Versione: 6 giugno 2005

Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica

Testi e soluzioni degli scritti d'esame di

Calcolo Differenziale e Integrazione

a.a. 2003/04

docenti: G. Alberti, A. Briani

Giovanni Alberti
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa
largo Pontecorvo 5
56127 Pisa
www.dm.unipi.it/~alberti

Avvertenze

Questa è una raccolta dei testi degli scritti d'esame per i due moduli di Calcolo Differenziale ed Integrazione del corso di laurea in Matematica, a.a. 2003/04. Questi scritti si compongono di due parti: una prima parte con otto domande o problemi molto semplici a cui si deve dare solo la risposta, ed una seconda parte con tre o più problemi per cui invece si deve dare una soluzione articolata e spiegata in dettaglio. Il tempo a disposizione è di un'ora per la prima parte, e di due ore per la seconda. Per la sufficienza piena sono solitamente richieste almeno cinque risposte corrette nella prima parte, ed un problema completamente risolto nella seconda.

La prima sezione di questi appunti consta dei testi di tutti gli scritti, incluse le prove in itinere, mentre la seconda sezione contiene una breve traccia delle soluzioni.

Nella lista sottostante sono riportati in corsivo gli argomenti non fondamentali.

Programma di Calcolo Differenziale

1. Successioni di punti nello spazio n-dimensionale. Convergenza delle successioni di Cauchy, Teorema di Bolzano-Weierstrass.
2. Insiemi aperti, chiusi, compatti, densi; frontiera. Funzioni di n variabili reali: definizione di limite e continuità, proprietà delle funzioni continue, esistenza di massimo e minimo su insiemi compatti, uniforme continuità. Funzioni a valori vettoriali (mappe).
3. Derivate parziali di una funzione di n variabili, gradiente. Differenziabilità e sviluppo di Taylor all'ordine 1. Teorema del differenziale totale. Derivate parziali seconde e matrice Hessiana, teorema di Schwartz, sviluppo di Taylor all'ordine 2. Mappe derivabili. Regole di calcolo delle derivate.
4. Massimi, minimi e punti critici. Forme quadratiche, segnatura, condizioni necessarie e sufficienti di massimalità e minimalità locale.
5. *Funzioni convesse.*
6. Integrale secondo Riemann-Peano-Jordan di una funzione limitata (integrali multipli). Calcolo degli integrali: teorema di Fubini, formula di cambio di variabile. Integrabilità delle funzioni continue. Approssimazione con somme finite. Misura di un insieme limitato. L'integrale come volume del sottografico.
7. *Topologia in spazi metrici, completezza e compattezza, equivalenze delle diverse definizioni di continuità. Connessione e connessione per archi.*
8. Teorema delle contrazioni. Norma del sup e completezza dello spazio delle funzioni continue. Completezza dello spazio delle funzioni k-derivabili. Serie di funzioni e serie di potenze.
9. Sistemi di equazioni differenziali del primo ordine: teorema di esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy in ipotesi generali. Teorema di esistenza e unicità per equazioni differenziali di ordine k.
10. Classi di equazioni differenziali risolubili esplicitamente (equazioni a variabili separabili, di Eulero, di Bernoulli, ecc.).
11. Equazioni lineari di ordine k. Struttura dello spazio delle soluzioni. Soluzione esplicita delle equazioni omogene a coefficienti costanti. Metodo di riduzione dell'ordine. Metodo di variazione delle costanti. Teorema degli annichilatori.

Programma di Integrazione

12. Sistemi di equazioni lineari del primo ordine. Esponenziale di matrici e metodi di calcolo.
13. Lemma di Gronwall e teoremi di confronto. Studio qualitativo delle soluzioni delle equazioni differenziali non lineari.
14. *Completezza: Teorema di Baire ed applicazioni.*

