Versione: 10 aprile 2009

Università di Pisa
Corso di laurea in Scienze Biologiche Molecolari

Raccolta di esercizi per il corso di

Matematica e Statistica (corso C)

a.a. 2008/09

Giovanni Alberti

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Introduzione

Questa è una raccolta degli esercizi assegnati durante il corso di Matematica e Statistica C (laurea triennale in Scienze Biologiche Molecolari) nell'a.a. 2008/09. Gli esercizi sono suddivisi in "raccolte" corrispondenti grosso modo ad argomenti distinti.

Programma del corso.

Sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

1. Funzioni, grafici, numeri
   - 1.1 Funzioni e grafici di funzioni: dominio di definizione, funzione inversa. Funzioni elementari: funzioni lineari, potenze, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche (seno, coseno, tangente) e funzioni trigonometriche inverse.
   - 1.2 Operazioni sui grafici di funzioni. Interpretazione di equazioni e disequazioni in termini di grafici di funzioni.
   - 1.3 Numeri complessi. Coordinate polari di un punto nel piano. Rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi.
2. Nozioni di statistica descrittiva
   - 2.1 Propagazione degli errori.
   - 2.2 Media e varianza di un insieme finito di dati numerici. Medie pesate. Mediana, moda.
   - 2.3 Rappresentazione grafica di un insieme di dati, diagrammi e istogrammi. Metodo dei minimi quadrati e retta di regressione.
3. Derivate, integrali ed equazioni differenziali
   - 3.1 Derivata di una funzione: significato geometrico ed interpretazione fisica. Derivate delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle derivate.
   - 3.2 Applicazione delle derivate allo studio dei grafici di funzioni.
   - 3.3 Calcolo dei limiti di funzioni. Metodo di de l'Hôpital. Confronto tra i comportamenti asintotici di esponenziali, potenze e logaritmi. Notazione di Landau ("o" piccolo). Sviluppo di Taylor e parte principale di una funzione.
   - 3.4 Definizione di integrale definito di una funzione in termini di area del sottografico. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Primitive delle funzioni elementari e regole per il calcolo delle primitive (integrali indefiniti) e degli integrali definiti.
   - 3.5 Esempi di equazioni differenziali. Significato dei dati iniziali. Equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine. Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, omogenee e non omogenee.
4. Elementi di probabilità
   - 4.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni. Fattoriale e coefficienti binomiali.
   - 4.2 Definizione di probabilità su uno spazio di eventi elementari finito; probabilità uniforme. Eventi indipendenti e probabilità condizionata. Probabilità dell'unione e dell'intersezione di un numero finito di eventi indipendenti. Formula di Bayes. Esempi classici di modelli probabilistici (lancio di due dadi, lancio di n monete, etc.).
   - 4.3 Variabili aleatorie. Valore atteso e varianza. Indipendenza e covarianza. Valore atteso e varianza per la somma di due o più variabili aleatorie (indipendenti e non). Media campionaria e legge (debole) dei grandi numeri.
   - 4.4 Principali distribuzioni di probabilità: di Bernoulli, binomiale, geometrica e di Poisson.
   - 4.5 Distribuzioni di probabilità continue; valore atteso e varianza di una variabile aleatoria con distribuzione continua. Distribuzione uniforme, esponenziale e normale (o Gaussiana). Il teorema del limite centrale (solo accennato).

5. Matrici e vettori

5.1 Vettori in $\mathbb{R}^n$. Somma, prodotto per scalare, prodotto scalare e loro significato geometrico.

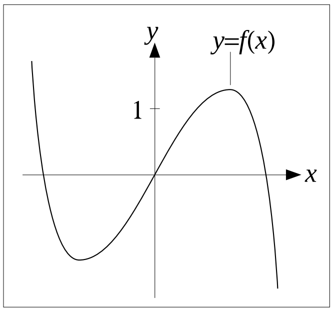
5.2 Matrici $m \times n$; somma e prodotto di matrici. Determinante di una matrice quadrata e sua interpretazione geometrica (nel caso 2×2 e 3×3). Inversa di una matrice quadrata.

5.3 Risoluzione dei sistemi di n equazioni lineari in n incognite tramite vettori e matrici.

1. Determinare il dominio di definizione della funzione $\log(e^x - 1)$.

2. Determinare il dominio di definizione della funzione $\sqrt{\log x + 2}$.

3. Sia f la funzione data nella figura accanto. Individuare graficamente le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:
a) $f(x) = 0$;
b) $f(x) = 1$;
c) $f(x) \leq 0$;
d) $f(x) \geq 1$.



4. Risolvere l'equazione $\sqrt{x} = x - 2$.

5. Risolvere la disequazione $\dfrac{x+1}{1-x} \geq x$.

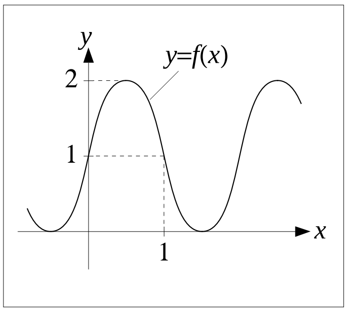
6. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

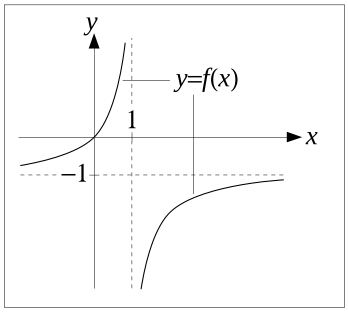
$$\text{a) } e^{-x}\ , \quad \text{b) } (x+1)^3\ , \quad \text{c) } \frac{1}{x}+1\ , \quad \text{d) } 2+2\sin(x)\ , \quad \text{e) } \frac{1}{x-2}-1\ ,$$

$$\text{f) } \cos(\pi - x) - 1\ , \quad \text{g) } \frac{\pi}{2} - \arctan x\ , \quad \text{h) } \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}\ , \quad \text{i) } \tan(x/\pi)\ .$$

$$\text{l) } \log(2x)\ , \quad \text{m) } \log\frac{1}{x^2}\ , \quad \text{n) } |\sin x|\ , \quad \text{o) } 2+\log|x|\ , \quad \text{p) } e^{1-x} - e\ .$$

7. Proporre delle formule per le funzioni nelle seguenti figure:

a) 

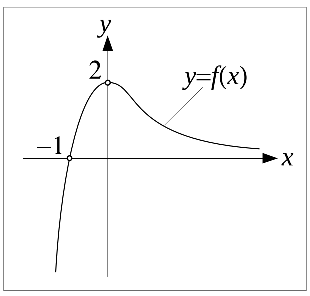
b) 

8. Risolvere la disequazione $e^{x(x-1)} \geq 1$.

9. Risolvere la disequazione $\log(3x) \geq 1$.

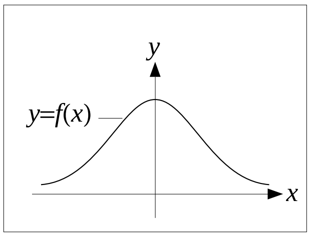
10. Risolvere la disequazione $\arctan(x^2) \geq \pi/4$.

11. Sia $f(x)$ la funzione data nella figura accanto. Disegnare il grafico delle seguenti funzioni:
a) $f(-x)$;
b) $-f(-x)$;



c) $f(x+1)$;
d) $2 - f(x)$;
e) $f(-x) - 2$;
f) $|f(x)|$;
g) $f(|x|)$.

12. Sia f la funzione data nella figura accanto. Individuare graficamente le soluzioni delle seguenti equazioni e disequazioni:
a) $f(x) = x$;
b) $f(x) \geq x$;
c) $f(x) \geq -x$;
d) $f(x) \geq x^2$.



13. a) Trovare le soluzioni dell'equazione $|\tan x| = 1$ comprese tra 0 e π;
b) trovare le soluzioni della stessa equazione comprese tra $-\pi$ e π.

14. a) Disegnare il grafico della funzione $y = \sin(2x)$.
b) Determinare le soluzioni della disequazione $\sin(2x) \geq 1/2$ comprese tra 0 e 2π.

15. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $1 - x^2 \leq y \leq x^2 - 1$.

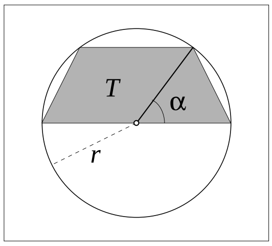
16. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) tali che $y \leq e^x$ e $y \leq e^{-x}$.

17. Disegnare l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano ciascuna delle seguenti condizioni:

a) $x \leq 1$ e $y \leq 1$; b) $x \geq -1$ e $y \geq -1$; c) $x + y \leq 1$ e $y - x \leq 1$; d) $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$.

18. Trovare, senza usare la calcolatrice, il numero intero che meglio approssima $\log_{10}(75.486)$ per difetto (in altre parole, la parte intera di questo logaritmo).

19. Calcolare il l'area e il perimetro del trapezio T nella figura accanto in funzione del raggio r e dell'angolo α.



20. a) Trovare la formula per calcolare $\tan^2 x$ partendo solo da $\sin x$ (non utilizzando quindi $\cos x$).
b) Trovare la formula per calcolare $\tan x$ partendo da $\cos x$.
c) Trovare la formula per calcolare $\sin x$ partendo da $\tan x$.
d) Trovare la formula per calcolare $\cos x$ partendo da $\tan x$.

1. Determinare le coordinate *polari* r e θ dei seguenti punti del piano, dati in coordinate *cartesiane*:

$$\text{a) } (1,-1)\ ; \quad \text{b) } (-2,0)\ ; \quad \text{c) } (-1,\sqrt{3})\ ; \quad \text{d) } (0,-3)\ ; \quad \text{e) } \big(-1,-\tfrac{\sqrt{3}}{3}\big)\ .$$

2. Determinare le coordinate *cartesiane* dei seguenti punti del piano, dati in coordinate *polari*:

$$\text{a) } \begin{cases} r=2 \\ \theta=\frac{\pi}{3} \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} r=2^{3/2} \\ \theta=-\frac{7\pi}{4} \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} r=4 \\ \theta=-\frac{8\pi}{3} \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} r=5 \\ \theta=\frac{3\pi}{2} \end{cases} ; \quad \text{e) } \begin{cases} r=5 \\ \theta=-\frac{\pi}{2} \end{cases} .$$

3. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) la cui coordinata polare r soddisfa $r \le 2$. [*Ricordare il significato geometrico di* r.]

4. Disegnare l'insieme dei punti (x,y) le cui coordinate polari r e θ soddisfano $1 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le \pi$.

5. Calcolare z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2 per le seguenti coppie di numeri complessi:

$$\text{a) } z_1 = 3i \text{ e } z_2 = 1-i\ ; \quad \text{b) } z_1 = 2+3i \text{ e } z_2 = 2-3i\ ; \quad \text{c) } z_1 = 5+i \text{ e } z_2 = -4i\ .$$

6. Svolgere i seguenti calcoli:

$$\text{a) } \frac{4}{1+3i} + \frac{4}{1-3i}\ ; \quad \text{b) } (5i+2)^2 - (5i-2)^2\ ; \quad \text{c) } \left(\frac{1+3i}{1-3i}\right)^2 .$$

7. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 - 4z + 5 = 0$.

8. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione $z^2 = 1+i$. [*Traccia: posto* $z = x+iy$, *semplificando l'equazione* $(x+iy)^2 = 1+i$ *si ottiene* $(x^2-y^2)+2xyi = 1+i$, *che conduce a due equazioni separate:* $x^2-y^2=1$ *e* $2xy=1$.]

9. Per i seguenti numeri complessi z, scrivere il modulo $|z|$ e l'argomento θ:

$$\text{a) } z_1 := -2-2i\ , \quad \text{b) } z_2 := -3+i\sqrt{3}\ , \quad \text{c) } z_3 := -4i\ .$$

10. Dato un numero complesso $z = x+iy$, si indica con $\bar{z}$ il numero complesso *coniugato*, vale a dire $\bar{z} := x - iy$. Dimostrare che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ e $1/z = \bar{z}/|z|^2$.

11. a) Utilizzando le opportune formule trigonometriche, verificare la seguente affermazione fatta a lezione: dati due numeri reali θ_1 e θ_2 allora

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\ .$$

b) Dimostrare che $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$ per ogni intero positivo n.
c) Dimostrare che la formula data al punto b) vale anche per n intero *negativo*.

12. a) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $1 - i\sqrt{3}$.
b) Scrivere $(1-i\sqrt{3})^8$ in forma trigonometrica.
c) Calcolare $(1-i\sqrt{3})^8$.

13. a) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $-1+i$.
    b) Scrivere $(-1+i)^{-6}$ in forma trigonometrica.
    c) Calcolare $(-1+i)^{-6}$.

14. a) Scrivere in forma trigonometrica il numero complesso $4i$.
    b) Trovare le soluzioni dell'equazione $z^3 = 8i$.

15. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z, visti come punti del piano cartesiano, tali che $|z| \leq 2$. [*Si ricordi che $|z|$ rappresenta la distanza del punto z dall'origine.*]

16. Dati due numeri complessi z_1 e z_2, verificare che il modulo $|z_1 - z_2|$ è uguale alla distanza tra z_1 e z_2, visti come punti del piano cartesiano.

17. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z, tali che $|z-(1+i)| \leq \sqrt{2}$. [*Utilizzare l'esercizio precedente oppure scrivere $z = x + iy$ e risolvere la disequazione.*]

18. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z-2| \leq 2$.

19. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z+2| \leq 2$ e $|z-2i| \leq 2$.

20. Disegnare l'insieme dei numeri complessi z tali che $|z-2| \leq |z+2|$.

Richiamo delle nozioni fondamentali

Si indica con $x = v \pm e$ una qualunque quantità x di cui si sa per certo solo che è approssimata dal valore v con un margine d'errore inferiore ad e, vale a dire che x può essere qualunque numero compreso tra $v - e$ e $v + e$, ovvero appartiene all'intervallo $[v - e, v + e]$.

Tipicamente si usa questa notazione per indicare una grandezza x per cui, avendola misurata con un'opportuno strumento, si ottiene una misura v con un margine d'errore e dovuto alla precisione dello strumento stesso (per esempio, misurando una lunghezza con un comune righello il margine di errore è di 1 millimetro, cioè la distanza minima tra due tacche).

In questa notazione v viene chiamato *valore* ed e *errore assoluto* (da non confondere con la costante di Nepero $e = 2{,}718\ldots$). Si chiama invece *errore relativo* il rapporto $e^{\mathrm{rel}} := e/v$ (qui e in seguito si suppone per semplicità v che v sia un numero positivo, altrimenti l'errore relativo è dato da $e^{\mathrm{rel}} := e/|v|$). Chiaramente si ha che $e = v\, e^{\mathrm{rel}}$ e quindi utilizzando l'errore relativo invece che quello assoluto possiamo scrivere $x = v \pm v\, e^{\mathrm{rel}} = v(1 \pm e^{\mathrm{rel}})$.

Date due grandezze $x_1 = v_1 \pm e_1$ e $x_2 = v_2 \pm e_2$, ci si chiede con quale errore la somma dei valori $v_1 + v_2$ approssima la somma delle grandezza $x_1 + x_2$: la risposta è data dalle seguente formula:

$$x_1 + x_2 = v_1 + v_2 \pm e_{\mathrm{somma}} \quad \text{con} \quad e_{\mathrm{somma}} = e_1 + e_2\ . \tag{1}$$

Una formula analoga vale per la differenza:

$$x_1 - x_2 = v_1 - v_2 \pm e_{\mathrm{diff}} \quad \text{con} \quad e_{\mathrm{diff}} = e_1 + e_2\ , \tag{2}$$

mentre per il prodotto si ha

$$x_1 x_2 = v_1 v_2 \pm e_{\mathrm{prod}} \quad \text{con} \quad e_{\mathrm{prod}} = v_2 e_1 + v_1 e_2 + e_1 e_2\ . \tag{3}$$

Esprimendo l'ultima formula in termini di errori relativi invece che assoluti otteniamo

$$e_{\mathrm{prod}} = v_1 v_2\, e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{prod}} \quad \text{con} \quad e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{prod}} = e^{\mathrm{rel}}_1 + e^{\mathrm{rel}}_2 + e^{\mathrm{rel}}_1 e^{\mathrm{rel}}_2\ , \tag{4}$$

ma se gli errori relativi sono sufficientemente piccoli, il termine $e^{\mathrm{rel}}_1 e^{\mathrm{rel}}_2$ nella seconda uguaglianza può essere trascurato in quanto nettamente inferiore agli altri due; così facendo si ottiene una formula meno precisa della precedente, ma nettamente più semplice:

$$e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{prod}} \simeq e^{\mathrm{rel}}_1 + e^{\mathrm{rel}}_2 \quad \text{ovvero} \quad e_{\mathrm{prod}} \simeq v_2 e_1 + v_1 e_2\ . \tag{5}$$

Per ottenere la formula per l'errore del rapporto partiamo da quella per l'errore dell'inverso:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{v} \pm e_{\mathrm{inv}} \quad \text{con} \quad e_{\mathrm{inv}} = \frac{e}{v(v-e)} \quad \text{ovvero} \quad e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{inv}} = \frac{e^{\mathrm{rel}}}{1 - e^{\mathrm{rel}}}\ , \tag{6}$$

ma se l'errore relativo e^{rel} è sufficientemente piccolo dividere per $1 - e^{\mathrm{rel}}$ è come dividere per 1, e possiamo quindi semplificare le formule precedenti come segue:

$$e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{inv}} \simeq e^{\mathrm{rel}} \quad \text{ovvero} \quad e_{\mathrm{inv}} \simeq \frac{e}{v^2}\ . \tag{7}$$

Infine, per quanto riguarda il rapporto x_1/x_2, conviene vederlo come il prodotto di x_1 per l'inverso $1/x_2$ e mettendo insieme le formule per gli errori dell'inverso e del rapporto otteniamo

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{v_1}{v_2} \pm e_{\mathrm{rapp}} \quad \text{con} \quad e_{\mathrm{rapp}} = \frac{v_2 e_1 + v_1 e_2}{v_2(v_2 - e_2)} \quad \text{ovvero} \quad e^{\mathrm{rel}}_{\mathrm{rapp}} = \frac{e^{\mathrm{rel}}_1 + e^{\mathrm{rel}}_2}{1 - e^{\mathrm{rel}}_2} \tag{8}$$

e in versione semplificata

$$e_{\mathrm{rapp}} \simeq \frac{v_2 e_1 + v_1 e_2}{v_2^2} \quad \text{ovvero} \quad e_{\mathrm{rapp}}^{\mathrm{rel}} \simeq e_1^{\mathrm{rel}} + e_2^{\mathrm{rel}} \; . \tag{9}$$

Osservazioni. A livello di memorizzazione, per il prodotto e l'inverso conviene ricordare le formule per l'errore relativo (sia nella versione precisa come per quella approssimata), mentre le formule per l'errore del rapporto non sono strettamente necessarie, visto che ci si può sempre ricondurre a prodotto ed inverso.

