 0.

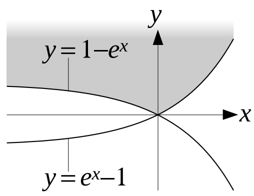
4. $-\dfrac{1}{x}$.

5. Integriamo per parti: $\displaystyle\int x^2 \log x\, dx = \frac{x^3}{3}\log x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{9}(3\log x - 1) + c.$

6. Usiamo il cambio di variabile $y = x^2$: $\displaystyle\int_{-1}^{1} 4x \exp(x^2)\, dx = 2\int_{1}^{1} \exp(y)\, dy = 0.$

7. Ponendo $x(t) := t^a$ l'equazione diventa $\big(a^2 - 2a + 1\big)t^a = 0$ ed è quindi soddisfatta se e solo se $a^2 - 2a + 1 = 0$, vale a dire se e solo se $a = 1$.

8. L'insieme dato corrisponde all'area in grigio nella figura accanto.



SECONDA PARTE, GRUPPO 1

1. a) L'equazione omogenea associata alla (*) è $\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0$; la corrispondete equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ ed ha come soluzioni $\lambda = -1, 3$. Pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\rm om}(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
Cerchiamo ora una soluzione particolare della (*) della forma $x(t) = ae^{-2t}$. In questo caso l'equazione diventa $(5a + 5)e^{-2t} = 0$ ed è quindi soddisfatta se $a = -1$. Pertanto la soluzione particolare cercata è $x(t) = -e^{-2t}$, e la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{3t} - e^{-2t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
b) Affinché la soluzione $x(t)$ data sopra tenda a 0 per $t \to +\infty$ deve essere $\alpha_2 = 0$. Imponendo poi che $x(0) = 1$ otteniamo $\alpha_1 = 1$, e quindi la soluzione cercata è
$$x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}\,.$$

2. Applichiamo il criterio del rapporto: se indichiamo con a_n l'n-esimo addendo della serie, vale a dire $a_n := (n!)^2/(2n)!$, allora
$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!}\\ &= \left(\frac{(n+1)\cdot n!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)\cdot(2n)!}\\ &= \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$
Dunque quando $n \to +\infty$ il rapporto a_{n+1}/a_n tende a $1/4$, che è un numero strettamente minore di 1, e per il criterio del rapporto la serie $\sum a_n$ converge ad un numero finito.

3. a) Usando lo sviluppo di Taylor $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4)$ otteniamo
$$f(x) := \frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{x^2/2 + O(x^4)}{1 + O(x^2)} \sim \frac{x^2}{2}\,.$$
b) Si vede facilmente che la funzione $f(x^a)/x^2$ è ben definita, continua e positiva nell'intervallo $(0, \pi/2)$ ma non è definita in 0. Quindi l'integrale in questione è improprio in 0, esiste sempre, e resta da capire quando è finito. Osserviamo ora che per $x \to 0$ si ha
$$\frac{f(x^a)}{x^2} \sim \frac{(x^\alpha)^2/2}{x^2} = \frac{1}{2x^{2-2\alpha}}$$
e dunque, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio è finito se e solo se $2 - 2\alpha < 1$, vale a dire $\alpha > 1/2$.

c) Si vede facilmente che la funzione $f(x^a)/x^2$ è ben definita, continua e positiva nell'intervallo $(0, \pi/2)$ ma non è definita né in 0 (come già osservato sopra) né in $\pi/2$, perché per $x = \pi/2$ si ha $\cos x = 0$ e quindi $f(x)$ stessa non è definita. Pertanto l'integrale in questione è improprio

in 0 e in $\pi/2$, e va studiato spezzandolo come somma di due integrali impropri semplici, per esempio
$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{f(x)}{x^2} dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx\,. \tag{1}$$
Il primo di questi due integrali lo abbiamo già studiato al punto precedente, e risulta essere finito. Il secondo, essendo la funzione integranda positiva, esiste sicuramente e si tratta di capire quindi se è finito o meno. Per fare questo usiamo il cambio di variabile $x = \pi/2 - x$ per riscriverlo come un integrale improprio in 0:
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^2\,\cos x} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1-\sin y}{(\pi/2-y)^2 \sin y} dy \tag{2}$$
(si noti che $\cos x = \cos(\pi/2 - y) = \sin y$). Osserviamo ora che per $y \to 0$ si ha
$$\frac{1-\sin y}{(\pi/2-y)^2 \sin y} \sim \frac{1}{(\pi/2)^2 \sin y} \sim \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{y}$$
e dunque, sempre per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio in (2) è uguale a $+\infty$. Ritornando alla (1) otteniamo quindi che
$$\int_0^{\pi/2} \frac{f(x)}{x^2} dx = +\infty\,.$$

Seconda parte, gruppo 2

1. Analogo al gruppo 1. a) Le soluzioni dell'equazione caratteristica dell'equazione omogenea $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = 0$ sono $\lambda = 1, -3$, e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è
$$x_{\text{om}}(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-3t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
Cercando una soluzione particolare della (*) della forma $x(t) = ae^{-2t}$ otteniamo che deve essere $a = -2$ e quindi la soluzione generale della (*) è
$$x(t) = \alpha_1 e^t + \alpha_2 e^{-3t} - 2e^{-2t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$
b) Affinché la soluzione $x(t)$ data sopra tenda a 0 per $t \to +\infty$ deve essere $\alpha_1 = 0$ e imponendo che $x(0) = 1$ otteniamo $\alpha_2 = 3$, e quindi la soluzione cercata è
$$x(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}\,.$$

2. Analogo al gruppo 1. Detto a_n l'n-esimo addendo della serie si ha che
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^3 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^3}{(2n+2)(2n+1)} \sim \frac{n^3}{4n^2} = \frac{n}{4}\,.$$
Dunque quando $n \to +\infty$ il rapporto a_{n+1}/a_n tende a $+\infty$, e per il criterio del rapporto la serie $\sum a_n$ converge ad un numero finito.

3. Uguale al gruppo 1.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 2. Pur avendo impostato correttamente il problema usando il criterio del rapporto quasi tutti i presenti hanno fatto errori nel manipolare e semplificare i fattoriali.