15. *Equivalenza delle diverse definizioni di compattezza in spazi metrici. Teorema di Ascoli-Arzelà. Teorema di Peano per le equazioni differenziali ordinarie.*
16. Curve e superfici come equazioni: struttura geometrica dell'insieme delle soluzioni di un sistema di k equazioni in n incognite: il teorema della funzione implicita (teorema del Dini).
17. Teorema di invertibilità locale per le funzioni vettoriali.
18. Spazio tangente ad un insieme in un punto. Spazio tangente ad una superficie definita tramite equazioni. Massimi e minimi di una funzione differenziabile su una superficie definita tramite equazioni. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
19. Curve in forma parametrica. Curve regolari: retta tangente ed orientazione. Definizione intrinseca di lunghezza e formula per il calcolo. Lavoro di un campo di vettori lungo una curva. Calcolo per curve parametrizzate.
20. Potenziale di un campo di vettori. Calcolo del potenziale. Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del potenziale.
21. I grafici di funzioni reali come ipersuperfici. Piano tangente ed orientazione. Formula dell'area (e giustificazione per funzioni affini). Flusso di un campo di vettori.
22. Teorema della divergenza. Teorema di Gauss-Green.
23. Superfici parametrizzate regolari nello spazio. Prodotto vettoriale nello spazio. Piano tangente ed orientazione. Calcolo dell'area. Flusso di un campo di vettori. Rotore di un campo di vettori. Teorema di Stokes (senza dimostrazione). *Potenziale vettore.*
24. Serie di Fourier reale e complessa per funzioni di una variabile 2π-periodiche. Teorema di convergenza totale della serie di Fourier per funzioni di classe C^1. Estensioni del teorema di convergenza.
25. *Derivazione dell'equazione del calore in dimensione qualunque, e dell'equazione delle onde in dimensione (spaziale) uguale a uno. Soluzione dell'equazione del calore e delle onde in dimensione uno con condizioni di periodicità al bordo tramite serie di Fourier (separazione delle variabili).*

Calcolo Differenziale, a.a. 2003/04 - Testi

Primo Compitino, 12 novembre 2003

Prima parte, gruppo A

1. Elencare e classificare i punti critici di $f(x,y) := x^2y + xy^2 - xy$.
2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (t, t^2e^t)$. Trovare un'inversa sinistra di f, cioè una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $g(f(t)) = t$.
3. Data $f(x,y) := e^{x^2+y}(\cos x + 1)$, calcolarne il gradiente nel punto $P := (\pi, 0)$ e dire in quali direzioni la derivata direzionale (sempre in P) è minima, ed in quali è nulla.
4. Sia $f(x) := |x|x_1 + \lg(|x|)$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Calcolare il gradiente di f.
5. Dire se esistono ed in caso calcolare: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2+y^4)}{x^2+y^4}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
6. Scrivere il polinomio caratteristico della matrice simmetrica $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

   Dire se M è definita positiva, negativa, o altro.
7. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$. Calcolare $\displaystyle\int_T yx\,\sin(x^2)\,dx\,dy$.
8. Sia C il cerchio di centro $(3,0)$ e raggio 2. Dire per quali $\beta > 0$ esiste finito il seguente integrale doppio e calcolarlo:
$$\int_C \frac{1}{((x-3)^2+y^2)^{2\beta}}\,dx\,dy\ .$$

Prima parte, gruppo B

1. Elencare e classificare i punti critici di $f(x,y) := x^2y + 2xy^2 - xy$.
2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $f(t) = (t, te^t)$. Trovare un'inversa sinistra di f, cioè una funzione $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $g(f(t)) = t$.
3. Data $f(x,y) := e^{x+y^2}(\cos y + 1)$, calcolarne il gradiente nel punto $P := (0, \pi)$ e dire in quali direzioni la derivata direzionale (sempre in P) è minima, ed in quali è nulla.
4. Sia $f(x) := |x|^2x_1 + \lg(|x|)$ per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Calcolare il gradiente di f.
5. Dire se esistono ed in caso calcolare: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.
6. Scrivere il polinomio caratteristico della matrice simmetrica $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Dire se M è definita positiva, negativa, o altro.
7. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,-2)$. Calcolare $\displaystyle\int_T yx\,\sin(x^2)\,dx\,dy$.
8. Sia C il cerchio di centro $(-1,1)$ e raggio 2. Dire per quali $\beta > 0$ esiste finito il seguente integrale doppio e calcolarlo:
$$\int_C \frac{1}{((x+1)^2+(y-1)^2)^{2\beta}}\,dx\,dy\ .$$