Dal punto di vista strettamente matematico l'espressione $x = 2{,}1567 \pm 0{,}031$ ha perfettamente senso: indica un numero x compreso tra 2,1257 e 2,1877. In termini di espressione approssimata di una grandezza misurata ha però più senso sostituire questa espressione con quella meno precisa $x = 2{,}16 \pm 0{,}03$, arrotondando cioè il valore v e l'errore e alla prima cifra decimale significativa. Nel risolvere gli esercizi che seguono si consiglia di aggiungere al risultato preciso anche quello ottenuto con questa semplificazione.

Negli esercizi che seguono specificheremo di volta in volta se nel calcolo degli errori si debbano usare le formule approssimate oppure quelle precise.

Esercizi

1. Per le grandezze che seguono scrivere l'errore assoluto nella stessa unità di misura del valore e poi calcolare l'errore relativo:

   a) $1{,}6\,\mathrm{m} \pm 4\,\mathrm{cm}$; a) $1,25\,\mathrm{km} \pm 50\,\mathrm{m}$; c) $4\,\mathrm{min} \pm 30\,\mathrm{sec}$; e) 40 ± 2 .

2. In ciascuno dei seguenti casi calcolare l'errore assoluto partendo da quello relativo; specificare quindi l'intervallo dei valori ammissibili:

   a) $v = 2{,}1\,\mathrm{m}$, $e^{\mathrm{rel}} = 0,1$; b) $v = 30\,\mathrm{sec}$, $e^{\mathrm{rel}} = 20\%$; c) $v = 2\,\mathrm{sec}$, $e^{\mathrm{rel}} = 5\%$.

3. Per un determinato numero x si hanno le stime $x = 12{,}1 \pm 0{,}3$ e $x = 11{,}6 \pm 0{,}4$. Quali sono i possibili valori di x?

4. Far vedere che se $x = 2,1 \pm 0{,}1$, allora si ha pure $x = 2 \pm 0{,}2$. Far vedere con un esempio che il contrario non è vero, cioè che se $x = 2 \pm 0{,}2$ allora non è detto che $x = 2,1 \pm 0{,}1$.

5. Date le grandezze $x_1 = (2{,}1 \pm 0{,}2)\,\mathrm{m}$ e $x_2 = (5{,}2 \pm 0{,}3)\,\mathrm{m}$, trovarne la somma calcolando sia l'errore assoluto che quello relativo.

6. Prese x_1 e x_2 come nell'esercizio precedente, trovarne il prodotto calcolando precisamente sia l'errore assoluto che quello relativo. Confrontare i risultati con quelli ottenuti tramite le formule approssimate.

7. Ripetere quanto fatto nell'esercizio precedente per il rapporto x_2/x_1.

8. Calcolare il volume di un parallelepipedo con lati di lunghezza $1{,}2\,\mathrm{m}$, $2{,}7\,\mathrm{m}$ e $4{,}3\,\mathrm{m}$. Sapendo che le misure dei lati hanno un margine di errore di $5\,\mathrm{cm}$, determinare l'errore assoluto e relativo per il valore del volume. Confrontare i risultati ottenuti utilizzando la formula precisa per l'errore del prodotto e quella semplificata.

9. Si vuole calcolare l'area di un rettangolo con un errore relativo del 5%, ed un lato è gi stato misurato con un errore relativo del 3%. Con quale errore relativo bisogna misurare la lunghezza dell'altro lato?

10. Dimostrare che se $x = v \pm e$ allora $ax = av \pm ae$ per ogni numero reale positivo a.

11. Calcolare il valore e l'errore assoluto di $\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1}$ dove $x_1 = 14{,}3 \pm 0{,}8$ e $x_2 = 17{,}1 \pm 1{,}1$.

12. Se $x_1 = v_1 \pm e_1$ e $x_2 = v_2 \pm e_2$, allora
$$(v_1 - e_1) + (v_2 - e_2) \leq x_1 + x_2 \leq (v_1 + e_1) + (v_2 + e_2) \ .$$
Dedurne la formula (1). [*Dimostrazione svolta a lezione.*]

13. Dati $x_1 = v_1 \pm e_1$ e $x_2 = v_2 \pm e_2$, allora
$$(v_1 - e_1) - (v_2 + e_2) \leq x_1 - x_2 \leq (v_1 + e_1) - (v_2 - e_2) \ .$$
Dedurne la formula (2). [*Dimostrazione svolta a lezione.*]

14. Dati $x_1 = v_1 \pm e_1$ e $x_2 = v_2 \pm e_2$, allora
$$(v_1 - e_1)(v_2 - e_2) \leq x_1 x_2 \leq (v_1 + e_1)(v_2 + e_2) \ .$$
Dedurne la formula (3). Quindi, ricordando che per definizione
$$e_{\text{prod}}^{\text{rel}} = \frac{e_{\text{prod}}}{v_1 v_2} \ ,$$
ricavare la formula (4) a partire dalla (3). [*Dimostrazione svolta a lezione.*]

15. Dato $x = v \pm e$, dimostrare che
$$\frac{1}{v} - \frac{e}{v(v+e)} = \frac{1}{v+e} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{v-e} = \frac{1}{v} + \frac{e}{v(v-e)} \ ,$$
e dedurne la formula (6).

16. Dimostrare la formula (8) a partire dalle formule (4) e (6).

17. Dati $x_1 = v_1 \pm e_1$ e $x_2 = v_2 \pm e_2$, far vedere che
$$x_1 - x_2 \leq (v_1 v_2 + e_1 e_2) \pm (v_1 e_2 + v_2 e_1) \ .$$
Si verifichi che questa formula è più precisa della (3), nel senso che l'intervallo dei valori ammissibili per il prodotto $x_1 x_2$ che ne deriva è strettamente contenuto nell'intervallo che si ottiene dalla formula (3).
[*Anche se più precisa della* (3), *questa formula è meno significativa, perché quello che ci interessa veramente valutare è l'errore che si introduce sostituendo $x_1 x_2$ con il prodotto dei valori $v_1 v_2$, e non tanto con $v_1 v_2 + e_1 e_2$.*]

Richiamo delle nozioni fondamentali

Si consideri una sequenza di dati numerici $x_1, x_2, \ldots, x_N$. La *media* (aritmetica) di questi numeri, indicata con $\mathrm{media}(x_i)$ o semplicemente con m se è chiaro dal contesto a quali dati ci si riferisce, è

$$m = \mathrm{media}(x_i) := \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \ ,$$

mentre la *varianza* (ovvero il quadrato della *deviazione standard*) è

$$\begin{aligned} \sigma^2 = \mathrm{var}(x_i) &: = \mathrm{media}((x_i - m)^2) \\ &= \frac{(x_1 - m)^2 + \cdots + (x_N - n)^2}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - m)^2 \ . \end{aligned}$$

Ricordiamo la seguente formula per la varianza

$$\sigma^2 = \mathrm{media}(x_i^2) - (\mathrm{media}(x_i))^2 \ . \tag{1}$$

Avendo ordinato i dati $x_1, \ldots, x_N$ in ordine crescente, la *mediana* è definita come il valore del termine di mezzo (se N è dispari) ovvero la media dei due termini di mezzo (se N è pari), vale a dire

$$\mathrm{mediana} := \begin{cases} x_{\frac{N+1}{2}} & \text{se } N \text{ è dispari,} \\ \frac{1}{2}(x_{\frac{N}{2}} + x_{\frac{N}{2}+1}) & \text{se } N \text{ è pari.} \end{cases}$$

In certe situazioni è opportuno ricorrere alla nozione di *media pesata*. Un esempio tipico si ha quando i dati sono raggruppati sulla base del loro valore. Indichiamo con $y_1, \ldots, y_M$ i possibili valori: per ogni y_j, si dice *frequenza assoluta* il numero n_j di dati uguali a y_j, e *frequenza relativa* il rapporto n_j/N. La media e la varianza dei dati x_i si possono calcolare a partire dai valori y_j e dalle loro frequenze relative utilizzando le seguenti formule (corrispondenti appunto a medie pesate):

$$m = \sum_{i=1}^{M} \frac{n_i}{N} y_i \quad \text{e} \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{M} \frac{n_i}{N}(y_i - m)^2 \ . \tag{2}$$

In questo contesto si chiama *moda* (o anche *classe modale*) il valore y_i con la massima frequenza (assoluta o relativa).

Covarianza e correlazione. Si considerino due sequenze di dati numerici con ugual numero di elementi: $x_1, \ldots, x_N$ e $y_1, \ldots, y_N$. La *covarianza* di queste due sequenze è data da

$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(x_i; y_i) &: = \mathrm{media}(x_i y_i) - \mathrm{media}(x_i) \cdot \mathrm{media}(y_i) \\ &= \frac{x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N}{N} - \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N} \cdot \frac{y_1 + \cdots + y_N}{N} \end{aligned}$$

Il *coefficiente di correlazione* di Pearson (o anche di Bravais-Pearson) delle due sequenze è invece

$$\mathrm{corr}(x_i; y_i) := \frac{\mathrm{cov}(x_i; y_i)}{\sqrt{\mathrm{var}(x_i)} \cdot \sqrt{\mathrm{var}(y_i)}} \ .$$

Questo numero è sempre compreso tra -1 e 1.

La retta di regressione. Consideriamo ora una sequenza di punti nel piano cartesiano

$$p_1 = (x_1, y_1),\ p_2 = (x_2, y_2),\ \ldots\ ,\ p_N = (x_N, y_N) \ ,$$

ed indichiamo con m la media dei valori $x_1, \ldots, x_N$. Tra tutte le rette di equazione

$$y = a(x - m) + b \ , \tag{3}$$

dove a e b sono i parametri che individuano la retta (si noti che il valore di m è fissato) si cerca quella che "meglio approssima" i punti dati. Per la precisione si cercano i valori di a e b che rendono minima la seguente quantità:

$$f(a, b) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (a(x_i - m) - y_i)^2 \ . \tag{4}$$

I valori cercati di a e b sono:

$$a_0 = \frac{\mathrm{cov}(x_i; y_i)}{\mathrm{var}(x_i)} \quad \text{e} \quad b_0 = \mathrm{media}(y_i) \ . \tag{5}$$

La retta che si ottiene dalla formula (3) prendendo al posto di a e b i valori dati in (4) si chiama *retta di regressione* (o anche retta dei minimi quadrati) associata ai punti $p_1, \ldots, p_N$.

Per questa retta, cioè per questi particolari valori a_0 e b_0, la quantità f definita dalla formula (4) vale

$$f(a_0, b_0) = \mathrm{var}(y_i) \cdot \left[1 - (\mathrm{corr}(x_i; y_i))^2\right] \ . \tag{6}$$

Pertanto la retta di regressione approssima i punti dati tanto meglio quanto più il coefficiente di correlazione si avvicina a $+1$ o a -1, e il caso peggiore possibile si ha quando il coefficiente di correlazione vale 0.

Esercizi

1. Calcolare media, mediana e varianza dei seguenti dati numerici:

   3,1 ; 2,8 ; 3,0 ; 2,6 ; 3,0 ; 3,5 ; 3,2 ; 3,4 ; 3,0 ; 3,4 .

2. Viene fatta una statistica del numero di incidenti d'auto che vedono coinvolti durante l'anno gli abitanti di un paese, ottenendo i seguenti risultati:
   nessun incidente: 94% degli abitanti;
   un incidente: 5% degli abitanti;
   due incidenti: 1% degli abitanti.
   Calcolare media, mediana e varianza del numero di incidenti per abitante.

3. Nella tabella sottostante sono riportate le statistiche degli esami dati da un certo gruppo di studenti dello stesso corso di laurea durante il primo anno di università (la tabella dice quanti studenti non hanno dato neanche un esame, quanti ne hanno dato uno solo, quanti due e così via):

esami dati:	0	1	2	3	4	5	6	7	più di 7
numero studenti:	36	4	26	34	44	30	16	10	0

   a) Determinare la frequenza relativa per ogni numero nella prima riga.

b) Calcolare il numero medio di esami per studente.
c) Calcolare la varianza del numero di esami per studente.
d) Sempre riguardo al numero di esami per studente, determinare moda e mediana.

4. Nella tabella sottostante sono riportati, per ciascuno degli otto corsi del primo anno di un certo corso di laurea, il numero di crediti ed il numero di studenti che hanno passato l'esame durante l'anno (il numero degli iscritti al primo anno è 90):

corso:	A	B	C	D	E	F	G	H
crediti:	12	3	9	6	6	6	6	12
studenti:	19	78	36	51	29	47	31	33

a) Calcolare media, mediana e varianza del numero di crediti assegnati per esame.
b) Calcolare il numero medio di esami dati per studente.
c) Calcolare il numero medio di crediti ottenuti per studente.
d) Spiegare perché, a partire dai dati a disposizione, non è possibile calcolare la mediana e la varianza del numero di esami dati per studente.
[*La spiegazione più convincente consiste nel far vedere che sono compatibili con i dati a disposizione diverse situazioni in cui la varianza e la mediana differiscono.*]

5. Calcolare la media e la varianza delle seguenti lunghezze:

$$1{,}05\,\mathrm{m}\ ;\ 60\,\mathrm{cm}\ ;\ 0{,}9\,\mathrm{m}\ ;\ 75\,\mathrm{cm}\ ;\ 950\,\mathrm{mm}\ .$$

6. a) Sapendo che le lunghezze date nell'esercizio precedente sono state calcolate con un errore di 5 mm, calcolare l'errore della media.
b) E se invece l'errore è di 2 cm per le prime tre misure e di 5 mm per le altre due?

7. Nella tabella sottostante sono riportati i redditi annui dei contribuenti di un piccolo paese, suddivisi in fasce (kEU sta per migliaia di euro):

fascia di reddito (in kEU):	0-5	5-10	10-15	15-20	20-30	30-40	40-50
numero di contribuenti:	35	14	20	33	18	10	7

a) Calcolare la frequenza relativa di ogni fascia di reddito.
b) Determinare il più piccolo intervallo di valori a cui deve appartenere il reddito medio (si noti che in mancanza di informazioni più precise non è possibile calcolarne il valore esatto).
c) I redditi in ciascuna fascia possono essere espressi con un valore più un errore (ad esempio, i redditi della fascia più alta sono pari a 45 ± 5 migliaia di euro). Calcolare la media dei redditi usando questa espressione e confrontare il risultato con quanto fatto al punto b).

8. Suddividiamo i dati numerici

$$\begin{gathered}1{,}2\ ;\ 7{,}5\ ;\ 3{,}4\ ;\ 3{,}3\ ;\ 9{,}1\ ;\ 1{,}2\ ;\ 4{,}7\ ;\ 4{,}8\ ;\ 3{,}4\ ;\ 2{,}5\ ;\\ 3{,}8\ ;\ 4{,}6\ ;\ 6{,}6\ ;\ 3{,}1\ ;\ 8{,}7\ ;\ 1{,}9\ ;\ 9{,}8\ ;\ 9{,}2\ ;\ 3{,}7\ ;\ 2{,}6\ .\end{gathered}$$

in cinque classi: la prima corrisponde ai numeri compresi tra 0 e 2, la seconda ai numeri compresi tra 2 e 4, e così via.

a) Calcolare la frequenza assoluta e relativa di ciascuna classe.

b) Determinare la classe mediana e la classe modale.

c) Calcolare la media di questi dati.

d) I dati nella prima classe sono approssimabili come 1 ± 1, quelli nella seconda sono approssimabili come 3 ± 1, e così via. Calcolare la media di questi dati utilizzando questa approssimazione e confrontare il risultato con la media esatta.

9. Calcolare il coefficiente di correlazione per le sequenze di valori di x e y date sotto:

x:	1,1	1,1	1,4	1,9	2,6	3,1	3,1	3,4	3,9	4,6
y:	-5,1	-5,4	-4,2	-3,3	-2,4	-1,1	-1,3	0,2	1,3	2,4

10. Si considerino le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	-1	0	2	3	6
y:	2,5	2	1	0,5	-1

a) Calcolare media(x_i), var(x_i), media(y_i), var(y_i), cov($x_i; y_i$), corr($x_i; y_i$).

b) Scrivere l'equazione della retta di regressione corrispondente ai punti (x_i, y_i).

c) Disegnare nel piano cartesiano la retta di regressione ed i punti dati.

11. Ripetere quanto fatto nell'esercizio precedente per le tabelle

a)

x:	-1	0	2	3	6
y:	2,6	2,1	1	0,4	$-1,1$

,

b)

x:	1	4	7	2	6
y:	5	3	5	1	1

.

12. Trovare la costante a per cui la funzione $y = ax^2$ approssima meglio le sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella:

x:	4	1,5	2,2	3,2	2,5	1
y:	7,7	1,1	2,4	5,4	2,9	0,7

[*Si suggerisce di cercare la costante che meglio approssima i valori del rapporto* y/x^2, *vale a dire i numeri* 0,481 ; 0,489 ; 0,496 ; 0,527 ; 0,464 ; 0,7 . *Quale quantità dobbiamo valutare per capire se si tratta di una buona approssimazione?*]

13. a) Si disegna il grafico di una funzione $y = f(x)$ utilizzando la scala logaritmica in base 10 nella variabile y e si ottiene una retta con pendenza (coefficiente angolare) m. Far vedere che in tal caso $f(x)$ deve essere una funzione esponenziale della forma $f(x) = ab^x$ con $b = 10^m$.

b) Come al punto a), tranne che si usa la scala logaritmica in base 2 per entrambe le variabili. Far vedere che in tal caso $f(x)$ deve essere una potenza della forma $f(x) = ax^m$.

c) Come al punto a), tranne che si usa la scala logaritmica in base e per la variabile x e la scala solita per la variabile x. Che forma deve avere $f(x)$ in questo caso?

14. a) Riportare su un grafico cartesiano i punti definiti dalle sequenze di valori di x e y date nella seguente tabella utilizzando la scala logaritmica in base 2 per la variabile y:

x:	4	-1	0	1	3	-2
y:	7,6	0,2	0,5	1,1	4,2	0,1

b) Trovare con il metodo dei minimi quadrati la retta che meglio approssima i punti così disegnati.
c) Calcolare il coefficiente di correlazione necessario a capire se la retta trovata al punto b) fornisce o meno una buona approssimazione dei punti disegnati.
d) Utilizzare quanto fatto al punto b) per scrivere la funzione esponenziale della forma $y = ab^x$ che meglio approssima i dati forniti sopra.