PRIMO COMPITINO, 12 NOVEMBRE 2003

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) := xy\, e^{2xy}$ in $\mathbb{R}^2$.
   b) Determinare la natura di questi punti critici.
   c) Esistono massimo e minimo assoluti di f?
2. a) Descrivere in coordinate polari il cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1.
   b) Disegnare e descrivere in coordinate polari l'insieme C dei punti del cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 che non appartengono al cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1.
   c) Calcolare
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\ .$$
3. Una funzione $V : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ si dice radiale se si può scrivere nella forma $V(x) := v(|x|)$ con $v : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, mentre un campo di vettori $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ si dice radiale se si può scrivere nella forma
$$F(x) := f(|x|)\, \frac{x}{|x|}$$
con $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Chiamiamo divergenza di un campo di vettori F (non necessariamente radiale) la funzione
$$\mathrm{div} F := \sum_1^n D_i F_i\ .$$
   a) Calcolare il gradiente di una funzione radiale V in funzione di v;
   b) dimostrare che ogni campo di vettori radiale F è il gradiente di una funzione radiale;
   c) calcolare la divergenza di un campo di vettori radiale F in funzione di f;
   d) determinare tutti i campi di vettori radiali con divergenza nulla.
4. Sia C l'insieme dei punti $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tali che
$$\theta \geq \pi/4\ , \quad \frac{1}{\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\theta}\ , \tag{1}$$
e sia D l'immagine di C secondo la funzione $\Phi(\rho,\theta) := (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. In altre parole, D è l'insieme dei punti del piano cartesiano descritto in coordinate polari dalle condizioni (1). Disegnare approssimativamente l'insieme D, e calcolarne l'area.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) := xy\, e^{-xy}$ in $\mathbb{R}^2$.
   b) Determinare la natura di questi punti critici.
   c) Esistono massimo e minimo assoluti di f?
2. a) Descrivere in coordinate polari i cerchi di raggio 1 e centri $(0,1)$ e $(1,0)$, rispettivamente.
   b) Disegnare e descrivere in coordinate polari l'intersezione C dei due cerchi.
   c) Calcolare
$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\, dx\, dy\ .$$
3. Uguale al gruppo A.

4. Sia C l'insieme dei punti $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\theta \geq \pi/2 \ , \quad \frac{1}{\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\theta} \ , \tag{1}$$

e sia D l'immagine di C secondo la funzione $\Phi(\rho, \theta) := (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. In altre parole, D è l'insieme dei punti del piano cartesiano descritto in coordinate polari dalle condizioni (1). Disegnare approssimativamente l'insieme D, e calcolarne l'area.

SECONDO COMPITINO, 9 GENNAIO 2003

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) := \begin{cases} \alpha n & \text{per } 0 \le x \le 1/n, \\ \beta & \text{per } 1/n < x \le 1. \end{cases}$$
Determinare il limite puntuale di (f_n) e stabilire sotto quali condizioni (su α e β) la convergenza è anche uniforme su $[0,1]$.

2. Dire se la serie $\displaystyle\sum_1^\infty x^2 e^{-nx}$ converge totalmente in $[0,+\infty)$.

3. Sia T il cono avente come base il cerchio nel piano xy di centro l'origine e raggio 1 e come vertice il punto $(0,0,1)$. Calcolare
$$\int_T z\,dx\,dy\,dz\ .$$

4. Posto $I := [0,1]$, dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $C(I)$ sono chiusi rispetto alla metrica della convergenza uniforme: a) le funzioni f di classe C^1; b) le funzioni f tali che $f(0) = 0$; c) le funzioni f tali che $f(x) \ge 0$ per ogni x.

5. Si trovi un'equazione differenziale del tipo $\dot y = f(y)$ che ha come soluzione $y = \log x$.

6. Scrivere il polinomio caratteristico e la soluzione generale dell'equazione $D^4 y + 4y = 0$.

7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot y = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{x}{y}$ con dato iniziale $y(2) = \sqrt{e}$.

8. Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x,y) = x^2 - y^2$.

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si consideri la successione di funzioni
$$f_n(x) := \begin{cases} \alpha/n & \text{per } 0 \le x \le 1/n, \\ \beta & \text{per } 1/n < x \le 1. \end{cases}$$
Determinare il limite puntuale di (f_n) e stabilire sotto quali condizioni (su α e β) la convergenza è anche uniforme su $[0,1]$.

2. Dire se la serie $\displaystyle\sum_1^\infty x e^{-nx}$ converge totalmente in $[0,+\infty)$.

3. Sia T il cono avente come base il cerchio nel piano xy di centro l'origine e raggio 1 e come vertice il punto $(0,0,-1)$. Calcolare
$$\int_T z\,dx\,dy\,dz\ .$$

4. Posto $I := [0,1]$, dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $C(I)$ sono chiusi rispetto alla metrica della convergenza uniforme: a) le funzioni f di classe C^1; b) le funzioni f tali che $f(1) > 0$; c) le funzioni f tali che $f(x) < 0$ per ogni x.

5. Si trovi un'equazione differenziale del tipo $\dot{y} = f(y)$ che ha come soluzione $y = \tan x$.
6. Scrivere il polinomio caratteristico e la soluzione generale dell'equazione $D^4 y + 4y = 0$.
7. Risolvere l'equazione differenziale $\dot{y} = \dfrac{y}{x^2} - \dfrac{x}{y}$ con dato iniziale $y(2) = \sqrt{e}$.
8. Fare un disegno approssimativo del grafico di $f(x, y) = 1 + x^2 + 2y^2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Data la successione di funzioni $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx}$ definite per $x > 0$, determinare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il limite puntuale e gli intervalli in cui si ha convergenza uniforme.
2. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$x^2 \ddot{y} + (1 - 2\alpha)x\dot{y} + \alpha^2 y = x^2 \qquad (1)$$
Determinare la soluzione generale di (1) per $x > 0$;
3. Dati $R > 0$, $n \geq 2$ intero, indichiamo con B_R la palla chiusa di centro l'origine e raggio R in $\mathbb{R}^n$, e con ω_n il volume n-dimensionale della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$.
a) Per $n = 2, 3$, dimostrare che data f funzione continua su $[0, R]$ si ha
$$\int_{B_R} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n = n\omega_n \int_0^R f(t)\, t^{n-1} dt\ . \qquad (2)$$
b) Dimostrare la (2) per n qualunque.
4. Sia (K, d) uno spazio metrico compatto, ed $f : K \to K$ un'applicazione tale che
$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in K,\ x \neq y.$$
Sia (K_n) la successione di insiemi definita per induzione da $K_0 := K$ e $K_{n+1} := f(K_n)$ per $n \geq 0$. Dimostrare che:
a) ciascun K_n è compatto e $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$;
b) l'intersezione K_∞ di tutti i K_n è compatta, non vuota e soddisfa $K_\infty = f(K_\infty)$;
c) per ogni chiuso $C \subset K$ contenente almeno due punti, $\mathrm{diam}(f(C)) < \mathrm{diam}(C)$;
d) l'applicazione f ammette uno ed un solo punto fisso.

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. Data la successione di funzioni $f_n(x) = x^\alpha/(n + x^2)$ definite per $x > 0$, determinare, al variare di $\alpha > 0$, il limite puntuale e gli intervalli in cui si ha convergenza uniforme.
2. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri l'equazione differenziale
$$x^2 \ddot{y} + (1 - 2\alpha)x\dot{y} + \alpha^2 y = x \qquad (1)$$
Determinare la soluzione generale di (1) per $x > 0$.
3. Dati $R > 0$, $n \geq 2$ intero, indichiamo con B_R la palla chiusa di centro l'origine e raggio R in $\mathbb{R}^n$, e con ω_n il volume n-dimensionale della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$.
a) Per $n = 2, 3$, dimostrare che data f funzione continua su $[0, R]$ si ha
$$\int_{B_R} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n = n\omega_n \int_0^R f(t)\, t^{n-1} dt\ . \qquad (2)$$

b) Dimostrare la (2) per n qualunque.

4. Sia (K, d) uno spazio metrico compatto, ed $f : K \to K$ un'applicazione tale che

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \text{per ogni } x, y \in K,\ x \neq y.$$

Sia (K_n) la successione di insiemi definita per induzione da $K_0 := K$ e $K_{n+1} := f(K_n)$ per $n \geq 0$. Dimostrare che:
a) ciascun K_n è compatto e $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \cdots$;
b) l'intersezione K_∞ di tutti i K_n è compatta, non vuota e soddisfa $f(K_\infty) = K_\infty$;
c) per ogni chiuso $C \subset K$ contenente almeno due punti, $\mathrm{diam}(f(C)) < \mathrm{diam}(C)$;
d) l'applicazione f ammette uno ed un solo punto fisso.