15. a) Riportare su un grafico cartesiano i punti definiti dalle seguenti coppie di valori di x e y:

x:	0,9	1,1	3,1	5,3	6	8,1
y:	9,9	9,6	4,7	2,2	1,7	0,8

b) Ripetere l'operazione utilizzando la scala logaritmica in base 2 per la variabile y.
c) Ripetere l'operazione utilizzando la scala logaritmica in base 2 per entrambe le variabili.
d) In quale dei tre casi i punti disegnati sono meglio allineati? Rispondere a questa domanda calcolando gli opportuni coefficienti di correlazione.
e) Utilizzare quanto fatto al punto d) per decidere se i dati nella tabella sopra sono meglio approssimati da una legge di tipo lineare ($y = ax + b$), di tipo esponenziale ($y = ab^x$) oppure di tipo potenza ($y = ax^b$).
f) Trovare con il metodo dei minimi quadrati le rette che meglio approssimano i punti disegnati nei tre casi indicati sopra. Scrivere le corrispondenti leggi di tipo lineare, esponenziale e potenza.

16. Sono dati dei numeri $x_1, \dots, x_N$ compresi tra m_1 ed m_2. Dimostrare che anche la media aritmetica di questi numeri è compresa tra m_1 ed m_2. Far vedere che vale lo stesso discorso se al posto della media aritmetica si considera una qualunque media pesata.

17. Dimostrare la formula (1). [*Esercizio svolto a lezione.*]

18. Sono dati un numero reale c, e due sequenze $x_1, \dots, x_N$ e $y_1, \dots, y_N$. Dimostrare che:
a) $\mathrm{media}(x_i + c) = \mathrm{media}(x_i) + c$;
b) $\mathrm{var}(x_i + c) = \mathrm{var}(x_i)$;
c) $\mathrm{media}(c\,x_i) = c\,\mathrm{media}(x_i)$;
d) $\mathrm{var}(c\,x_i) = c^2\mathrm{var}(x_i)$;
e) $\mathrm{media}(x_i + y_i) = \mathrm{media}(x_i) + \mathrm{media}(y_i)$;
f) $\mathrm{var}(x_i + y_i) = \mathrm{var}(x_i) + \mathrm{var}(y_i) + 2\mathrm{cov}(x_i; y_i)$.

19. Far vedere che se i numeri $x_1, \dots, x_N$ sono tutti uguali allora la loro varianza σ^2 è uguale a 0. Viceversa se $\sigma^2 = 0$ allora i numeri $x_1, \dots, x_N$ sono necessariamente tutti uguali.

20. Far vedere che se il coefficiente di correlazione $\mathrm{corr}(x_i; y_i)$ è uguale a 1 o -1 allora esiste una retta che contiene tutti i punti (x_i, y_i). Viceversa, se i punti (x_i, y_i) appartengono alla stessa retta allora $\mathrm{corr}(x_i; y_i) = \pm 1$.

21. Utilizzare la formula (6) ed il fatto che la funzione f è sempre positiva (come risulta chiaramente dalla (4)) per dimostrare che il coefficiente di correlazione è un numero sempre compreso tra -1 e 1.

22. La formula (5) per il coefficiente angolare a della retta di regressione è priva di significato quando $\mathrm{var}(x_i) = 0$. Far vedere che in tal caso i punti (x_i, y_i) appartengono tutti alla stessa retta verticale.

1. Determinare il dominio di definizione e la derivata delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } e^{2x} + x\sin x\ , \quad \text{b) } \sqrt{x+1}\ , \quad \text{c) } \sqrt[3]{2x}\ , \quad \text{d) } \frac{1}{(1+x)^4}\ , \quad \text{e) } x^3\log x\ ,$$

$$\text{f) } \arctan(x^2)\ , \quad \text{g) } \sin^3 x\ , \quad \text{h) } \log(\cos x)\ , \quad \text{i) } \sin(2\pi x^2)\ , \quad \text{l) } \frac{1+x^2}{1-x^2}\ ,$$

$$\text{m) } \frac{1}{\sqrt{\log x}}\ , \quad \text{n) } \log(\log x)\ , \quad \text{o) } \frac{\log(\cos x)}{\sin x}\ , \quad \text{p) } (\sin x^2)^2\ , \quad \text{q) } e^{\sin(\log x)}\ .$$

2. Fatte le dovute semplificazioni, calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } \sqrt{x^4}\ , \quad \text{b) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\ , \quad \text{c) } \log(e^x)\ , \quad \text{d) } \sin^2(1/x)+\cos^2(1/x)\ , \quad \text{e) } \sin(\arcsin(2x))\ ,$$

$$\text{f) } e^{2\log x}\ , \quad \text{g) } \log(x^2+2x^4)-\log(x+2x^3)\ , \quad \text{h) } 2^{1-2x}4^x\ , \quad \text{i) } \log\left(\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\right)\ .$$

3. a) Verificare che $x^x = e^{x\log x}$.
   b) Calcolare la derivata di x^x.
   c) Calcolare la derivata di $(x^x)^x$.

4. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico di $y = e^{-x}$ nei punti di ascissa $0, 1, -1$.

5. Trovare il numero a per cui la retta tangente al grafico della funzione $y = e^x$ nel punto di ascissa a passa anche per l'origine.

6. Dato $a > 0$, calcolare l'area del triangolo T_a delimitato dagli assi cartesiani e dalla retta tangente al grafico di $y = 1/x$ nel punto di ascissa a.

7. Tra tutte le retta tangenti al grafico di $y = \log x$, trovare quella che passa per l'origine.

8. Determinare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} x^x\ , \quad \text{b) } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+4}\ , \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} 1+e^{-3x}\ , \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} 1+x^3\sin x\ ,$$

$$\text{e) } \lim_{x\to+\infty}\arctan x\ , \quad \text{f) } \lim_{x\to+\infty} x^{x+1}\ , \quad \text{g) } \lim_{x\to+\infty} 1-x\log x\ , \quad \text{h) } \lim_{x\to 0}\log(1-\cos x)$$

,

$$\text{i) } \lim_{x\to+\infty} e^{-2/x}\ , \quad \text{l) } \lim_{x\to-\infty}\arctan(1+x^3)\ , \quad \text{m) } \lim_{x\to+\infty} x^3e^x\ , \quad \text{n) } \lim_{x\to-\infty}\cos(e^x)\ ,$$

$$\text{p) } \lim_{x\to+\infty}\log(\log x)\ , \text{ q) } \lim_{x\to 0^+}\sqrt{1-\log x}\ , \quad \text{r) } \lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\sin x}\ , \quad \text{s) } \lim_{x\to+\infty} 2\sin(1/x^3)\ .$$

9. Per ciascuna delle seguenti funzioni, studiare il segno della derivata, trovare i punti in cui questa si annulla e dire se si tratta di punti di massimo locale, minimo locale o altro:

$$\text{a) } x^2-2x+3\ , \quad \text{b) } \log(x^2+1)\ , \quad \text{c) } e^{-x^2}\ , \quad \text{d) } x^4+2x^2+3\ .$$

10. Per ciascuna delle funzioni date nell'esercizio precedente, calcolare i limiti quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$ e disegnarne sommariamente il grafico.

11. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono crescenti, decrescenti, o altro:
$$\text{a) } e^{1-2x} \ , \quad \text{b) } x^2(1+x) \ , \quad \text{c) } \arctan(1-x^3) \ , \quad \text{d) } \log(1/x) \ , \quad \text{e) } e^{\sin x} \ .$$

12. Per ciascuna delle prime tre funzioni date nell'esercizio precedente, calcolare i limiti quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$ e disegnarne sommariamente il grafico.

13. Per ciascuna delle seguenti funzioni, dire se sono convesse, concave, o altro:
$$\text{a) } x - e^x \ , \quad \text{b) } e^{(x^2)} \ , \quad \text{c) } \sin x \ , \quad \text{d) } 2 + x - x^4 \ , \quad \text{e) } \frac{1}{1+x^6} \ , \quad \text{f) } e^x + e^{-x} \ .$$

14. Disegnare il grafico di $f(x) := \dfrac{1}{1+x^4}$.

15. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x) = x^3(4-3x)$ relativamente all'intervallo $0 \le x \le 2$.

16. Trovare i punti di massimo e di minimo della funzione $f(x) = x^3 - 12x$ relativamente all'intervallo $-3 \le x \le 5$.

17. a) Disegnare il grafico della funzione $y = x^3 - 3x - 1$ relativamente all'intervallo $-2 \le x \le 3$.
b) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x - 1 = 0$ comprese tra -2 e 3.
c) Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x - 1 = a$ comprese tra -2 e 3.

18. a) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x(e^x - e)$ per $x > 0$.
b) Discutere al variare del parametro reale a il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$.

19. a) Per ogni numero reale $a \ge 0$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = e^{-x}$ nel punto di ascissa a, e quindi calcolare l'area del triangolo delimitato da tale retta e dagli assi cartesiani.
b) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere massima.
c) Determinare per quale valore di a tale area risulta essere minima.

20. Tra tutti i triangoli rettangoli di perimetro 1 trovare quello di area massima.

21. Tra tutti i triangoli rettangoli di area 1 trovare quello di perimetro minimo.

22. a) Disegnare approssimativamente il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 2$ relativamente alla semiretta $x \ge 0$.
a) Dimostrare che $x^3 - 3x + 2 \ge 0$ per ogni numero reale $x \ge 0$.
b) Dimostrare che $y^3 + 2z^3 \ge 3yz^2$ per ogni coppia di numeri reali positivi y, z. [*Suggerimento: dividere la disuguaglianza da dimostrare per z^3 e usare il punto b).*]

Richiamo delle nozioni fondamentali

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, si dice che $f(x)$ è *trascurabile* rispetto a $g(x)$ quando x tende ad un dato x_0 (che può essere anche $\pm\infty$) se si verifica che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ ;$$

in tal caso si scrive $f(x) \ll g(x)$ oppure anche $f(x) = o(g(x))$ – quest'ultima espressione si legge "$f(x)$ è *o piccolo* di $g(x)$". Si dice invece che $f(x)$ è *asintoticamente equivalente* a $g(x)$ per x che tende ad x_0, e si scrive $f(x) \sim g(x)$, se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \ .$$

Si ricordi che $f(x)$ è asintoticamente equivalente a $g(x)$ se e solo se è possibile scrivere f come g più un resto trascurabile rispetto a g stessa, ovvero se $f(x) = g(x) + o(g(x))$. Si noti che queste nozioni, come pure quelle che seguono, vengono solitamente utilizzate per confrontare due funzioni che tendono entrambe a zero oppure entrambe a infinito.

Quando $f(x)$ è asintoticamente equivalente per $x \to x_0$ ed una funzione $g(x)$ particolarmente semplice o significativa, allora quest'ultima viene talvolta chiamata *parte principale* di $f(x)$ (per $x \to x_0$). In particolare la potenza ax^b è la parte principale di $f(x)$ per $x \to 0$ (o analogamente per $x \to \pm\infty$) quando

$$f(x) \sim ax^b \quad \text{ovvero} \quad f(x) = ax^b + o(x^b) \ .$$

Altro fatto da tener presente è che nel calcolare il limite di un prodotti (o rapporto) di funzioni, il risultato non cambia se si sostituisce ad uno o più fattori una funzione asintoticamente equivalente (questo è noto come principio di sostituzione degli infinito / infinitesimi). In particolare conviene sostituire ciascun fattore con la sua parte principale.

Quando x tende a $+\infty$, le diverse funzioni elementari che tendono a infinito (o a zero) possono essere confrontate tra di loro: si verifica facilmente che $x^a \ll x^b$ e $a^x \ll b^x$ se $a < b$; inoltre

$$\log x \ll x^a \ll b^x \quad \text{per ogni } a > 0 \text{ e } b > 1. \tag{1}$$

Viceversa per x che tende a zero si ha $x^a \ll x^b$ se $b < a$ e

$$\log x \ll x^{-a} \quad \text{per ogni } a > 0. \tag{2}$$

Regola di de L'Hôpital. Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ che tendono entrambe a 0 o entrambe a $\pm\infty$ quando $x \to x_0$, allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Questa regola può risultare utile quando si vuole verificare se due funzioni sono asintoticamente equivalenti oppure trascurabili una rispetto all'altra; in particolare la si usa per dimostrare le formule (1) e (2).

Sviluppo di Taylor. Data una funzione $f(x)$ ed un numero intero positivo d, si ha che $f(x)$ si può scrivere come un polinomio di grado minore o uguale a d più un resto "piccolo" per $x \to 0$: per la precisione si ha che

$$f(x) = P_d(x) + o(x^d) \quad \text{per } x \to 0, \tag{3}$$

dove

$$P_d(x) := f(0) + \frac{D^1 f(0)}{1!} x^1 + \frac{D^2 f(0)}{2!} x^2 + \cdots \frac{D^d f(0)}{d!} x^d \ ;$$

in quest'ultima formula $D^n f(x)$ indica la derivata di ordine n di f e $D^n f(0)$ indica il valore in 0 di questa derivata, mentre $n!$ indica il fattoriale di n, vale a dire il prodotto $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. La formula (3) si chiama *sviluppo di Taylor* all'ordine d di $f(x)$ in 0, mentre $P_d(x)$ è il *polinomio di Taylor* all'ordine d di $f(x)$ in 0.

Lo sviluppo di Taylor è uno strumento utile per calcolare la parte principale di una funzione per $x \to 0$. In particolare è utile ricordare gli sviluppi di Taylor di alcune funzioni elementari: per ogni intero d si ha

$$\begin{aligned}
& e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^d}{d!} + o(x^d) \ , \\
& \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+1}) \quad (d \text{ intero pari}), \\
& \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \pm \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+1}) \quad (d \text{ intero dispari}), \\
& \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^d + o(x^d) \ , \\
& \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^d + o(x^d) \ , \\
& \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^d}{d} + o(x^d)
\end{aligned}$$

(il simbolo $\pm$ indica un segno che può essere positivo o negativo a seconda della scelta di d; si noti che le formule per le funzioni coseno e seno valgono solo per d rispettivamente pari e dispari).

Esercizi

1. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a)} \lim_{x \to -\infty} e^{2x} \ ; \quad \text{b)} \lim_{x \to +\infty} \sqrt[4]{3x} \ ; \quad \text{c)} \lim_{x \to 1^+} 1/(1-x)^3 \ ; \quad \text{d)} \lim_{x \to 1} 1/(1-x)^4 \ ;$$

$$\text{e)} \lim_{x \to 0} \cos(\pi e^x) \ ; \quad \text{f)} \lim_{x \to \pi} \tan(x/4) \ ; \quad \text{g)} \lim_{x \to 0^+} \log^2 x \ ; \quad \text{h)} \lim_{x \to 0^+} \log(\sqrt{x}) \ ;$$

$$\text{i)} \lim_{x \to +\infty} \arctan(e^x) \ ; \quad \text{l)} \lim_{x \to 0^-} \arctan(1/x) \ ; \quad \text{m)} \lim_{x \to +\infty} x^2 \log x \ .$$

2. Dire se esistono i seguenti limiti, ed in caso affermativo calcolarli:

$$\text{a)} \lim_{x \to 0} x^{-2} \ ; \quad \text{b)} \lim_{x \to +\infty} \sin x \ ; \quad \text{c)} \lim_{x \to -\infty} e^{\cos x} \ ; \quad \text{d)} \lim_{x \to \pi/2} (\tan x)^4 \ ;$$

$$\text{e)} \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x} \ ; \quad \text{f)} \lim_{x \to 0} e^{1/x} \ ; \quad \text{g)} \lim_{x \to 1} \arctan(1/x^2) \ ; \quad \text{h)} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 \log x} \ ;$$

$$\text{i)} \lim_{x \to 0^+} \sin(\log x) \ ; \quad \text{l)} \lim_{x \to +\infty} \cos(1/\log x) \ ; \quad \text{m)} \lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} \ ; \quad \text{n)} \lim_{x \to 0^+} e^{\sqrt{x}} \ .$$

[*Per intendersi, il limite di $1/x$ per $x \to 0$ non esiste perché questa funzione tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$ e tende a $-\infty$ per $x \to 0^-$.*]

3. Calcolare i seguenti limiti utilizzando la regola di de L'Hôpital:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{\log x} \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x} \ ; \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^3)}{x^2} \ ;$$

$$\text{e) } \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4+2x^2+5}{x^4+3x+1} \ ; \text{ f) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{\sin(x^3)} \ ; \quad \text{g) } \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{\log^3 x} \ ; \quad \text{h) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2/x)}{\tan(3/x)} \ .$$

$$\text{i) } \lim_{x\to+\infty} x(\pi - 2\arctan x) \ ; \text{ l) } \lim_{x\to 0^+} x\log x \ ; \quad \text{m) } \lim_{x\to-\infty} x^2 e^x \ .$$

4. Calcolare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0^+} x^a \log x \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} x^a e^x \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} e^{ax}\log x \ ; \quad \text{d) } \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^a}{\log\log x} \ .$$

5. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to+\infty} x^5 e^{-2x} \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} x^4 e^{1/x} \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^4 4^x} \ ; \quad \text{d) } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\log x}{2^x+\cos x} \ ;$$

$$\text{e) } \lim_{x\to-\infty} x^4 2^x \ ; \quad \text{f) } \lim_{x\to 0^+} x^2\log^3 x \ ; \quad \text{g) } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(x+2)^{10}} \ ; \quad \text{h) } \lim_{x\to+\infty} 2^{-3x}\log x \ .$$

6. Calcolare i seguenti limiti utilizzando il fatto che $\sin x$, $e^x - 1$ e $\log(1+x)$ sono asintoticamente equivalenti a x per $x \to 0$, mentre $1-\cos x$ è asintoticamente equivalente a $x^2/2$:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin(3x)} \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{\sin^5 x}{x^5} \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{(4x^4)}-1}{\cos(2x^2)-1} \ ; \quad \text{d) } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\log(1+\sin x)} \ .$$

7. Calcolare i seguenti limiti:

$$\text{a) } \lim_{x\to\pi} \frac{1+\cos x}{\sin x} \ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} x^2\sin(1/x) \ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to+\infty} 2^{-x}\log x \ ;$$

$$\text{d) } \lim_{x\to 0^+} \log(2x) - \log x \ ; \quad \text{e) } \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin^2 x} \ ; \quad \text{f) } \lim_{x\to+\infty} \frac{2^x+1}{x^{10}-1} \ ;$$

$$\text{g) } \lim_{x\to+\infty} \frac{4^x}{1+3^x} \ ; \quad \text{h) } \lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{1+3^x} \ ; \quad \text{i) } \lim_{x\to+\infty} e^{x/\log x} \ ; \quad \text{l) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{(\log\log x)^2} \ .$$

8. a) Partendo dalla definizione, trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 di $(1+x)^{1/2}$.
b) Trovare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 2 di $(1+x)^a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

9. Partendo dagli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari dati sopra, calcolare lo sviluppo di Taylor di ordine 8 (in 0) delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } \frac{1}{1-x^4} \ ; \quad \text{b) } e^{2x^3} \ ; \quad \text{c) } \frac{1}{1+2x^2} \ ; \quad \text{d) } e^{-x^2} \ ; \quad \text{e) } x^3\sin x \ ; \quad \text{f) } \log(1-2x^2) \ .$$

10. a) Calcolare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine d di $1/(1+x^2)$.
b) Utilizzando il fatto che la derivata di $\arctan x$ è $1/(1+x^2)$, calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine d di $\arctan x$ (in 0).
c) Utilizzando quanto fatto al punto b), mostrare che $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$

11. Calcolare lo sviluppo di Taylor (in 0) all'ordine 6 delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } \tan(x^2)\ ; \quad \text{b) } \sqrt{1+x^3}\ ; \quad \text{c) } (x-\sin x)^2\ ; \quad \text{d) } \log(\cos(x^3))\ ; \quad \text{e) } e^{x^3}-e^{-x^3}\ .$$

12. Determinare la parte principale per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } e^{2x}-1\ ; \quad \text{b) } e^x+e^{-x}-2\ ; \quad \text{c) } \sin(x^4)-x^4\ ; \quad \text{d) } \sqrt{1+x^2}-1\ ;$$

$$\text{e) } \frac{1}{\sin x}\ ; \quad \text{f) } \frac{1}{\cos x}-1\ ; \quad \text{g) } \frac{x^2}{2-x^2}\ ; \quad \text{h) } \sqrt{1+x}-1\ ; \quad \text{i) } (x-\sin x)^3\ .$$

13. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ delle seguenti funzioni:

$$\text{a) } \frac{x+1}{x^2+2}\ ; \quad \text{b) } x\,\sin(1/x^2)\ ; \quad \text{c) } \frac{1}{x^5-1}-\frac{1}{x^5+1}\ ; \quad \text{d) } \sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\ .$$

[*Suggerimento: applicare il cambio di variabile $x = 1/t$ e poi determinare con i metodi già visti la parte principale per $t \to 0$ della funzione così ottenuta; riportare infine il risultato nella variabile x.*]

14. Determinare la parte principale per $x \to +\infty$ della funzione $f(x) := \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
[*Mettere in evidenza $\sqrt{x}$ e poi ricondursi alla funzione nel punto d) dell'esercizio precedente.*]

15. Determinare la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) := \dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$.
[*Scrivere $f(x)$ come un'unica frazione e calcolare separatamente le parti principali di numeratore e denominatore.*]

16. Calcolare i seguenti limiti determinando le parti principali delle funzioni considerate:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0}\frac{x\,\sin x}{1-\cos x}\ ; \quad \text{b) } \lim_{x\to +0}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\ ; \quad \text{c) } \lim_{x\to +\infty} x\left[1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right]\ .$$

17. Dimostrare le seguenti affermazioni (si sottintende sempre che x tenda ad un fissato x_0):
a) se $f(x) \sim g(x)$ e $g(x) \sim h(x)$, allora $f(x) \sim h(x)$;
b) se $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$, allora $f_1(x)\cdot f_2(x) \sim g_1(x)\cdot g_2(x)$;
c) se $f_1(x) \sim g_1(x)$ e $f_2(x) \sim g_2(x)$, allora $f_1(x)/f_2(x) \sim g_1(x)/g_2(x)$.