Scritto del I appello, 12 gennaio 2003

Prima parte, gruppo A

1. Calcolare la matrice gradiente di $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ ed il suo determinante.
2. Dire se esiste il limite per $(x,y) \to (0,0)$ di $f(x,y) := \dfrac{xy}{x^2+y^2-xy}$, ed in caso calcolarlo.
3. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   Dire se M è definita positiva, negativa, o altro.
4. Dare un esempio di funzione reale limitata e continua su $\mathbb{R}^2$ che non ammette punti di minimo né di massimo.
5. Posto $D := \{x \le 0, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$, calcolare $\displaystyle\int_D x^3 + xy^2\, dx\, dy$.
6. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} + 2xy = 4x$.
7. Dire quali delle seguenti funzioni possono essere soluzioni di equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti:

   $$\text{a) } 1-x^2\ , \qquad \text{b) } e^{-x} + x\cos x\ , \qquad \text{c) } \sin(x^3)\ , \qquad \text{d) } \cos^2 x - \sin^2 x\ .$$
8. Sotto quali ipotesi l'esistenza delle derivate parziali implica la differenziabilità? scrivere un enunciato preciso.

Prima parte, gruppo B

1. Calcolare la matrice gradiente di $f(x,y) = (e^y \cos x, e^y \sin x)$ ed il suo determinante.
2. Dire se esiste il limite per $(x,y) \to (0,0)$ di $f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2+xy}$, ed in caso calcolarlo.
3. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   Dire se M è definita positiva, negativa, o altro.
4. Dare un esempio di funzione reale continua su $\mathbb{R}^2$ con un unico punto di minimo e nessun punto di massimo.
5. Posto $D := \{x \ge 0, 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$, calcolare $\displaystyle\int_D x^3 + xy^2\, dx\, dy$.
6. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\dot{y} + 2xy = -2x$.
7. Dire quali delle seguenti funzioni possono essere soluzioni di equazioni lineari omogenee a coefficienti costanti:

   $$\text{a) } 1+x^2\ , \qquad \text{b) } e^{x} + x\sin x\ , \qquad \text{c) } \sin(x^2)\ , \qquad \text{d) } 2\sin x\cos x\ .$$
8. Enunciare il teorema delle contrazioni.

Scritto del I appello, 12 gennaio 2003

Seconda parte, gruppo A

1. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) := xyz(x^2+y^2+z^2-1)$ sulla palla chiusa B di centro l'origine e raggio 1.
2. Dato $r > 1$, sia A_r l'insieme dei punti (x,y) tali che $r^2x^2 + (r^2-1)y^2 \le \pi^2 r^4$ e
$$I_r := \int_{A_r} \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy \ .$$
Fare un disegno approssimativo di A_r e calcolare $\lim_{n\to\infty} I_{2n+\frac{1}{2}}$.
3. a) Trovare la soluzione di $\ddot{y} - y = 2e^{-x^2}$ con i dati iniziali $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.
b) Dimostrare che la soluzione è convessa.
4. Sia $\mathbb{R}^{m\times n}$ lo spazio delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali. Per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sia
$$\phi(A) := \max |Av| \tag{1}$$
dove il massimo viene preso tra tutti vettori $v \in \mathbb{R}^n$ di modulo 1. Dimostrare che:
a) il massimo in (1) esiste;
b) ϕ è una norma su $\mathbb{R}^{m\times n}$;
c) $M := A^tA$ è una matrice simmetrica $n \times n$ e $|Av| = \sqrt{(Mv)\cdot v}$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
d) $\phi(A) = \sqrt{\lambda_{\max}}$ con $\lambda_{\max}$ il massimo autovalore di M.

Seconda parte, gruppo B

1. Trovare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z) := xyz(4-x^2-y^2-z^2)$ sulla palla chiusa B di centro l'origine e raggio 2.
2. Dato $r > 1$, sia A_r l'insieme dei punti (x,y) tali che $r^2x^2 + (r^2-1)y^2 \le \pi^2 r^4$ e
$$I_r := \int_{A_r} \sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy \ .$$
Fare un disegno approssimativo di A_r e calcolare $\lim_{n\to\infty} I_{2n-\frac{1}{2}}$.
3. a) Trovare la soluzione di $\ddot{y} - y = -2e^{-x^2}$ con i dati iniziali $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.
b) Dimostrare che la soluzione è concava.
4. Sia $\mathbb{R}^{m\times n}$ lo spazio delle matrici $m \times n$ a coefficienti reali. Per ogni $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sia
$$\phi(A) := \max |Av| \tag{1}$$
dove il massimo viene preso tra tutti vettori $v \in \mathbb{R}^n$ di modulo 1. Dimostrare che:
a) il massimo in (1) esiste;
b) ϕ è una norma su $\mathbb{R}^{m\times n}$;
c) $M := A^tA$ è una matrice simmetrica $n \times n$ e $|Av| = \sqrt{(Mv)\cdot v}$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$;
d) $\phi(A) = \sqrt{\lambda_{\max}}$ con $\lambda_{\max}$ il massimo autovalore di M.

Scritto del II appello, 12 febbraio 2004

Prima parte

1. Data $f(x,y) := x\sqrt{x^2+y^2}$, calcolare le derivate parziali $D_x f$ e $D_y f$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Trovare massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2+y^2-2x-2y+2$ nel cerchio (pieno) di centro $(1,1)$ e raggio 1.
3. Determinare l'insieme E di convergenza puntuale della serie $\sum e^{nx^2-n}$. La serie converge uniformemente E? e totalmente?
4. Posto $A := \big\{(x,y,z) : \ 0 \le z \le 1,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\big\}$, calcolare $\displaystyle\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2)^3}$.
5. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $\dot y = \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{y}{x}$ per $x > 0$.
6. Posto $A_\beta := \{(x,y) : \ 0 \le x \le y^{-\beta}\,,\ 1 \le y\}$, Dire per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ risulta finito l'integrale
$$\int_{A_\beta} y^\alpha \, dx\, dy \ .$$
7. Determinare un'equazione differenziale del terzo ordine che ammette come soluzioni *tutte* le funzioni del tipo $ax + bx^2$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Trovare un'equazione differenziale del secondo ordine con la stessa proprietà.
8. Enunciare uno dei vari teoremi di esistenza ed unicità per le soluzioni del problema di Cauchy.

Seconda parte

1. a) Risolvere l'equazione $\ddot y - y = -x^4$ con dati iniziali $y(0) = \dot y(0) = 0$.
   b) Per ogni intero $n \ge 1$, risolvere $\ddot y - y = -x^{2n}$ con dati iniziali $y(0) = \dot y(0) = 0$.
2. Sia $u := x^2 \sin x$, trovare una funzione $g \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $\dot u + \dot g\, u = \dot g\, g$ in $\mathbb{R}$.
3. Sia $I = [a,b]$. Per ogni $f \in C(I)$, indichiamo con $\|f\|_\infty$ l'usuale norma del sup, e poniamo poi
$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx \ .$$
   a) Dimostrare che $\|f\|_1$ è una norma su $C(I)$.
   b) Quali implicazioni sussistono tra le affermazioni '$\|f_n\|_\infty \to 0$' e '$\|f_n\|_1 \to 0$'?
4. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione data da $\Phi(x,y) := (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$:
   a) calcolare il determinante Jacobiano di Φ;
   b) descrivere esplicitamente $\Phi(B)$, dove B è il cerchio (pieno) di centro l'origine e raggio 1;
   c) calcolare l'area di $\Phi(B)$ tramite la formula di cambio di variabile, e confrontare con quanto fatto al punto b).

Scritto del III appello, 7 giugno 2004

Prima parte

1. Determinare la frontiera dei seguenti insiemi nel piano:

$$\text{a) } \{(x,y): \ x \neq 0\} , \qquad \text{b) } \{(x,y): \ x \in \mathbb{Q}, \ y \in \mathbb{Z}\} , \qquad \text{c) } [0,1] \times (0,+\infty) .$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. Scrivere la derivata di $g(t) := f(\cos t, \sin t)$.

3. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice $M := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & a & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è definita positiva.

4. Sia A l'insieme dei punti (x,y) tali che $x \geq 0$ e $|y| \leq e^{-x}$. Calcolare $\displaystyle\int_A |y| e^x dx\, dy$.

5. Dare un'esempio di successione di funzioni continue su $[0,1]$ che converge puntualmente ma non uniformemente.

6. Scrivere lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 in $(0,0,0)$ di $f(x,y,z) := \exp(y^2 + \cos(x+z))$.

7. Risolvere l'equazione $\dot{y} = xy + x^3 y^2$ con dato iniziale $y(0) = 1$.

8. Si consideri l'equazione lineare non omogenea $\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = xe^{-x}$. Qual è la più piccola classe di funzioni elementari in cui è possibile trovare una soluzione particolare di questa equazione?