18. Dimostrare le seguenti "regole" riguardanti l'uso della notazione "o" piccolo (si sottintende sempre che x tenda ad un fissato x_0):
a) se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) = o(h(x))$, allora $f(x) = o(h(x))$;
b) se $f(x) = o(g(x))$ e $g(x) \sim c\cdot h(x)$ con c costante diversa da 0, allora $f(x) = o(h(x))$;
c) se $f_1(x) = o(g(x))$ e $f_2(x) = o(g(x))$, allora $f_1(x)+f_2(x) = o(g(x))$;
d) se $f_1(x) = o(g_1(x))$ e $f_2(x) = o(g_2(x))$, allora $f_1(x)\cdot f_2(x) = o(g_1(x)\cdot g_2(x))$;
e) se $f_1(x) = o(g(x))$, allora $f_1(x)\cdot f_2(x) = o(g(x)\cdot f_2(x))$.

1. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la tabella delle primitive elementari:

$$\text{a)} \int_0^2 e^x \, dx \ ; \quad \text{b)} \int_1^e \log x \, dx \ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi \sin x \, dx \ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} \ .$$

2. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando un opportuno cambio di variabile:

$$\text{a)} \int_0^2 e^{-x} \, dx \ ; \quad \text{b)} \int_0^\pi \sin(ax) \, dx \ ; \quad \text{c)} \int_0^1 (1+3x)^{-1/2} \, dx \ ; \quad \text{d)} \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+4x^2} \ ;$$

$$\text{e)} \int_{-1}^1 x \, e^{1+ax^2} \, dx \ ; \quad \text{f)} \int_0^1 \frac{\log^4 x}{x} \, dx \ ; \quad \text{g)} \int_0^1 x^2 \left(1+x^3\right)^a dx \ ; \quad \text{h)} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} \, dx$$

.

In questo esercizio, come in quelli che seguono, a indica un generico numero reale positivo.

3. Calcolare i seguenti integrali definiti utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\text{a)} \int_0^1 x e^x \, dx \ ; \quad \text{b)} \int_1^e (1+x^a) \log x \, dx \ ; \quad \text{c)} \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx \ ; \quad \text{d)} \int_1^e \frac{\log x}{x^a} \, dx \ .$$

4. Calcolare le seguenti primitive utilizzando un opportuno cambio di variabile:

$$\text{a)} \int e^{3x} \, dx \ ; \quad \text{b)} \int \sqrt{1-x} \, dx \ ; \quad \text{c)} \int \frac{x}{1+x^4} \, dx \ ; \quad \text{d)} \int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \ ;$$

$$\text{e)} \int \frac{1}{1+4x^2} \, dx \ ; \quad \text{f)} \int x\sqrt{1-x^2} \, dx \ ; \quad \text{g)} \int \cos^a x \, \sin x \, dx \ .$$

5. Calcolare le seguenti primitive utilizzando la formula di integrazione per parti:

$$\text{a)} \int \log^2 x \, dx \ ; \quad \text{b)} \int x e^{-2x} \, dx \ ; \quad \text{c)} \int x^2 \cos x \, dx \ ; \quad \text{d)} \int e^x \sin x \, dx.$$

6. Calcolare le seguenti primitive:

$$\text{a)} \int \log(x^a) \, dx \ ; \quad \text{b)} \int 3x^2 + e^{2x} \, dx \ ; \quad \text{c)} \int x \sin(2x) \, dx \ ; \quad \text{d)} \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx \ .$$

7. Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$\text{a)} \int_0^2 \log x \, dx \ ; \quad \text{b)} \int_0^\infty \frac{dx}{e^x} \ ; \quad \text{c)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \ ; \quad \text{d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} \ ; \quad \text{e)} \int_1^\infty x^{-a} \, dx \ .$$

8. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 x \, dx$.

   [*Usare l'identità* $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, *oppure scrivere* $\cos^2 x$ *come* $1 - \sin x \cdot \sin x$ *ed integrare il secondo termine per parti.*]

9. Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$. [*Usare il cambio di variabile* $x = \sin t$.]

10. Calcolare la primitiva $\displaystyle\int \sin^3 x \, dx$.

[*Scrivere* $\sin^3 x$ *come* $\sin x(1-\cos^2 x)$ *ed usare il cambio di variabile* $t = \cos x$.]

11. Disegnare la figura piana A delimitata dai grafici delle funzioni $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$ e calcolarne l'area.

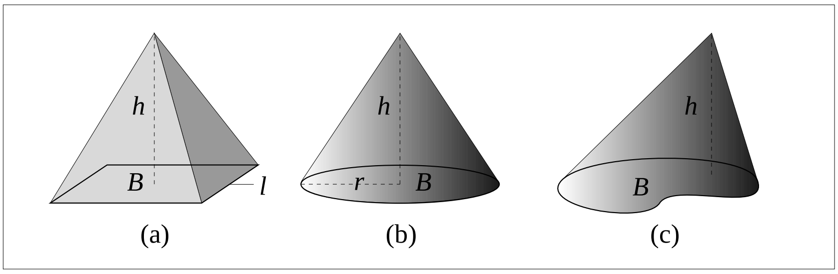
12. Disegnare la figura piana A data dai punti (x, y) tali che $|y| \leq e^x$ e $x \leq 0$, e calcolarne l'area.

13. Disegnare la figura piana A data dai punti (x, y) tali che $1-\cos x \leq y \leq \cos x$ e $0 \leq x \leq 2\pi$, e calcolarne l'area.

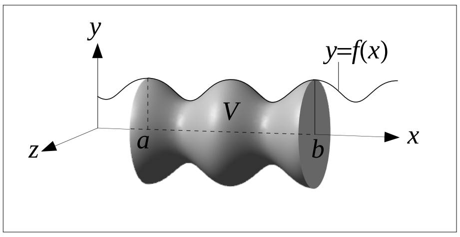
14. a) Sia V una piramide retta con base quadrata B di lato l ed altezza h (disegno (a) nella figura sottostante). *Dimostrare* che il volume di V è dato dalla nota formula

$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{1}{3}\,\mathrm{Area}(B) \cdot h \ . \tag{1}$$

b) Dimostrare che la formula (1) vale anche per un cono retto (disegno (b)).
c) Dimostrare che la (1) vale anche per un cono con base non circolare (disegno (c)).



15. Sia f una funzione positiva, e siano a, b numeri reali con $a < b$. Sia V il solido delimitato dalla superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare il grafico $y = f(x)$ attorno all'asse x, e dai piani perpendicolari all'asse delle x passanti per il punto di ascissa a ed il punto di ascissa b (si veda la figura accanto).



a) Dimostrare che il volume di V è dato dalla formula

$$\mathrm{Vol}(V) = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2\, dx \ . \tag{2}$$

b) Calcolare esplicitamente il volume di V nel caso in cui $f(x) := 2+\cos x$, $a := 0$, $b := 2\pi$.
c) Usare la formula (2) per calcolare il volume della sfera di raggio r.
d) Usare la formula (2) per calcolare il volume del cono retto di altezza h e raggio di base r.

Richiamo delle nozioni fondamentali

L'incognita da determinare in un'equazione differenziale è una funzione (e non un numero) che indicheremo solitamente con $y(t)$, o semplicemente y. L'equazione è un'identità che coinvolge la funzione y e le sue derivate $\dot{y}$, $\ddot{y}\dots$, e una soluzione è una qualunque funzione y che soddisfa questa identità per tutti i valori di t nel suo dominio di definizione. Un esempio di equazione differenziale è $\ddot{y}(t)+y(t)\ \log(t+\dot{y}(t)) = y^2(t)$. Per semplificare la notazione si omette di esplicitare la dipendenza di y dalla variabile indipendente t, scrivendo quindi y al posto di $y(t)$ e così via. L'equazione precedente diventa quindi $\ddot{y} + y\log(t+\dot{y}) = y^2$.

Equazioni differenziali del primo ordine. Si chiamano *equazioni differenziali del primo ordine* tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\dot{y} = f(t,y) \ , \tag{1}$$

vale a dire quelle per cui si riesce ad esprimere la derivata $\dot{y}$ tramite una formula che coinvolge t, y e nessuna derivata di y.

Tipicamente le soluzioni dell'equazione differenziale del primo ordine (1) sono una famiglia infinita di funzioni dipendente da un parametro. Inoltre, scelti dei numeri t_0 e y_0, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (1) che soddisfa la *condizione iniziale*

$$y(t_0) = y_0 \ . \tag{2}$$

Quanto appena affermato è il contenuto del teorema di esistenza ed unicità per le equazioni differenziali del primo ordine. In effetti non si tratta di un enunciato che vale in tutte le possibili situazioni, ma darne una versione precisa è abbastanza complicato e non lo faremo.

Bisogna qui osservare che la maggior parte delle equazioni differenziali non può essere risolto con formule esplicite ma solo numericamente, vale a dire utilizzando un calcolatore per tracciare il grafico delle soluzioni. Tra le poche equazioni del primo ordine che si possono risolvere esplicitamente considereremo solo due classi: equazioni a variabili separabili ed equazioni lineari.

Equazioni a variabili separabili. Un'equazione differenziale si dice *a variabili separabili* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{y} = g(y)\cdot h(t) \ . \tag{3}$$

Per risolvere quest'equazione, portiamo $g(y)$ a sinistra dell'uguale, e quindi calcolando gli integrali indefiniti (primitive) di entrambe i membri dell'equazione così utilizzando il cambio di variabile $y = y(t)$ per quello di sinistra:

$$\frac{\dot{y}}{g(y)} = h(t) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\dot{y}}{g(y)}\,dt = \int h(t)\,dt + c \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)\,dt + c$$

(la costante c è dovuta al fatto che la primitiva di una funzione è univocamente determinata a meno di una costante arbitraria). Supponendo di aver trovato una primitiva $G(y)$ di $1/g(y)$ ed una primitiva $H(t)$ di $h(t)$, otteniamo quindi

$$G(y) = H(t) + c \ . \tag{4}$$

Per concludere basta quindi esplicitare y. Supponendo di conoscere un'inversa F della funzione G, applichiamo la F ad entrambi i membri della (4): ricordando che per la definizione di funzione inversa $F(G(y)) = y$, otteniamo infine la formula risolutiva

$$y(t) = F(H(t) + c) \ , \tag{5}$$

dove, lo ricordo, c è un qualunque numero reale. Abbiamo dunque una famiglia di soluzioni che dipende dal parametro c.

Concludiamo questo paragrafo con due osservazioni.

a) Nella soluzione appena proposta, si è supposto implicitamente che la funzione g non si annulli mai, in modo da poter liberamente dividere per $g(y)$. Nel caso che la funzione g assuma il valore 0 in qualche punto il discorso diventa leggermente più complicato.

b) Se oltre all'equazione (3) viene specificata anche una condizione iniziale tipo la (2), è possibile determinare il valore di c che appare nelle formule (4) e (5): ponendo $t = t_0$ nella (4) si ottiene infatti l'identità $G(y_0) = H(t_0) + c$ da cui si ricava $c = G(y_0) - H(t_0)$.

Equazioni lineari del primo ordine. Un'equazione del primo ordine si dice *lineare* se può essere ricondotta alla forma

$$\dot{y} + a(t)\, y = b(t) \ . \tag{6}$$

Per risolvere questa equazione la moltiplichiamo per il fattore $e^{A(t)}$ dove $A(t)$ è una qualunque primitiva della funzione $a(t)$. In questo modo il termine di sinistra dell'equazione coincide con la derivata del prodotto $e^{A(t)}y$:

$$e^{A(t)}\dot{y} + a(t)e^{A(t)}y = e^{A(t)}b(t) \quad \Rightarrow \quad \big(e^{A(t)}y\big)' = e^{A(t)}b(t) \ .$$

Quindi $e^{A(t)}y$ deve essere una primitiva di $e^{A(t)}b(t)$, vale a dire

$$e^{A(t)}y = \int e^{A(t)}b(t)\, dt + c$$

e dividendo per $e^{A(t)}$ otteniamo infine la formula risolutiva generale

$$y(t) = e^{-A(t)}\left[\int e^{A(t)}b(t)\, dt + c\right] \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Vale la pena di sottolineare alcuni casi particolari di questa formula: se la funzione $b(t)$ è identicamente nulla (nel qual caso l'equazione (6) si dice *omogenea*) allora la (7) diventa

$$y(t) = ce^{-A(t)} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7'}$$

Se invece a è una costante e cioè non dipende da t (nel qual caso l'equazione (6) si dice *a coefficienti costanti*), allora la (7) diventa

$$y(t) = e^{-at}\left[\int e^{at}b(t)\, dt + c\right] \quad \text{con } c \in \mathbb{R}. \tag{7''}$$

Equazioni del secondo ordine. Si chiamano *equazioni differenziali del secondo ordine* tutte quelle che si possono ricondurre alla forma

$$\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}) \ , \tag{8}$$

vale a dire quelle per cui si riesce ad esprimere la derivata seconda $\ddot{y}$ tramite una formula che coinvolge t, y, $\dot{y}$ e nessun'altra derivata di y.

Tipicamente le soluzioni dell'equazione differenziale (8) sono una famiglia di funzioni dipendente da *due* parametri. In questo caso il teorema di esistenza ed unicità dice che sotto opportune ipotesi, scelti dei numeri t_0, y_0 e y_1, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione (8) che soddisfa le condizioni iniziali

$$y(t_0) = y_0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(t_0) = y_1 \ . \tag{9}$$

Come prima, non daremo un enunciato preciso di questo teorema.

Equazioni lineari del secondo ordine. Tra le equazioni del secondo ordine ci limiteremo a considerare quelle *lineari*, vale a dire quelle che possono essere ricondotte alla forma

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c(t) \ . \tag{10}$$

Le funzioni $a(t)$ e $b(t)$ vengono talvolta chiamate *coefficienti* dell'equazione, mentre $c(t)$ viene detta *termine noto*.

L'equazione lineare (10) si dice *omogenea* se il termine noto $c(t)$ è identicamente nullo. Si dice invece *a coefficienti costanti* se a e b sono costanti, vale a dire non dipendono da t. Infine si chiama *equazione omogenea associata* associata alla (10) la stessa equazione differenziale con 0 al posto di $c(t)$.

Di fatto risolveremo solo le equazioni a coefficienti costanti omogenee ed quelle a coefficienti costanti non omogenee in cui il termine $c(t)$ ha una forma speciale.

Equazioni a coefficienti costanti omogenee. Consideriamo ora l'equazione omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0 \ . \tag{11}$$

Cominciamo con due semplici osservazioni, di cui si lascia la verifica per esercizio. a) Se y è una soluzione della (11) allora, preso un qualunque numero α, anche la funzione αy è una soluzione della la (11). b) Se y_1 e y_2 sono soluzioni della (11) allora anche la somma $y_1 + y_2$ risolve la (11).

Da queste due osservazioni segue che partendo da due soluzioni y_1 e y_2 dell'equazione (11) si ottiene una famiglia a due parametri di soluzioni ponendo

$$y := \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Per quanto detto sopra viene naturale pensare che quelle date dalla formula (12) siano *tutte* le soluzioni dell'equazione (11). In effetti è proprio così, a patto che y_1 e y_2 non siano una multipla dell'altra (altrimenti la formula (12) darebbe luogo a niente altro che i multipli di una sola funzione, vale a dire una famiglia di funzioni ad *un* parametro "mascherata" da famiglia a due parametri).

Per risolvere l'equazione (11) non ci resta quindi che trovarne due soluzioni che non siano una multipla dell'altra. Le cerchiamo tra le funzioni del tipo $y = e^{\lambda t}$ con λ parametro reale. In tala caso si ha $\dot{y} = \lambda e^{\lambda t}$ e $\ddot{y} = \lambda^2 e^{\lambda t}$, e sostituendo queste espressioni nel membro di sinistra della (11) otteniamo

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0 \ .$$

Chiaramente questa uguaglianza è verificata per ogni t se il polinomio $\lambda^2 + a\lambda + b$ vale 0, e questo avviene quando λ è una delle sue due radici. Abbiamo dunque ottenuto le due soluzioni cercate.