Seconda parte

1. Fissato $a > 0$ un numero reale, si ponga $f_a(x,y) := a(x^2 + y^2) + \cos x \, \cos y$:
   a) dimostrare che f_1 è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$;
   b) determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di f_1;
   c) dire per quali valori di a la funzione f_a è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$;
   d) determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto di $f_{1/\pi}$.

2. Dato $r > 0$, sia A l'insieme dei punti (x,y) tali che $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $x^{2/5} + y^{2/5} \leq r^{2/5}$. Calcolare

$$\int_A y\, dx\, dy \ .$$

   [*Suggerimento: usare un cambio di coordinate del tipo* $x = \rho \cos^\alpha \theta$, $y = \rho \sin^\alpha \theta$.]

3. Determinare la soluzione dell'equazione differenziale

$$\ddot{y} - y = \frac{1}{1 + e^{2x}}$$

   il cui grafico che passa per il punto $(0,0)$ con tangente orizzontale.

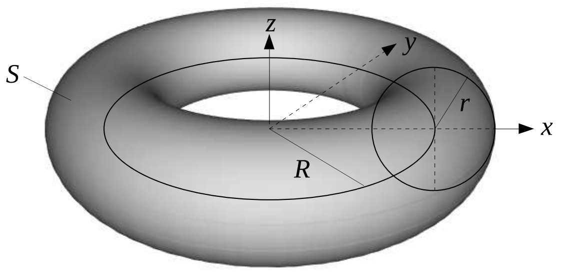
Scritto del IV appello, 5 luglio 2004

Prima parte

1. Trovare un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti che ammetta come soluzione $y = x(x+3)e^{-x}$.
2. Dare un esempio di matrice simmetrica 3×3 che non sia definita positiva ma abbia determinante positivo e traccia positiva.
3. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente funzione è continua su tutto $\mathbb{R}^2$:
$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
4. Sia C l'insieme dei punti in $\mathbb{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 = 4$ e $z \geq 1$. Calcolare, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$\int_C \frac{x^2}{z^\alpha}\, dx\, dy\, dz \ .$$
5. Scrivere la derivata seconda di $f(x,y,z) := \sin(x-y) + \sin(y-z) + \sin(z-x)$.
6. Trovare gli eventuali punti di massimo e minimo in $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y) := \exp(3x^2 + xy + 2y^2)$.
7. Determinare gli intervalli di convergenza puntuale e totale della serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} e^{kx^2-4k}$.
8. Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, cosa significa che f è differenziabile nel punto $x \in \mathbb{R}^n$?

Seconda parte

1. Siano R, r numeri reali positivi con $r < R$, e sia S il solido toroidale (o "ciambella") data dall'insieme dei punti dello spazio che distano meno di r dalla circonferenza di centro l'origine e raggio R che giace sul piano xy (vedi figura). Dare una descrizione analitica di S e calcolarne il volume.



2. Determinare i punti critici della funzione $f(x,y) := 4y^2 - 4x^2y^2 - y^4$ e dire se si tratta di massimi, minimi o punti di sella.
3. a) Dato I intervallo aperto di $\mathbb{R}$ e date $v_i : I \to \mathbb{R}^n$ funzioni di classe C^1 per $i = 1, \dots, n$, indichiamo con $M : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ la funzione a valori matrici $M := (v_1, \dots, v_n)$. Dimostrare che
$$D(\det M) = \det(Dv_1, v_2, \dots, v_n) + \det(v_1, Dv_2, \dots, v_n) + \dots + \det(v_1, v_2, \dots, Dv_n) \ .$$
b) Sia $y : I \to \mathbb{R}^n$ della forma $y = (y_1, \dots, y_n)$ con y_i soluzioni dell'equazione lineare omogenea a coefficienti non costanti
$$D^n y + a_{n-1} D^{n-1} y + \dots + a_1 Dy + a_0 y = 0 \ .$$