Riassumendo, lo schema per la soluzione dell'equazioni lineare omogenea a coefficienti costanti (11) è il seguente: si scrive l'*equazione caratteristica* ad esso associata

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{13}$$

e se ne calcolano le radici λ_1 e λ_2. Allora $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$ sono due soluzioni della (11), e la soluzione generale è data da

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Questo schema va bene se l'equazione (13) ammette due soluzioni reali distinte, ovvero quando il discriminante $\Delta = a^2 - 4b$ è strettamente positivo, ma va tuttavia opportunamente corretto negli altri casi.

Caso 1: il discriminante Δ è nullo e l'equazione (13) ammette un'unica soluzione reale λ. In tal caso una soluzione della (11) è $e^{\lambda t}$, mentre una seconda soluzione è $te^{\lambda t}$ (è facile verificare che questa è una soluzione, meno facile è capire da dove salta fuori). Pertanto la formula risolutiva diventa

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda t} + \alpha_2 t e^{\lambda t} = e^{\lambda t}(\alpha_1 + \alpha_2 t) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{14$'$}$$

Caso 2: il discriminante Δ è negativo e l'equazione (13) ammette due soluzioni *complesse* della forma $\lambda_{1,2} = s \pm \omega i$. In tal caso due soluzioni della (11) sono $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$. Pertanto la formula risolutiva diventa

$$y(t) = e^{st}(\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)) \quad \text{con } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \tag{14$''$}$$

Concludiamo questo paragrafo con alcune osservazioni.

a) Per capire da dove vengono le soluzioni $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$ utilizzate nella formula (14$''$), possiamo partire dalla soluzioni $y_1 := e^{\lambda_1 t}$ ed $y_2 := e^{\lambda_2 t}$. In questo caso $\lambda_1 t$ e $\lambda_2 t$ sono numeri complessi, ma si è visto in precedenza che è possibile definire l'esponenziale anche di un numero complesso, e per la precisione si ha

$$y_1 = e^{\lambda_1 t} = e^{st+\omega t i} = e^{st}\, e^{\omega t i} = e^{st}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) \ ,$$

e analogamente

$$y_2 = e^{\lambda_2 t} = e^{st}(\cos(-\omega t) + i\sin(-\omega t)) = e^{st}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)) \ .$$

Ma allora

$$e^{st}\cos(\omega t) = \tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_2 \quad \text{e} \quad e^{st}\sin(\omega t) = \tfrac{1}{2i}y_1 - \tfrac{1}{2i}y_2 \ ,$$

e siccome y_1 e y_2 risolvono la (11), per quanto detto sopra lo stesso vale per $e^{st}\cos(\omega t)$ e $e^{st}\sin(\omega t)$.

b) Dati due numeri reali α_1, α_2, indichiamo con r e θ le coordinate polari del punto del piano con coordinate cartesiane (α_2, α_1). Si può allora dimostrare che

$$\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t) = r\,\sin(\omega t + \theta) \quad \text{per ogni } t.$$

Dunque il grafico della funzione $\alpha_1 \cos(\omega t) + \alpha_2 \sin(\omega t)$ che appare nella formula (14$''$) è sempre una sinusoide, vale a dire che coincide con il grafico di $\sin t$ opportunamente "dilatato" (orizzontalmente e verticalmente) e traslato (orizzontalmente).

c) Il fatto che per trovare la soluzione generale di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine basta trovare due soluzioni y_1 ed y_2 e poi applicare la formula (12) vale anche quando i coefficienti a e b non sono costanti. Quello che manca in questo caso è un metodo generale per trovare y_1 ed y_2.

Equazioni a coefficienti costanti non omogenee. Consideriamo ora l'equazione non omogenea a coefficienti costanti

$$\ddot{y} + a\dot{y} + b = c(t) \ . \tag{15}$$

Cominciamo con due semplici osservazioni, di cui si lascia la verifica per esercizio. a) Se $\tilde{y}$ risolve la (15) ed y_{om} risolve l'equazione omogenea associata (vale a dire la (11)), allora la somma $y := \tilde{y} + y_{\text{om}}$ risolve la (15). b) Viceversa, se $\tilde{y}$ e y risolvono la (15) allora y si può scrivere come $y = \tilde{y} + y_{\text{om}}$ dove y_{om} risolve l'equazione omogenea associata – basta infatti verificare che la differenza $y - \tilde{y}$ risolve la (11).

Da queste due osservazioni segue che una volta trovata una particolare soluzione $\tilde{y}$ dell'equazione non omogenea (15), tutte le altre soluzioni possono essere ottenute aggiungendo ad $\tilde{y}$ una soluzione dell'equazione omogenea associata. In altre parole, la soluzione generale della (15) è data da

$$y = \tilde{y} + \text{soluzione eq. omogenea associata.} \tag{16}$$

Il problema a questo punto diventa quello di trovare almeno *una* soluzione dell'equazione non omogenea (15). Quando il termine noto $c(t)$ appartiene ad alcune particolari classi di funzioni elencate nella colonna di sinistra della tabella sottostante, è possibile trovare una soluzione della (15) nella corrispondente classe di funzioni nella colonna di destra, cose che semplifica molto la ricerca:

termine noto $c(t)$	**soluzione particolare** $\tilde{y}(t)$
costante	costante
polinomio di grado d	polinomio di grado d
multiplo di e^{mt}	ae^{mt} se e^{mt} non risolve l'eq. omog. associata ate^{mt} se e^{mt} risolve l'eq. omog. associata ma te^{mt} non la risolve at^2e^{mt} se e^{mt} e te^{mt} risolvono entrambe l'eq. omog. associata
multiplo di $\sin(\omega t)$	$a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$ se $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ non risolvono l'eq. omog. associata $t(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t))$ se $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ risolvono l'eq. omog. associata
multiplo di $\cos(\omega t)$	come nel caso precedente
multiplo di $\sin(\omega t)$ più multiplo di $\cos(\omega t)$	come nel caso precedente

Dunque la procedura per risolvere l'equazione non omogenea a coefficienti costanti, almeno nel caso in cui il termine noto appartiene ad una delle classi elencate sopra, è la seguente: prima si scrive e si risolve l'equazione omogenea associata, e poi si cerca una soluzione particolare dell'equazione non omogenea seguendo le indicazioni date in tabella.

Concludiamo questo paragrafo con alcuni esempi ed osservazioni.

a) Vediamo come si procede per risolvere l'equazione

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 3t + 1 \ . \tag{17}$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ed ha due soluzioni coincidenti $\lambda_{1,2} = 2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $y_{\text{om}} = e^{2t}(\alpha_1 + \alpha_2 t)$ con $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $3t+1$ è un polinomio di grado 1, la nostra tabella ci dice di cercare una soluzione dell'equazione non omogenea (17) tra i polinomi di grado 1, vale a dire della forma $\tilde{y} = at + b$. Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $0 - 4a + 4(at + b) = 3t + 1$

ovvero $(4a-3)t+(4b-4a-1)=0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se i coefficiente $4a-3$ e $4b-4a-1$ sono entrambi nulli, ovvero per $a=3/4$ e $b=1$. Dunque $3t/4+1$ è una particolare soluzione della (17); si ottiene infine la soluzione generale aggiungendo tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata, vale a dire

$$y(t)=\frac{3t}{4}+1+e^{2t}(\alpha_1+\alpha_2 t) \quad \text{con } \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}.$$

b) Risolviamo l'equazione

$$\ddot{y}-y=6e^{2t}\ . \tag{18}$$

L'equazione omogenea associata è $\ddot{y}-y=0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2-1=0$ ed ha soluzioni $\lambda_{1,2}=\pm 1$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea associata è $y_{\mathrm{om}}=\alpha_1 e^t+\alpha_2 e^{-t}$ con $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$.

Siccome il termine noto $6e^{2t}$ è un multiplo di e^{2t}, la nostra tabella ci dice di cercare una soluzione dell'equazione non omogenea (18) della forma $y=ae^{2t}$. Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $4ae^{2t}-ae^{2t}=6e^{2t}$ ovvero $(3a-6)e^{2t}=0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $3a-6$ è nullo, cioè per $a=2$. Dunque $2e^{2t}$ è una soluzione della (18) e la soluzione generale è

$$y()t)=2e^{2t}+\alpha_1 e^t+\alpha_2 e^{-t} \quad \text{con } \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}.$$

c) Modifichiamo ora il termine noto dell'equazione nell'esempio precedente:

$$\ddot{y}-y=-2e^{t}\ . \tag{19}$$

In questo caso le funzioni del tipo $y=ae^t$ risolvono l'equazione omogenea associata e quindi non possono mai risolvere l'equazione non omogenea. la nostra tabella ci dice allora di cercare una soluzione particolare della (18) tra le funzioni del tipo $y=ate^t$. Sostituendo quest'espressione nell'equazione otteniamo $a(t+2)e^t-ate^t=-2e^t$ ovvero $(2a+2)e^t=0$, e chiaramente questa identità è verificata per ogni t se il coefficiente $2a+2$ è nullo, ovvero per $a=-1$. Dunque $-te^t$ è una particolare soluzione della (19), e la soluzione generale è

$$y(t)=-te^t+\alpha_1 e^t+\alpha_2 e^{-t} \quad \text{con } \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}.$$

d) Se il termine noto $c(t)$ si scrive come la somma di due termini noti $c_1(t)$ e $c_2(t)$ per cui si sanno trovare delle soluzioni particolari y_1 e y_2 (per esempio usando la solita tabella), allora una soluzione particolare per il termine noto $c(t)$ è data dalla somma y_1+y_2. Per esempio, una soluzione particolare per l'equazione $\ddot{y}+2y=4t-3e^t$ è data dalla somma di una soluzione particolare di $\ddot{y}+2y=4t$, vale a dire $2t$, e di una soluzione particolare di $\ddot{y}+2y=-3e^t$, vale a dire $-e^t$.

e) Si osservi che quanto detto in questo paragrafo per le equazioni lineari non omogenee del secondo ordine si applica in realtà anche alle equazioni lineari del primo ordine tipo (6). La formula risolutiva (7) mostra infatti che la soluzione generale dell'equazione non omogenea (6) è data da una soluzione particolare ($e^{-A(t)}\int\dots dt$) più $ce^{-A(t)}$, che risulta essere la soluzione generale dell'equazione omogenea associata (vedi formula (7′)). La formula (7) ha una validità molto generale e tuttavia, anche nel caso di un'equazione a coefficienti costanti, richiede di calcolare un integrale indefinito piuttosto complicato (vedi formula (7″)). Pertanto in alcuni casi è più utile considerare per l'equazione lineare a coefficienti costanti $\dot{y}+ay=b(t)$ la formula risolutiva

$$y=\tilde{y}+ce^{-at} \quad \text{con } c\in\mathbb{R},$$

dove ce^{-at} è la soluzione dell'equazione omogenea associata e $\tilde{y}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea che può essere trovata con la stessa tecnica utilizzata per le equazioni del secondo ordine (in questo caso il termine noto è $b(t)$).

Esercizi

1. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili:
$$\text{a) } \dot{y} = \frac{t}{y} \ ; \quad \text{b) } \dot{y} = y^2 + 1 \ ; \quad \text{c) } \dot{y} = e^y \cos t \ ; \quad \text{d) } \dot{y} = e^t y \ ; \quad \text{e) } \dot{y} = t^2 y^2 \ .$$

2. a) Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.
b) Cercare le soluzioni delle equazioni d) ed e) che soddisfano la condizione iniziale $y(1) = 0$.

3. Si consideri l'equazione a variabili separabili $\dot{y} = g(y)\, h(t)$ e un numero y_0 tale che $g(y_0) = 0$. Verificare che la soluzione dell'equazione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = y_0$ è la funzione costante $y(t) := y_0$.

4. Risolvere le seguenti equazioni lineari del primo ordine utilizzando la formula risolutiva (7)
$$\text{a) } \dot{y} - 4y = 8 \ ; \quad \text{b) } \dot{y} + 2ty = 0 \ ; \quad \text{c) } \dot{y} + \frac{y}{t+1} = 6t \ ; \quad \text{d) } \dot{y} - e^t y = 0 \ .$$

5. Per ciascuna delle equazioni differenziali nell'esercizio precedente trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

6. Verificare direttamente – vale a dire senza utilizzare alcuna formula risolutiva – le seguenti proprietà delle equazioni lineari *omogenee* del primo ordine e del secondo ordine (cioè quelle della forma $\dot{y} + a(t)\, y = 0$ oppure $\ddot{y} + a(t)\, \dot{y} + b(t)\, y = 0$):
a) Se y è una soluzione dell'equazione allora ogni multiplo di y è pure una soluzione;
b) Se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione la somma $y_1 + y_2$ è pure una soluzione;
c) se a e b sono costanti, ;a funzione $e^{\lambda t}$ è una soluzione se λ risolve l'equazione caratteristica associata ($\lambda + a = 0$ per quella del primo ordine e $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ per quella del secondo ordine).

7. Per ciascuna delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, scrivere l'equazione caratteristica, risolverla, e quindi determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale:
$$\text{a) } \ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 0 \ ; \quad \text{b) } \ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0 \ ; \quad \text{c) } \ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0 \ ; \quad \text{d) } \ddot{y} + 9y = 0 \ ;$$
$$\text{e) } \ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 0 \ ; \quad \text{f) } \ddot{y} - 4y = 0 \ ; \quad \text{g) } \dot{y} + 2y = 0 \ ; \quad \text{h) } \dot{y} - 3y = 0 \ .$$

8. Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali che soddisfano le condizioni iniziali assegnate:
$$\text{a) } \begin{cases} \dot{y} + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} \ddot{y} - 4y = 0 \\ y(0) = 2 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} \ddot{y} + y = 0 \\ y(0) = -2 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{d) } \begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} .$$

9. a) Verificare che la funzione te^{2t} risolve l'equazione lineare omogenea $\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0$.
b) Verificare che se l'equazione caratteristica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ha due soluzioni coincidenti λ allora $te^{\lambda t}$ risolve l'equazione differenziale $\ddot{y} + a\dot{y} + by = 0$.

10. Verificare direttamente che le funzioni $e^t \sin t$ ed $e^t \cos t$ risolvono l'equazione lineare omogenea $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0$.

11. a) Trovare i valori del parametro a per cui la funzione $y(t) := t^a$ risolve l'equazione lineare omogenea a coefficienti *non costanti*

$$\ddot{y} - \frac{2\dot{y}}{t} + \frac{2y}{t^2} = 0 \ .$$

b) Scrivere la soluzione generale di quest'equazione.
c) Trovare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(1) = 0$ e $\dot{y}(1) = 1$.

12. Dati a_1, a_2 numeri reali, indichiamo con r e θ le coordinate polari del punto del piano con coordinate cartesiane (a_2, a_1). Dimostrare che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$a_1 \cos x + a_2 \sin x = r \ \sin(x + \theta) \ .$$

Utilizzare questo per dimostrare quanto detto nell'osservazione b) dopo la formula (14″), alla fine del paragrafo sulle equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti e omogenee.

13. Trovare una soluzione particolare per ciascuna delle seguenti equazioni lineari non omogenee utilizzando le indicazioni della tabella data sopra (per le prime equazioni queste indicazioni sono esplicitate tra parentesi):
a) $\ddot{y} - \dot{y} - y = 3e^{2t}$ [cercare y della forma $y = ae^{2t}$];
b) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^t$ [cercare y della forma $y = ate^t$];
c) $\dot{y} - y = 4e^{3t}$ [cercare y della forma $y = ae^{3t}$];
d) $\dot{y} + 2y = e^{-2t}$ [cercare y della forma $y = ate^{-2t}$];
e) $\ddot{y} - y = 9\sin(2t)$ [cercare y della forma $y = a\cos(2t) + b\sin(2t)$];
f) $\dot{y} + y = 3t$ [cercare y della forma $y = a + bt$];
g) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = e^{-t}$;
h) $\ddot{y} - 2\dot{y} + y = e^t$;
i) $\dot{y} + 2y = 4\cos(2t)$;
l) $\ddot{y} + 3y = 6$.

14. Siano y_1 e y_2 rispettivamente soluzioni delle equazioni lineari non omogenee

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c_1(t) \quad \text{e} \quad \ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c_2(t) \ .$$

Verificare che $y_1 + y_2$ risolve l'equazione

$$\ddot{y} + a(t)\,\dot{y} + b(t)\,y = c_1(t) + c_2(t) \ .$$

15. a) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\dot{y} + 2y = 0$.

b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione $\dot{y} + 2y = 2t - 3e^t$. [*Si suggerisce di cercare separatamente una soluzione di* $\dot{y} + 2y = 2t$ *ed una di* $\dot{y} + 2y = -3e^t$*, e poi applicare quanto fatto nell'esercizio precedente.*]
c) Trovare la soluzione generale dell'equazione $\dot{y} + 2y = 2t - 3e^t$.

16. Si consideri l'equazione lineare del primo ordine

$$\dot{y} + 4y = 16t \ . \tag{20}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (20).
a) Trovare una soluzione particolare della (20).
c) Scrivere la soluzione generale della (20).
d) Trovare la soluzione della (20) che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$.

17. Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine

$$\ddot{y} + y = e^{-2t} \tag{21}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (21).
a) Trovare una soluzione particolare della (21).
c) Scrivere la soluzione generale della (21).
d) Trovare la soluzione della (21) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 0$.

18. Si consideri l'equazione lineare del secondo ordine

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sin t \tag{22}$$

a) Risolvere l'equazione omogenea associata alla (22).
a) Trovare una soluzione particolare della (22).
c) Scrivere la soluzione generale della (22).

19. Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali che soddisfano le condizioni iniziali assegnate:

$$\text{a)} \begin{cases} \dot{y} = y^2 \cos t \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} \ddot{y} - y = 2t \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} ; \quad \text{c)} \begin{cases} \dot{y} + 2y = 4 \\ y(0) = 1 \end{cases} ; \quad \text{d)} \begin{cases} \dot{y} = 3t^2(1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases} .$$

20. Utilizzando il cambio di variabile $y = tz$ risolvere l'equazione differenziale

$$\dot{y} = \frac{y}{t} + \frac{t}{2y} \ .$$

Richiamo delle nozioni fondamentali

Dato un insieme finito X (insieme degli eventi elementari), una distribuzione di probabilità su X è una funzione che ad ogni evento elementare $x \in X$ assegna un numero reale *positivo* $P(x)$ in modo tale che la somma di $P(x)$ per tutti gli $x \in X$ sia 1. La probabilità $P(A)$ di un evento non elementare A, vale a dire un qualunque sottoinsieme di X, è la somma delle probabilità $P(x)$ di tutti gli eventi elementari $x \in A$. Ovviamente $P(X) = 1$; si pone inoltre $P(\varnothing) = 0$. Un evento con probabilità 1 si dice *certo*, un evento con probabilità 0 si dice *impossibile*. Un esempio particolarmente interessante di probabilità è quello della distribuzione *uniforme*, vale a dire $P(x) := 1/N$ per ogni x, dove N è il numero di elementi di X.

Operazioni insiemistiche e probabilità. Indichiamo con A^c l'evento complementare ad A, ovvero $A^c := X - A$; allora $P(A^c) = 1 - P(A)$. Inoltre

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \ .$$

In particolare quando A e B sono eventi *incompatibili*, vale a dire quando $P(A \cap B) = 0$ (cose che si verifica ad esempio quando l'intersezione $A \cap B$ è vuota) si ha che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ .$$

Più in generale, data una famiglia di eventi $A_1, \ldots, A_n$ *a due a due incompatibili* si ha che

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \ . \tag{1}$$

Probabilità condizionale. Dati due eventi A e B con $P(B) \neq 0$, la *probabilità condizionale* di A sapendo B è

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ .$$

Ricordiamo la *formula di Bayes*: dati due eventi A e B con probabilità non nulla si ha

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)} \ .$$

Eventi indipendenti. Due eventi A e B si dicono *indipendenti* se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ .$$

Usando questa definizione e quella di probabilità condizionale si ottiene che $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$ – supponendo ovviamente che le probabilità condizionali $P(A|B)$ e $P(B|A)$ siano ben definite, vale a dire che $P(B)$ e $P(A)$ siano diverse da zero.

Un insieme di più di due eventi si dicono indipendenti se prendendone un qualunque sottoinsieme la probabilità dell'intersezione degli eventi presi è uguale al prodotto delle loro probabilità. Per esempio, tre eventi A, B, C sono indipendenti se si verificano le seguenti condizioni: a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, b) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$, c) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$ e infine d) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ – si noti che le condizioni a), b), c) equivalgono a dire che gli insiemi A, B, C sono a due a due indipendenti, e da sole non bastano a garantire l'indipendenza. Come caso particolare di quanto detto si ha che per un insieme di eventi *indipendenti* $A_1, \ldots, A_n$

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n) \ . \tag{2}$$

Si può inoltre far vedere che se $A_1, \ldots, A_n$ sono indipendenti allora anche gli eventi complementari $A_1^c, \ldots, A_n^c$ sono tra loro indipendenti, e siccome l'unione $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ è il complementare dell'intersezione $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c$, usando la (2) otteniamo la seguente formula per la probabilità dell'*unione* di eventi indipendenti:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) \\ &= 1 - P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdots P(A_n^c) \\ &= 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdots (1 - P(A_n)) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Si noti che questa formula differisce dalla (1), che infatti si applica solo nel caso di eventi incompatibili. Tuttavia se si svolge il prodotto nella terza riga della (3) si ottiene la somma a destra dell'uguale nella (1) più altri addendi dati dal prodotto di almeno due fattori del tipo $P(A_i)$; in particolare, se le probabilità $P(A_i)$ sono molto piccole, questi addendi possono essere trascurati almeno in prima approssimazione. Dunque, nel caso che gli eventi A_i siano indipendenti ed abbiano probabilità piccola, la formula (1) risulta essere una buona approssimazione della (3).

Disposizioni, permutazioni e combinazioni. Il numero di *disposizioni con ripetizione* di k oggetti scelti tra n corrisponde al numero di sigle di k caratteri che si possono scrivere utilizzando un alfabeto di n lettere, ed è uguale a n^k.

Il numero di *disposizioni senza ripetizione* di k oggetti scelti tra n – indicato con $D_{n,k}$ – corrisponde al numero di sigle di k caratteri *tutti diversi* che si possono scrivere utilizzando un alfabeto di n lettere, ed è dato dalla formula

$$D_{n,k} := n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(si suppone chiaramente che k sia minore di n; l'espressione $n!$ si legge "enne fattoriale" ed è uguale al prodotto $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$; si pone per convenzione $0! := 1$).

Il numero di *permutazioni* di n oggetti indica il numero dei diversi modi di ordinare n oggetti distinti, e quindi corrisponde al numero di sigle che si possono ottenere a partire da n lettere distinte assegnate; tale numero coincide quindi con $D_{n,n} = n!$.

Infine il numero di *combinazioni* di k oggetti scelti tra n – indicato con $C_{n,k}$ – è il numero di modi di scegliere k oggetti tra n oggetti distinti senza tener conto dell'ordine in cui sono stati scelti, ed è dato dalla formula

$$C_{n,k} := \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \ .$$

Si ricordi che il numero di combinazioni $C_{n,k}$ coincide con il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$.

Eventi ripetuti. Consideriamo un "esperimento" con probabilità di successo p (per esempio lanciamo un dado e per "successo" intendiamo che esce il numero cinque, per cui $p = 1/6$), e supponiamo di ripeterlo n volte in modo indipendente, cioè assicurandoci che il risultato di ciascun esperimento non influisca sugli altri (questo dovrebbe essere il caso se ad esempio lanciamo un dado più volte). Allora la probabilità di ottenere k successi su n ripetizioni è

$$P = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \ .$$

1. Si prende un numero intero a caso tra 10 e 99 (inclusi).
   a) Qual è la probabilità che la prima cifra sia pari?
   b) Qual è la probabilità che la seconda cifra sia pari?

b) Qual è la probabilità che almeno una delle due cifre sia pari?

2. Si estrae una biglia a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche, 6 rosse e 4 nere. Indicando con $X := \{b, r, n\}$ l'insieme dei possibili risultati (eventi elementari), qual è la probabilità di ciascuno di essi?

3. Un sacchetto contiene 8 biglie nere ed un certo numero di biglie bianche. A esperimenti fatti si sa che estraendo a caso una biglia la probabilità che sia bianca è $P = 3/5$. Quante sono le biglie bianche?

4. Su tre facce di un dado è riportata la lettera a, su due la lettera b e sull'ultima la lettera c. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i lanci di questo dado?

5. Si lanciano due dadi uguali a quello descritto nell'esercizio precedente. Quale insieme di eventi elementari e quale distribuzione di probabilità conviene usare per descrivere i risultati di tali lanci?

6. Dato l'insieme degli eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e\}$ e due numeri reali p, q, si pone $P(a) = P(b) := p$ e $P(c) = P(d) = P(e) := q$.
   a) Se $p = 1/4$, per quali q la funzione P è una distribuzione di probabilità su X?
   b) Per quali p e q la funzione P è una distribuzione di probabilità su X?

7. Si costruiscono due dadi uguali a forma di parallelepipedo con base quadrata ed altezza leggermente diversa dal lato di base. Sulle due basi quadrate di ciascun dado ci sono i numeri $5, 6$ e sulle altre quattro facce i numeri $1, 2, 3, 4$. Tirando i due dadi più volte, si osserva che la probabilità di ottenere una somma pari a 10 o più è esattamente $5/16$. Qual è la probabilità di ottenere 6 lanciando un solo dado?

8. Indichiamo con X l'insieme di tutte le sigle di 4 caratteri presi tra le lettere A, B, C, D, E, F.
   a) Quante sono le sigle in X?
   b) Quante delle sigle in X non contengono due lettere uguali?
   c) Quante delle sigle in X non contengono due lettere uguali consecutive?
   d) Si estrae una sigla a caso in X: qual è la probabilità che le lettere siano tutte diverse?

9. a) Quanti sono i numeri interi di 4 cifre che non iniziano per zero?
   b) Tra questi, quanti sono quelli che non contengono due cifre uguali?

10. a) Quanti sono i numeri interi di 3 cifre distinte comprese tra 1 e 7 (inclusi)?
    b) Tra questi, quanti sono quelli le cui cifre sono in ordine crescente se lette da sinistra a destra? [*Si noti che prese tre cifre distinte c'è un solo modo di disporle in ordine crescente.*]

11. Si estrae un numero a caso da un sacchetto che contiene i numeri $1, 2, \ldots, 7$.
    a) Qual è la probabilità che escano i numeri 2, 4 e 7 in quest'ordine?
    a) Qual è la probabilità che escano i numeri 2, 4 e 7 ma non necessariamente in quest'ordine?

12. a) Quante sono le possibili sigle formate da due lettere dell'alfabeto italiano seguite da quattro cifre diverse da zero?
    b) Tra queste sigle, quante sono quelle con lettere tutte diverse?
    c) Tra queste sigle, quante sono quelle con lettere e cifre tutte diverse?
    d) Quante sono le sigle formate da due lettere e quattro cifre diverse da zero disposte in un qualunque ordine?

13. Calcolare la probabilità che, tirando due dadi, la somma sia: a) 3; b) 6; c) 10 o più.

14. Quante sigle di 7 lettere si possono scrivere utilizzando 3 volte la lettera T e 4 volte la lettera C? [*Si osservi che scegliere una di queste sigle equivale a scegliere le* 3 *posizioni (tra le* 7 *a disposizione) in cui si mette le lettera* T.]

15. Calcolare la probabilità che lanciando 7 monete si ottengano 3 teste.

16. Dato n intero positivo, si considerino tutte le sequenze di n lettere prese tra A, B, C, D, E che soddisfano le seguenti condizioni: le lettere A e B sono sempre seguite da B, C o D, mentre C, D ed E sono seguite da A, D o E. Quante sono tali sequenze?

17. Sia X l'insieme dei numeri interi compresi tra 1 e 24 (inclusi). Si sa che tra i numeri in X, quelli pari hanno tutti probabilità 1/36 e quelli dispari hanno probabilità uguale. Qual è la probabilità dei numeri dispari?
    Inventare una situazione "reale" per cui lo spazio degli eventi elementari e la relativa distribuzione di probabilità sono quelli appena descritti.

18. Si prenda X come nell'esercizio precedente. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
    a) x è dispari;
    b) x è pari;
    c) x è compreso tra 1 e 6 (inclusi);
    d) x è un multiplo di 4;
    e) x è un multiplo di 6.

19. Per ogni coppia di eventi nell'esercizio precedente dire se sono indipendenti o meno.

20. Far vedere che nel lancio di un dado gli eventi "esce un numero dispari" e "esce un multiplo di 3" sono indipendenti.

21. Si estrae a caso una sigla composta da 5 lettere dell'alfabeto italiano. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:
    a) la sigla inizia con aa;
    b) la sigla termina con z;
    c) la sigla contiene solo vocali;
    d) la sigla contiene solo consonanti;
    e) la sigla contiene lettere tutte diverse.
    [*Per risolvere a) si osservi che l'evento* $A :=$"*la prima lettera della sigla è* a" *e l'evento* $B :=$"*la seconda lettera della sigla è* a" *sono indipendenti; si applichi quindi la formula* $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.]

22. Per ogni coppia di eventi elencati nell'esercizio precedente dire se sono indipendenti o meno.

23. Siano A e B eventi con probabilità non nulla. Dimostrare che le seguenti affermazioni sono equivalenti:
a) A e B sono indipendenti;
b) $P(A|B) = P(A)$;
c) $P(B|A) = P(B)$.

24. Dimostrare che se A e B sono eventi indipendenti allora anche le seguenti coppie di eventi sono indipendenti: a) A^c e B; b) A e B^c; c) A^c e B^c. [*Per dimostrare a) si osservi che* $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - P(A) = P(A^c)$ *e si usi quindi l'esercizio precedente.*]

25. Dati due eventi indipendenti A e B dimostrare che vale la formula (3), vale a dire

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B)) \; .$$

26. a) Dati due eventi A e B con $P(A) \neq 0$, far vedere che $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$.
b) Dati A, B e C con $P(A \cap B) \neq 0$, far vedere che $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$.

27. Si estraggono due biglie a caso da un sacchetto che ne contiene 8 bianche e 4 nere. Calcolare la probabilità che la prima biglia estratta sia bianca e la seconda sia nera. [*Applicare la formula data al punto a) dell'esercizio precedente con* $A :=$ *"la prima biglia estratta è bianca" e* $B :=$ *"la seconda biglia estratta è nera".*]

28. Si estraggono due biglie a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 4 nere. Calcolare la probabilità che siano:
a) entrambe bianche;
b) la prima nera e la seconda bianca;
c) una nera ed una bianca;
d) almeno una bianca.

29. Si estraggono tre biglie a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 6 nere. Qual è la probabilità che siano:
a) tutte e tre nere;
b) due nere ed una bianca.

30. Un sacchetto contiene 5 biglie nere ed un certo numero di biglie bianche. A esperimenti fatti si sa che estraendo a caso due biglie la probabilità che almeno una sia bianca è $P = 9/11$. Quante sono le biglie bianche?

31. Si estraggono a caso 5 numeri distinti compresi tra 1 e 90 (estrazione del lotto). Calcolare la probabilità che
a) i numeri usciti siano 11, 23, 37, 39 e 75 (non necessariamente in questo ordine);
b) tra i cinque numeri ci sia il 71;
c) tra i cinque numeri ci siano 1, 22 e 37.

32. Si estraggono 3 carte a caso da un mazzo di 52. Calcolare la probabilità che escano
    a) il due, il tre ed il cinque di cuori in quest'ordine;
    b) il due, il tre ed il cinque di cuori anche se non in quest'ordine;
    c) un due, un tre ed un cinque in un qualunque ordine.

33. Si estraggono 4 carte a caso da un mazzo di 52. Calcolare la probabilità che escano
    a) i quattro assi (poker d'assi);
    b) quattro carte dello stesso valore (poker);
    c) quattro carte dello dello stesso seme (colore);
    d) due carte di un valore e due di un altro (doppia coppia).

34. Si estraggono due numeri a caso da un sacchetto che contiene tutti gli interi da 1 a 90.
    a) Qual è la probabilità che i due numeri siano consecutivi?
    b) Qual è la probabilità che il secondo numero estratto sia il doppio del primo?
    c) Qual è la probabilità che i due numeri siano uno il doppio dell'altro?

35. Consideriamo i seguenti eventi nel lancio di due dadi: $A :=$"il primo dado è pari", $B :=$"il secondo dado è pari", $C :=$"la somma dei due dadi è pari". Verificare che:
    a) questi tre eventi sono a due a due indipendenti;
    b) questi tre eventi non sono complessivamente indipendenti.

36. a) Si lancia un dado finché non esce un sei. Qual è la probabilità che servano più di 4 tiri?
    a) Qual è la probabilità che servano esattamente 4 tiri?

37. Si trasmette via radio un messaggio di 100 caratteri, e si sa che la probabilità di errore nella trasmissione di ciascun carattere è uguale a 10^{-5}. Supponendo che gli eventuali errori di trasmissione siano indipendenti, calcolare la probabilità che il messaggio non sia ricevuto correttamente.

38. Nel contesto dell'esercizio precedente, supponiamo che la stazione ricevente abbia un sistema automatico in grado di correggere il messaggio ricevuto se nella trasmissione viene fatto un solo errore. Qual è la probabilità che ciononostante il messaggio alla fine non sia ricevuto correttamente?

39. Da due statistiche fatta sugli abitanti adulti del centro e della periferia della città di K risulta che tra i primi il 50% possiede un'auto, mentre tra i secondi tale percentuale sale al 90%. Si sa inoltre che gli abitanti della periferia sono 5 volte quelli del centro. Del signor R si sa solo che possiede un'auto; qual è allora la probabilità che viva in centro? [*Usare la formula di Bayes.*]

40. In una scuola, il 30% degli studenti sono figli unici, e tra questi il 55% sono maschi, mentre la percentuale dei maschi cala al 45% tra gli studenti che non sono figli unici. Presa una studentessa a caso, qual è la probabilità che sia figlia unica?

41. I 20 studenti di una classe vengono suddivisi in gruppi di 5 per svolgere un certo lavoro. Per formare i gruppi il docente estrae a caso i nomi degli studenti da un busta: i primi

cinque estratti formano il primo gruppo, i secondi cinque il secondo gruppo e così via. Qual è la probabilità che Andrea e Barbara finiscano nello stesso gruppo?

42. Un certo dispositivo si compone di due parti, e si sa che probabilità che la prima si guasti nel primo anno di utilizzo è del 4%, mentre per la seconda la probabilità è del 6%.
a) Calcolare la probabilità P che dopo un anno il dispositivo non abbia ancora avuto bisogno di riparazioni, supponendo che l'eventualità di un guasto della prima componente sia indipendente da quella della seconda.
b) Cosa si può dire di certo su P se non si presuppone l'indipendenza?

43. Calcolare la probabilità che lanciando 9 monete si verifichino i seguenti eventi:
a) escono esattamente 6 teste;
b) escono almeno 8 teste;
c) escono almeno 2 teste;
d) escono almeno 5 teste.
[*Per c) conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare, cioè che esca al più una testa; la probabilità dell'evento d) è* 1/2 *e può essere ottenuta senza quasi fare calcoli.*]

44. Calcolare la probabilità che lanciando 5 dadi si verifichino i seguenti eventi:
a) escono esattamente 2 tre;
b) non esce nessun sei;
c) escono esattamente 3 numeri pari;
d) almeno 4 dadi sono maggiori o uguali a cinque.

45. Dimostrare le seguenti formule riguardanti i coefficienti binomiali:
a) $C_{n,k} = C_{n,n-k}$;
b) $C_{n,0} = C_{n,n} = 1$;
c) $C_{n,1} = C_{n,n-1} = n$;
c) $C_{n,k} + C_{n,k+1} = C_{n+1,k+1}$.

46. a) Dati n e k numeri interi tali che $0 \leq k < \frac{1}{2}(n-1)$, dimostrare che $C_{n,k} < C_{n,k+1}$.
b) Dati n e k numeri interi tali che $\frac{1}{2}(n-1) < k < n$, dimostrare che $C_{n,k} > C_{n,k+1}$.
c) Dimostrare che per ogni n pari il valore massimo di $C_{n,k}$ si ha per $k := n/2$.
d) Dimostrare che lanciando un numero pari n di monete, il numero di teste che è più probabile ottenere è proprio $n/2$.

47. Sono dati quattro numeri interi positivi n, n_1, n_2, n_3 con $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Dimostrare che il numero di modi di ripartire n oggetti distinti in tre gruppi, in modo che il primo gruppo ne contenga n_1, il secondo n_2 ed il terzo n_3, è uguale a

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} \ .$$

[*Per suddividere gli oggetti si procede scegliendo prima n_1 oggetti tra gli n dati e poi scegliendo n_2 oggetti tra gli $n - n_1$ rimasti; la prima operazione può essere fatta in C_{n,n_1} modi e la seconda in C_{n-n_1,n_2} modi. Quindi il numero di suddivisioni cercate è il prodotto di questi due numeri, che con le opportune semplificazioni si riduce a quello dato nella formula.*]

Questa formula è un caso particolare della seguente: dati dei numeri interi positivi $n, n_1, n_2, \ldots, n_m$ tali che $n_1 + \cdots + n_m = n$, il numero di modi di suddividere n oggetti distinti in m gruppi in modo che il primo gruppo ne contenga n_1, il secondo n_2 e così via, è

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!} \ .$$

Si osservi che per $m = 2$, ponendo $n_1 := k$ (da cui segue che necessariamente $n_2 = n - k$) si ritrova la nota formula per $C_{n,k}$.

48. a) Quante sono le sigle di 10 lettere in cui la lettera a appare esattamente due volte, la b tre volte e la c cinque volte?

    b) Quante sono le sigle di 10 lettere dell'alfabeto italiano in cui la lettera a appare esattamente due volte e la lettera b tre volte?

49. Sono dati quattro numeri interi positivi n, n_1, n_2, n_3 con $n_1 + n_2 + n_3 = n$, e tre numeri positivi p_1, p_2, p_3 con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Consideriamo ora una procedura aleatoria che può dare tre possibili risultati a_1, a_2, a_3 con probabilità p_1, p_2, p_3 rispettivamente. Dimostrare che ripetendo l'operazione n volte in modo indipendente, la probabilità P di avere n_1 volte il risultato a_1, n_2 volte il risultato a_2 ed n_3 volte a_3 è

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \ .$$

Questa formula è un caso particolare della seguente: dati dei numeri interi positivi $n, n_1, n_2, \ldots, n_m$ tali che $n_1 + \cdots + n_m = n$ e dei numeri positivi $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tali che $p_1 + \cdots + p_m = 1$, si consideri una procedura aleatoria che può dare m possibili risultati $a_1, \ldots, a_m$ con probabilità $p_1, \ldots, p_m$ rispettivamente; allora la probabilità P di avere n_1 volte il risultato a_1, n_2 volte il risultato a_2 e così via, è

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_m!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} \ .$$

Si noti che per $m = 2$, ponendo $n_1 := k$ e $p_1 := p$ (da cui segue necessariamente che $n_2 = n - k$ e $p_2 = 1 - p$) si ottiene la nota formula per la probabilità di avere k successi su n tentativi indipendenti quando la probabilità di successo è p.

50. Si lancia un dado per 10 volte. Calcolare la probabilità che escano:

    a) esattamente 3 uno e 5 due;

    b) esattamente 4 sei e 3 numeri dispari.

51. Ho un programma di computer che estrae a caso una sigla di tre lettere seguendo una procedura a me non nota. Dopo aver fatto un'ampia statistica, scopro che la prima lettera della sigla è A nel 20% delle estrazioni, la seconda è A nel 40% delle estrazioni, e infine la terza è A nel 10% delle estrazioni.

    a) Calcolare la probabilità P che venga estratta la sigla AAA, supponendo che il programma scelga le tre lettere in modo indipendente.

    b) Se le tre lettere della sigla non vengono scelte in modo indipendente, cosa si può dire di certo su P? più precisamente, qual è il valore massimo che P può assumere, e quale il minimo?

52. Sia X l'insieme dei numeri di tre cifre comprese tra 1 e 8 (inclusi) la cui somma è pari. Su X consideriamo la probabilità uniforme. Sia A_1 l'evento "la prima cifra è pari", A_2 l'evento "la seconda cifra è pari" e A_3 l'evento "la terza cifra è pari".
    a) Quanti sono gli elementi di X?
    b) Calcolare la probabilità di ciascuno degli eventi A_1, A_2, A_3.
    c) Verificare che gli eventi A_1, A_2, A_3 sono *a due a due* indipendenti.
    d) Verificare che gli eventi A_1, A_2, A_3 non sono indipendenti.

Richiamo delle nozioni fondamentali

Sia Y una variabile aleatoria che assume un numero finito di valori $y_1, \dots y_n$ con probabilità $p_1, \dots, p_n$ rispettivamente – in altre parole p_k è la probabilità dell'evento "Y assume il valore y_k", vale a dire l'insieme degli eventi elementari x in corrispondenza dei quali Y assume il valore y_k (in breve, l'evento "$Y = y_k$"). Y si dice *costante* se uno dei valori è assunto con probabilità 1 (Y può assumere anche altri valori ma con probabilità 0; dal nostro punto di vista questi valori non hanno quindi alcuna rilevanza). Il *valore atteso* di Y, indicato con $\mathrm{E}(Y)$ o semplicemente con m, è dato dalla seguente media pesata:

$$\mathrm{E}(Y) := p_1 \cdot y_1 + p_2 \cdot y_2 + \cdots + p_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^{n} p_k y_k \ ; \tag{1}$$

indicando poi con $Y(x)$ il valore assunto da Y in corrispondenza dell'evento elementare x si può scrivere il valore atteso come

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_{x \in X} P(x) \cdot Y(x) \ .$$

La *varianza* di Y, indicata con $\mathrm{Var}(Y)$ o semplicemente con σ^2, corrisponde invece al valore atteso della variabile aleatoria $(Y - m)^2$, dove m è il valore atteso di Y, vale a dire

$$\mathrm{Var}(Y) := \mathrm{E}((Y - m)^2) = \sum_{k=1}^{n} p_k (y_k - m)^2 = \sum_{x \in X} P(x)(Y(x) - m)^2 \ .$$

Se Y ha valore atteso m e varianza σ^2, la *disuguaglianza di Chebyshev* dice che per ogni numero positivo t la probabilità che Y assuma valori che differiscono da m più di t è inferiore a σ^2/t^2, ovvero

$$P\big(\text{“}Y \geq m + t\text{”}\big) + P\big(\text{“}Y \leq m - t\text{”}\big) = P\big(\text{“}|Y - m| \geq t\text{”}\big) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \ .$$

Date due variabili aleatorie Y e Z, la *covarianza* di Y e Z è data da

$$\mathrm{Cov}(Y) := \mathrm{E}((Y - m)(Z - p))$$

dove m è il valore atteso di Y e p quello di Z. Infine il *coefficiente di correlazione (di Pearson)* di Y e Z è

$$\mathrm{corr}(Y; Z) := \frac{\mathrm{Cov}(Y; Z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y) \cdot \mathrm{Var}(Z)}} \ .$$

Variabili aleatorie indipendenti. Due variabili aleatorie Y e Z si dicono *indipendenti* se l'evento "Y assume il valore y" e l'evento "Z assume il valore z" sono indipendenti per ogni possibile scelta di y e z tra i valori assunti da Y e da Z rispettivamente. (Quindi se Y assume n valorie Z ne assume m, per verificare l'indipendenza di Y e Z bisogna verificare l'indipendenza di $n \cdot m$ coppie di eventi.)

Proprietà del valore atteso e della varianza. Siano Y e Z due variabili aleatorie, e sia c un numero (ovviamente indichiamo con c anche la variabile aleatoria costante con valore c). Valgono allora i seguenti enunciati:

(i) $\mathrm{E}(c) = c$ e $\mathrm{Var}(c) = 0$;
(ii) $\mathrm{E}(Y + c) = \mathrm{E}(Y) + c$ e $\mathrm{E}(c \cdot Y) = c\,\mathrm{E}(Y)$;
(iii) $\mathrm{E}(Y + Z) = \mathrm{E}(Y) + \mathrm{E}(Z)$;
(iv) $\mathrm{Var}(Y + c) = \mathrm{Var}(Y)$ e $\mathrm{Var}(c \cdot Y) = c^2 \mathrm{Var}(Y)$;
(v) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(Y^2) - (\mathrm{E}(Y))^2$;
(vi) $\mathrm{Cov}(Y; Z) = \mathrm{E}(Y \cdot Z) - \mathrm{E}(Y) \cdot \mathrm{E}(Z)$;

(vii) $\mathrm{Var}(Y+Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z) + 2\,\mathrm{Cov}(Y;Z)$.

Supponendo inoltre che Y e Z siano indipendenti si ha che:

(viii) $\mathrm{E}(Y\cdot Z) = \mathrm{E}(Y)\cdot\mathrm{E}(Z)$;

(ix) $\mathrm{Cov}(Y;Z) = 0$;

(x) $\mathrm{Var}(Y+Z) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}(Z)$.

La proprietà (iii) può essere estesa ad una somma di più variabili aleatorie $Y_1,\dots,Y_N$:

$$\mathrm{E}(Y_1+\cdots+Y_N) = \mathrm{E}(Y_1)+\cdots+\mathrm{E}(Y_N)\ ; \tag{2}$$

se inoltre queste variabili aleatorie sono indipendenti a due a due vale la seguente estensione della proprietà (x):

$$\mathrm{Var}(Y_1+\cdots+Y_N) = \mathrm{Var}(Y_1)+\cdots+\mathrm{Var}(Y_N)\ . \tag{3}$$

Legge dei grandi numeri. Date $Y_1,\dots,Y_N$ variabili aleatorie indipendenti con uguale valore atteso m ed uguale varianza σ^2, si chiama *media campionaria* la variabile aleatoria ottenuta facendo la media aritmetica di $Y_1,\dots,Y_N$, vale a dire

$$Y := \frac{Y_1+\cdots+Y_N}{N}\ .$$

Si ha allora che $\mathrm{E}(Y) = m$ e $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2/N$. Pertanto la disuguaglianza di Chebyshev implica che per ogni $t>0$ si ha

$$P\big(\text{“}|Y-m|\geq t\text{”}\big) \leq \frac{\sigma^2}{Nt^2}\ . \tag{4}$$

In particolare la probabilità che Y assuma valori che differiscono più di t dal valore atteso m tende a 0 quando N tende a $+\infty$ (quest'ultima affermazione è nota come “legge dei grandi numeri”).

Distribuzione di Bernoulli. Si dice che una variabile aleatoria Y ha una distribuzione (o legge) di *Bernoulli* di parametro p con $0\leq p\leq 1$ se Y assume solo i valori 1 e 0 con probabilità $p_1 = p$ e $p_0 = 1-p$. Si verifica facilmente che in tal caso

$$\mathrm{E}(Y) = p \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Y) = p(1-p)\ .$$

Esempio: si lancia una moneta e Y vale 1 quando viene testa e 0 altrimenti; allora Y è una variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro $p := 1/2$.

Distribuzione binomiale. Una variabile aleatoria Y ha una distribuzione *binomiale* di parametri n e p con $n = 1,2,\dots$ e $0\leq p\leq 1$ se Y assume come valori tutti i numeri interi k compresi tra 0 ed n con probabilità

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\ .$$

Sia Y la somma di n variabili aleatorie *indipendenti* con distribuzione di Bernoulli di parametro p; allora Y è una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri p ed n. Da questo e da quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti segue che

$$\mathrm{E}(Y) = np \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Y) = np(1-p)\ .$$

Esempio: si lanciano n dadi e Y corrisponde al numero di cinque che si ottengono; allora Y è una variabile aleatoria con legge binomiale di parametri n e $p := 1/6$.

Distribuzione geometrica. Una variabile aleatoria Y ha una distribuzione *geometrica* di parametro p con $0 \leq p \leq 1$ se Y assume come valori i numeri interi $k = 1, 2, \ldots$ con probabilità

$$p_k = (1-p)^{k-1} p \ .$$

Per una tale variabile aleatoria si ha

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Y) = \frac{1-p}{p^2} \ .$$

Esempio: si lancia un dado finché non esce un cinque o un sei e Y è uguale al numero di lanci che si devono fare; Y è una variabile aleatoria con legge geometrica di parametro $p := 1/3$.

Distribuzione di Poisson. Una variabile aleatoria Y ha una distribuzione di *Poisson* di parametro λ con $\lambda > 0$ se Y assume come valori i numeri interi $k = 0, 1, 2, \ldots$ con probabilità

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \ .$$

Per una tale variabile aleatoria si ha

$$\mathrm{E}(Y) = \lambda \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(Y) = \lambda \ .$$

Motivazione: un determinato esperimento ha una probabilità di successo p molto piccola e viene ripetuto in modo indipendente n volte con n molto grande – per la precisione si prende $n = \lambda/p$ con λ costante assegnata; si ha allora che la probabilità di avere k successi è

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_k \ ,$$

dove l'errore nell'ultima approssimazione tende a 0 quando n tende a $+\infty$. In altre parole la distribuzione di Poisson di parametro λ si ottiene come limite della distribuzione binomiale di parametri n e $p := \lambda/n$ per n che tende a $+\infty$; il valore atteso e la varianza possono essere quindi ottenuti passando al limite nelle formule per il valore atteso e la varianza della distribuzione binomiale.

Variabili aleatorie continue. Accenniamo infine al caso delle variabili aleatorie che assumono tutti i valori in un dato intervallo $[a, b]$ e non solo un numero finito di valori; si parla in tal caso di variabili aleatorie *continue* (mentre quelle considerate finora erano variabili aleatorie *discrete*). Per varie ragioni denotiamo queste variabili aleatorie con la lettera X invece della solita Y. Supponiamo inoltre di avere una funzione $p(x)$ – detta *distribuzione di probabilità* di X – tale che, comunque si prendano s, t con $a \leq s \leq t \leq b$, la probabilità dell'evento "il valore di X è compreso tra s e t" (in breve: "$s \leq X \leq t$") è data dalla formula

$$P\big(\text{“}s \leq X \leq t\text{”}\big) := \int_s^t p(x)\, dx \ . \tag{5}$$

Si noti che la probabilità che X assuma un certo valore x si ottiene applicando la formula (5) con $s := x$ e $t := x$ ed è pertanto sempre uguale a 0. La formula (5) implica inoltre che la probabilità che X assuma valore in un intervallo di lunghezza d che contiene x si approssima con $p(x) \cdot d$, e l'approssimazione è tanto migliore quanto più d è piccolo. Si noti infine che una distribuzione di probabilità $p(x)$ deve necessariamente soddisfare

$$p(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in [a, b] \qquad \text{e} \qquad \int_a^b p(x)\, dx = 1 \ ; \tag{6}$$

queste due condizioni servono a garantire che la probabilità dell'evento "$s \leq X \leq t$" sia sempre compresa tra 0 e 1, e sia uguale a 1 per l'evento certo "$a \leq X \leq b$".

In questo contesto il valore atteso di X è dato dalla formula

$$\mathrm{E}(X) := \int_a^b x\, p(x)\, dx \ .$$

Data una funzione f, il valore atteso della variabile aleatoria $f(X)$ è dato invece da

$$\mathrm{E}(f(X)) := \int_a^b f(x)\, p(x)\, dx \ .$$

Infine la varianza di X è il valore atteso della variabile aleatoria $(X-m)^2$ dove si è posto $m := \mathrm{E}(X)$, vale a dire

$$\mathrm{Var}(X) := E((X-m)^2) = \int_a^b (x-m)^2\, p(x)\, dx \ .$$

Il valore atteso e la varianza soddisfano tutte le proprietà elencate in precedenza nel caso delle variabili aleatorie discrete.

Distribuzione uniforme. Si dice che X è una variabile aleatoria con distribuzione *uniforme* sull'intervallo $[a, b]$ se X assume come valori tutti i numeri nell'intervallo $[a, b]$ e la distribuzione di probabilità è la funzione costante

$$p(x) := \frac{1}{b-a} \ .$$

Si verifica facilmente che in tal caso

$$\mathrm{E}(X) = \frac{b+a}{2} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \ .$$

Distribuzione esponenziale. X è una variabile aleatoria con distribuzione *esponenziale* di parametro λ con $\lambda > 0$ se X assume come valori tutti i numeri nell'intervallo $[0, +\infty)$ e la distribuzione di probabilità è

$$p(x) := \lambda e^{-\lambda x} \ .$$

Si verifica facilmente che in tal caso

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \ .$$

Esempio: si osserva una particella elementare instabile a partire dall'istante 0 in cui è stata creata e si indica con X l'istante in cui tale particella decade; in tal caso X è una variabile aleatoria con distribuzione elementare di parametro λ; il numero $1/\lambda$ è noto come "vita media" della particella in questione.

Distribuzione normale. X è una variabile aleatoria con distribuzione *normale (o Gaussiana)* di parametri m e σ con $\sigma > 0$ se X assume come valori tutti i numeri in $(-\infty, +\infty)$ e la distribuzione di probabilità è

$$p(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

dove $\exp(x) := e^x$ è la funzione esponenziale. In tal caso si ha che

$$\mathrm{E}(X) = m \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

(per via di queste formule $p(x)$ viene anche chiamata distribuzione normale con media m e varianza σ^2).

Teorema del limite centrale. Sia Y una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2, e supponiamo di sapere che Y è la somma di N variabili aleatorie *indipendenti* con uguale varianza. Il teorema del limite centrale dice che sotto opportune ipotesi che non specifichiamo, per ogni scelta di s e t la probabilità dell'evento "$s \leq Y \leq t$" si approssima con quella dell'evento "$s \leq X \leq t$" dove X è la variabile aleatoria con distribuzione normale di parametri m e σ, ovvero

$$P\big(\text{“}s \leq Y \leq t\text{”}\big) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_s^t \exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)\, dx \ ,$$

e l'errore nell'approssimazione è tanto più piccolo quanto più N è grande. In altre parole, una variabile aleatoria ottenuta come somma di un gran numero variabili aleatorie indipendenti con uguale varianza "assomiglia" a una variabile aleatoria con distribuzione normale.

1. Sia Y il numero ottenuto lanciando un dado.
   a) Quali valori può assumere la variabile aleatoria Y, e con quale probabilità?
   b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

2. Dare un esempio concreto di variabili aleatorie indipendenti.

3. Si estrae una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene 5 rosse, 3 nere e 2 bianche. Sia Y la variabile aleatoria che vale 2 quando viene estratta una pallina nera e 0 altrimenti, e sia Z la variabile aleatoria che vale 1 se viene estratta una pallina rossa e -1 altrimenti. Y e Z sono indipendenti?

4. Verificare che una variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro p ha valore atteso p e varianza $p(1-p)$.

5. Dare un esempio concreto di variabile aleatoria con legge di Bernoulli di parametro $p := 1/4$.

6. Si estrae una pallina a caso da un sacchetto che contiene n palline numerate da 1 a n, e si indica con Y il numero così ottenuto.
   a) Quali valori può assumere la variabile aleatoria Y, e con quale probabilità?
   b) Calcolare il valore atteso di Y e di Y^2.
   c) Calcolare la varianza di Y.
   [*Per b) usare le formule:* $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *e* $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.]

7. Sull'insieme di eventi elementari $X := \{a, b, c, d, e\}$ è data la distribuzione di probabilità $P(a) = P(b) := 1/4$ e $P(c) = P(d) = P(e) := 1/6$. Sia Y la variabile aleatoria che vale -1 nel caso che si verifichino gli eventi elementari a, b, c e vale 3 nei rimanenti casi.
   a) Quali sono i valori assunti da Y, e con quale probabilità?

b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

8. Si consideri l'insieme di eventi elementari $X := \{a, b, c, d\}$ dotato della probabilità uniforme. Consideriamo quindi le variabili aleatorie Y e Z definite come segue $Y(a) = Y(b) := 1$ e $Y(c) = Y(d) := -1$; $Z(a) := 2$, $Z(b) := s$, $Z(c) := -2$ e $Z(d) := -s$, dove s è un numero reale assegnato.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza sia di Y che di Z.
   b) Calcolare la covarianza di Y e Z.
   c) Determinare i valori di s per cui Y e Z sono indipendenti.

9. La variabile aleatoria Y ha valore atteso 2 e varianza 0,1. Detta p la probabilità che Y assuma valori maggior di 3, si usi la disuguaglianza di Chebyshev per dare una maggiorazione di p.

10. Sia Y una variabile aleatoria con valore atteso m e varianza σ^2.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria $3Y - 4$.
   b) Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $2Y^2$.
   c) Calcolare la covarianza di $Y - 2$ e $2Y + 3$.

11. Il signor A e il signor B scommettono sul lancio di due monete: se vengono due teste allora A dà 2 euro a B, se vengono due croci B dà 2 euro ad A, e nei restanti casi è patta. Indichiamo Y il guadagno del signor A e con Z il valore assoluto di Y.
   a) Calcolare il valore atteso e la varianza delle variabili aleatorie Y e Z.
   b) Dimostrare che la covarianza di Y e Z è 0.
   c) Dimostrare che Y e Z non sono indipendenti.

12. Sia Y il numero ottenuto lanciando due dadi. Calcolare il valore atteso e la varianza della variabile aleatoria Y. [*Si osservi che $Y = Y_1 + Y_2$ dove Y_1 è il risultato del primo dado ed Y_2 quello del secondo, e le variabili aleatorie Y_1 e Y_2 sono indipendenti.*]

13. Sia Y il numero ottenuto lanciando 10 dadi. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

14. Si estraggono due biglie a caso da un sacchetto che ne contiene cinque, numerate da 1 a 5. Indichiamo con Y il valore della prima biglia estratta e con Z quello della seconda.
   a) Verificare che Y e Z hanno la stessa distribuzione di probabilità.
   b) Calcolare il valore atteso di Y e Z.
   c) Calcolare la varianza di Y e Z.
   d) Dimostrare che Y e Z non sono indipendenti.
   e) Calcolare valore atteso di $Y \cdot Z$, la covarianza di Y e Z e la varianza di $Y + Z$.

15. Ripetere l'esercizio precedente supponendo che il sacchetto contenga dieci biglie numerate da 1 a 10. Per svolgere i calcoli possono essere utili le formule $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ e $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

16. Sia Y la percentuale di teste che si ottengono lanciando 100 monete.

a) Verificare che $Y = \frac{1}{100}Z$ dove Z è una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri $n := 100$ e $p := 1/2$.

b) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

c) Detta p la probabilità che la percentuale di teste sia inferiore al 10%, usare la disuguaglianza di Chebyshev per trovare una maggiorazione di p.

17. Dare un esempio concreto di variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri $n = 10$ e $p = 3/5$.

18. Il signor A e il signor B scommettono sul lancio di tre monete, stabilendo che il signor A paga 3 euro al signor B se vengono tre teste, 1 euro se vengono due teste, mentre in tutti gli altri casi il signor B paga 2 euro al signor A. Qual è la vincita media del signor A?

19. In un gioco a premi, il concorrente vince il premio scritto all'interno di un bussolotto estratto a caso da una scatola. Questa scatola contiene 90 bussolotti con una vincita di 1 euro, 9 con una vincita di 10 euro, ed 1 con una vincita di 800 euro. Qual è la vincita media?

20. In una variante del gioco descritto nell'esercizio precedente, al concorrente viene data la possibilità, sapendo il risultato dell'estrazione, di accettare quanto ha vinto oppure di chiedere la ripetizione dell'estrazione. A questo punto sono possibili diverse strategie: i) non chiedere mai la ripetizione, ii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 euro, iii) chiedere la ripetizione se la prima estrazione dà una vincita di 1 o di 10 euro.

    a) Calcolare la vincita media per ciascuna strategia e stabilire quella ottimale.

    b) Cosa cambia se nel fare la seconda estrazione non viene reinserito nella scatola il bussolotto estratto in precedenza?

21. Viene estratta una pallina a caso da un sacchetto che ne contiene 10 bianche e 5 nere, e il signor A e il signor B concordano quanto segue: se la pallina estratta è nera il signor A riceve 2 euro dal signor B e altrimenti paga 1 euro al signor B.

    a) Quanto guadagna in media il signor A?

    b) Quanto guadagna in media il signor A se si fanno due estrazioni invece di una, e si rimette nel sacchetto la pallina della prima estrazione prima di fare la seconda?

    c) Cosa succede se invece non si rimette nel sacchetto la pallina della prima estrazione?

22. Su quattro facce di un dado è scritta la lettera a, mentre sulle due rimanenti è scritta la lettera b. La variabile aleatoria Y indica quante a sono ottenute lanciando il dado n volte. Far vedere che Y ha una legge binomiale di parametri n e $p := 2/3$. Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.

23. Un certo "esperimento" ha solo due esiti: "successo" ed "insuccesso", con probabilità p ed $1-p$ rispettivamente. Si ripete l'esperimento in modo indipendente finché non si ottiene un successo, e si indica con Y il numero di tentativi fatti. Dimostrare le seguenti affermazioni:

    a) la probabilità di non avere alcun successo in k tentativi è $(1-p)^k$;

    b) la probabilità di non avere alcun successo in infiniti tentativi è 0;

    c) la probabilità di avere successo al k-esimo tentativo è $p(1-p)^{k-1}$.

24. Nell'esercizio precedente abbiamo insistito sul fatto che gli esperimenti devono essere "indipendenti", cioè realizzati in modo tale che il risultato di ciascun esperimento non è influenzato da quello degli altri. Evidenziate in quale punto della soluzione dell'esercizio avete usato quest'ipotesi. Proponete quindi un esempio concreto in cui quest'ipotesi non è verificata.

25. In media, quante volte devo lanciare due dadi per ottenere un doppio sei? [*Verificare che il numero Y di lanci da fare per ottenere un doppio sei è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* $p := 1/36$.]

26. Un dispositivo elettronico impiega un tempo T per eseguire una certa operazione. Talvolta capita, in modo puramente casuale, che avvenga un errore nell'esecuzione dell'operazione, ed in tal caso il dispositivo la ripete automaticamente finché viene svolta correttamente.
a) Sapendo che la probabilità che l'operazione venga svolta correttamente è p, calcolare la probabilità che servano due tentativi per ottenere il risultato corretto.
b) Calcolare la probabilità che servano k tentativi per ottenere il risultato corretto.
c) Quanto tempo serve in media per ottenere il risultato corretto?
[*Per c) si osservi che il tempo per evere il risultato corretto è dato dalla formula* $T \cdot Y$ *dove* Y *è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro* p.]

27. Il signor A ed il signor B decidono di lanciare un dado per 100 volte, e per ogni 6 che esce il signor A riceve 5 euro dal signor B, mentre in tutti gli altri casi dà 1 euro al signor B. Indichiamo con Y il guadagno del signor A alla fine dei 100 lanci.
a) Calcolare il valore atteso e la varianza di Y.
b) Prima di giocare il signor A ha in tasca 80 euro e dunque esiste la possibilità che alla fine egli non sia in grado di dare quanto dovuto al signor B. Detta P la probabilità di questo evento, utilizzare la disuguaglianza di Chebyshev per dimostrare che $P \leq 10\%$.
c) Calcolare il valore esatto della probabilità P di cui al punto precedente.
[*Per c), si cominci con il determinare qual è il massimo numero di sei che possono uscire affinchè il signor A si trovi a dover dare al signor B più di* 80 *euro*.]

28. La variabile aleatoria Z rappresenta il risultato di un certo esperimento. Di Z non è noto il valore atteso m, ma si sa che la varianza σ^2 è inferiore a 3. Per valutare il valore di m si ripete l'esperimento n volte e si calcola la media aritmetica M dei risultati così ottenuti: ci si aspetta che se n è grande M fornisca una buona approssimazione di m: in effetti questo è probabile ma non certo. Quanto deve essere grande n per far sì che la differenza $m - M$ sia inferiore in modulo a 0,5 con probabilità superiore al 95%?
[*Il valore di* M *corrisponde alla media campionaria di* n *variabili aleatorie con lo stesso valore atteso e la stessa varianza di* Z*: applicando pertanto la formula* (4) *si ottiene che*

$$P\big(\text{“}|M-m| \geq 0{,}5\text{”}\big) \leq \frac{\sigma^2}{0{,}5^2 n} \leq \frac{12}{n} \, .$$

Affinché l'evento "$|M - m| \leq 0{,}5$" *abbia probabilità superiore al* 95% *basta che l'evento* "$|M - m| \geq 0{,}5$" *abbia probabilità inferiore al* 5%*, e per ottenere ciò basta prendere* $n \geq 240$.]

29. Un programma per computer estrae un numero intero a caso tra 1 e 9, ciascuno con una diversa probabilità che non è nota. Mi interessa scoprire qual è la probabilità p che esca il

numero tre. Faccio allora girare il programma per 1000 volte, e calcolo la percentuale p_e di volte che è uscito il numero tre: è ragionevole aspettarsi che p_e sia vicino p, anche se non esattaamente uguale. Quant'è alta la probabilità che p_e differisca da p meno del 5%?

30. Date due variabili aleatorie Y, Z e due costanti c, d, dimostrare le seguenti affermazioni:
a) $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Cov}(Y; Y)$;
b) $\mathrm{Cov}(Y; c) = 0$;
c) $\mathrm{Cov}(Y + c; Z + d) = \mathrm{Cov}(Y; Z)$.

31. Dimostrare le seguenti affermazioni:
a) un evento con probabilità uguale a 0 oppure 1 è indipendente da qualunque altro evento;
b) una variabile aleatoria ha varianza nulla se e solo se è costante;
c) una variabile aleatoria costante è indipendente da qualunque altra variabile aleatoria;
d) una variabile aleatoria è indipendente da se stessa se e solo se è costante.

32. Siano Y, Z due variabili aleatorie indipendenti ed f, g due funzioni. Dimostrare che:
a) le variabili aleatorie Y^2 e Z^2 sono indipendenti;
b) le variabili aleatorie $f(Y)$ e $g(Z)$ sono indipendenti;
c) se $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Z) = 0$ allora $\mathrm{Var}(Y \cdot Z) = \mathrm{Var}(Y) \cdot \mathrm{Var}(Z)$.

33. Sia Y una variabile aleatoria ed A un evento con $P(A) > 0$. Il *valore atteso condizionato* di Y sapendo A, indicato con $\mathrm{E}(Y|A)$, è quello che si ottiene sostituendo nella formula (1) la probabilità p_k dell'evento "Y assume il valore y_k" con la probabilità condizionata sapendo A. Dimostrare che
$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Y|A) \cdot P(A) + \mathrm{E}(Y|A^c) \cdot P(A^c) \ . \tag{7}$$

34. Si lancia un dado finché non esce il numero sei e si indica con Y il numero di lanci fatto. Consideriamo inoltre l'evento $A :=$"non è uscito sei al primo lancio". Verificare che il valore atteso condizionato di Y sapendo A è uguale al valore atteso della variabile aleatoria $Y+1$, mentre il valore atteso condizionato di Y sapendo A^c è 1. Utilizzare quindi la formula (7) per calcolare il valore atteso di Y.
[*Siccome Y è una variabile aleatoria con distribuzione geometrica di parametro $p := 1/6$, questo esercizio è di fatto una dimostrazione della formula per il valore atteso della distribuzione geometrica nel caso $p := 1/6$. Allo stesso modo è possibile dimostrare quella formula per p qualunque. Con un ragionamento analogo, anche se più complicato, si dimostra la formula per la varianza.*]

35. Nel gioco del lotto, ad ogni "estrazione" si prendono cinque biglie a caso da un contenitore che ne contiene novanta, numerate da 1 a 90.
a) Calcolare la probabilità che in una data estrazione "esca" il numero 71, cioè che una delle cinque biglie sia il 71.
b) Chiamiamo "ritardo" il numero di estrazioni che intercorrono tra un'uscita 71 e la successiva. Qual'è il valor medio del ritardo?
[*Chiaramente il valor medio del ritardo è lo stesso per tutti i numeri.*]

36. Dire per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono distribuzioni di probabilità sull'intervallo $[0, 2]$:

a) $ax+b$; b) ax^2+b ; c) ax^b ; d) $-\log(ax)$; e) $a-\log x$.

[*Si ricordi che una funzione $p(x)$ è una distribuzione di probabilità sull'intervallo* $[a,b]$ *se soddisfa le due condizioni date nella formula* (6).]

37. Dire per quali valori dei parametri $a,b\in\mathbb{R}$ le seguenti funzioni sono distribuzioni di probabilità sull'intervallo $[0,+\infty)$:

$$\text{a) } e^{-ax}\ ;\quad \text{b) } be^{-ax}\ ;\quad \text{c) } ax+b\ ;\quad \text{d) } \frac{a}{1+bx}\ ;\quad \text{e) } \frac{a}{(1+bx)^2}\ ;\quad \text{f) } \frac{a}{1+x^2}\ .$$

38. Sia X una variabile aleatoria con valori nell'intervallo $[0,+\infty)$. Calcolare la probabilità che X assuma valor compresi tra 0 e 1 per ciascuna delle seguenti distribuzioni di probabilità:

$$\text{a) } 3e^{-3x}\ ;\quad \text{b) } \frac{1}{1+x}\ ;\quad \text{c) } xe^{-x}\ ;\quad \text{d) } \frac{2x}{1+x^2}\ ;\quad \text{e) } 2xe^{-2x}\ .$$

39. Sia X una variabile aleatoria con valori nell'intervallo $[1,3]$ e distribuzione di probabilità uniforme, cioè $p(x):=1/2$. Calcolare il valor medio e la varianza delle seguenti variabili aleatorie:

$$\text{a) } X\ ;\quad \text{b) } 2X+1\ ;\quad \text{c) } X^2\ ;\quad \text{d) } 4X^2-3\ ;\quad \text{e) } e^X\ ;\quad \text{f) } \frac{2}{1+X}\ .$$

40. Sia X una variabile aleatoria continua e siano c,d due numeri. Dimostrare le seguenti proprietà a partire dalla definizione di valore atteso e varianza di una variabile aleatoria continua:
a) $\mathrm{E}(cX+d)=c\,\mathrm{E}(X)+d$:
b) $\mathrm{Var}(cX+d)=c^2\mathrm{Var}(X)$:
c) $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{E}(X^2)-(\mathrm{E}(X))^2$.

41. Dimostrare le formule per il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria con distribuzione uniforme.

42. Dimostrare le formule per il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ.

43. Dando per noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}\ ,$$

verificare che la distribuzione normale

$$p(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\Big(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\Big)$$

è effettivamente una distribuzione di probabilità, ovvero ha integrale uguale a 1.
[*Utilizzare il cambio di variabile* $t=(x-m)/\sqrt{2\sigma^2}$.]

44. Dimostrare che una variabile aleatoria con distribuzione normale di parametri m e σ ha effettivamente media m e varianza σ^2.

45. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro λ, e per ogni $t \geq 0$ sia A_t l'evento "X assume un valore maggiore di t" (cioè $A_t :=$"$X \geq t$").
    a) Calcolare la probabilità $P(A_t)$.
    b) Verificare che $P(A_{t+s}|A_t) = P(A_s)$ per ogni $s \geq 0$.

    Commento. Supponiamo che X rappresenti l'istante in cui decade una certa particella instabile tenuta sotto osservazione a partire dal'istante 0 in cui è stata creata. Allora $P(A_t)$ rappresenta la probabilità che la particella sopravviva almeno fino all'istante t, e la formula al punto b) ci dice che se la particella non è ancora decaduta all'istante t, allora la probabilità che sopravviva almeno per un ulteriore tempo s non dipende da t ma solo da s. In altre parole, la probabilità che la particella decada in un certo intervallo di tempo in cui viene osservata non dipende da quanto tempo era vissuta prima (e per questo si dice talvolta che il decadimento è un processo "senza memoria"). Si osservi che se X rappresenta l'istante in cui un certo meccanismo (ad esempio un computer) si guasta non vale affatto una proprietà del genere: siccome l'eventualità di un guasto dipende dall'usura, ci aspettiamo che la probabilità che se ne verifichi uno in un dato intervallo di tempo sia tanto più grande quanto più vecchio è il meccanismo. Si noti infine che quella esponenziale è l'unica distribuzione di probabilità per cui vale la formula dimostrata in b), e quindi ogni processo (continuo) senza memoria deve avere distribuzione esponenziale.

1. Calcolare le norme, o lunghezze, dei seguenti vettori:

   a) $(-4,3)$; b) $(1,-2,2)$; c) $(a+2, a-2, 1)$; d) $(a^2-1, 2a)$.

   (In questo esercizio e in quelli che seguono a è un qualunque numero reale.)

2. Svolgere i seguenti calcoli:

   a) $-4\cdot(1,0)+(3,2)$; b) $(1,0,2,1)-(-1,2,-3,4)$; c) $(1,a,-2a)-a\cdot(1/a,1,2)$.

   d) $(-2,0)\cdot(3,2)$; e) $(1,0,2,4)\cdot(-1,2,-3,2)$; f) $(1,a,-2a)\cdot(3,2,1)$.

3. Calcolare le norme dei vettori $(1,2)$ e $(1,-3)$ e l'angolo tra essi compreso.

4. Calcolare le norme dei vettori $(1,0,2,0)$ e $(3,-1,1,-3)$ e l'angolo tra essi compreso.

5. Dire per quali valori di a i vettori $(a,2)$ e $(1,2-a)$ sono ortogonali.

6. Dire per quali valori di a e b i vettori $(b,a,2)$, $(-1+a,-b,b+1)$ sono ortogonali.

7. Calcolare $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

8. Posto $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, verificare che $AB \neq BA$.

9. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

10. Calcolare $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

11. Calcolare il determinante e l'inversa di $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Calcolare il determinante e l'inversa di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

13. Dire per quali a la matrice $\begin{pmatrix} -3 & a \\ 1-a & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile, e calcolarne l'inversa.

14. Calcolare l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,1)$ e $(1,2)$.

15. Calcolare l'area del triangolo di vertici $(-2,3)$, $(2,1)$ e $(1,2)$.

16. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
[*Conviene sviluppare il determinante usando la prima colonna oppure l'ultima riga.*]

17. Una matrice A di dimensioni $n \times n$ si dice *triangolare superiore* se $A_{i,j} = 0$ per tutte le coppie di indici i, j tali che $i > j$ (in altre parole i coefficienti situati al di sotto della diagonale che congiunge il vertice in alto a sinistra della matrice con quello in basso a destra sono tutti nulli).
Verificare (almeno per $n = 2, 3, 4$) che il determinante di una matrice triangolare superiore A è uguale a $A_{1,1} \cdot A_{2,2} \cdots A_{n,n}$, vale a dire il prodotto dei coefficienti sulla diagonale.

18. Scrivere in forma matriciale $Ax = b$ il seguente sistema di quattro equazioni lineari in quattro incognite
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1 \end{cases} .$$

19. a) Scrivere in forma matriciale $Ax = b$ il seguente sistema di tre equazioni lineari in tre incognite
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3 = 0 \\ 2 - x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = x_1 - x_3 \end{cases} .$$
b) Calcolare l'inversa di A e risolvere il sistema.