Dimostrare che il determinante Wronskiano $w := \det(y, Dy, \ldots, D^{n-1}y)$ risolve l'equazione differenziale

$$Dw + a_{n-1}w = 0 \ .$$

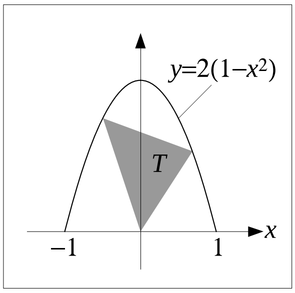
Scritto del V appello, 10 settembre 2004

Prima parte

1. Dire a quali delle seguenti equazioni differenziali si applica il teorema di esistenza globale, cosicché le soluzioni sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$:
$$\text{a) } \dot{y} = \frac{e^x}{1+y^2} \ , \qquad \text{b) } \dot{y} = \log(1 + x^2 + y^2) \ , \qquad \text{c) } \dot{y} = \sin(x + y) \ .$$
2. Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con un punto di sella e nessun'altro punto critico.
3. Calcolare il gradiente della funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := |x|$.
4. Calcolare la misura dell'insieme C dei punti $x \in \mathbb{R}^4$ tali che $x_4 \geq 0$ e $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq e^{-x_4}$.
5. Sia D l'insieme dei punti (x, y) tali che $|x + y| \leq 2$ e $|x - y| \leq 1$. Scrivere l'integrale
$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy$$
nelle variabili $u = \dfrac{x+y}{2}$ e $v = \dfrac{x-y}{2}$.
6. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) := x^2 + y^4 + a \cos x$ è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$?
7. Determinare il limite puntuale della successione di funzioni $f_n(x) := \arctan(x^n)$ su $[0, +\infty)$. Dire per quali $a \geq 0$ la convergenza è uniforme su $[a, +\infty]$.
8. Disegnare sommariamente il grafico della funzione $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Seconda parte

1. Sia C_1 il cilindro a sezione circolare dato dai punti (x, y, z) tali che $y^2 + z^2 \leq 1$, e sia C_2 il cilindro a sezione quadrata dato dai punti (x, y, z) tali che $|x + y| \leq 1$ e $|x - y| \leq 1$. Sia D l'intersezione di C_1 e C_2, e per ogni $z \in \mathbb{R}$ indichiamo con D_z la sezione di D ad altezza z, e più precisamente l'insieme dei punti (x, y) tali che $(x, y, z) \in D$.
a) Disegnare C_1 e C_2.
b) Per ogni $z \in \mathbb{R}$, descrivere D_z in termini di disequazioni e disegnarlo.
c) Calcolare il volume di D.
2. Sia T il triangolo nel piano xy avente come vertici l'origine e due punti scelti arbitrariamente sul grafico della funzione $y = 2(1 - x^2)$ ristretta all'intervallo $-1 \leq x \leq 1$ (si veda la figura accanto).
a) Calcolare l'area di T in funzione delle ascisse dei due vertici diversi dall'origine.
b) Tra tutti i triangoli T ammissibili, determinare quello di area massima.



3. Determinare, al variare di a, b reali positivi, la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{y} + \frac{a}{x}\dot{y} - \frac{a}{x^2}y = x^b \quad \text{per } x > 0.$$
[*Un possibile modo di risolvere questa equazione consiste nel cercare soluzioni particolari dell'equazione omogenea della forma $y = x^\alpha$ ed applicare quindi il metodo della variazione delle costanti, o della riduzione dell'ordine.*]

Scritti per l'esame unificato, 12 gennaio ed 8 febbraio 2005

Prima parte

1. Dare un esempio di spazio metrico non completo X e di contrazione $f : X \to X$ senza alcun punto fisso.
2. Calcolare il volume dell'insieme V dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $|x|(1 + z^4) \leq 1$ e $|y| \leq 2z$.
3. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) := ax^2 + 2xy + (a - 4)y^2 - 4yz + az^2$ ammette un unico punto di minimo assoluto in $(0, 0, 0)$.
4. Determinare la soluzione generale dell'equazione $D^3y + D^2y + Dy + y = e^x$.
5. Calcolare il gradiente di $f(x) := \log(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2)$.
6. Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale $D^3y + 8y = e^{2x}$.
7. Dire su quali intervalli di $\mathbb{R}$ le funzioni $f_n(x) := \dfrac{1}{1 + (x - n)^2}$ convergono uniformemente.
8. Calcolare $\displaystyle\int_C z(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$ dove C è l'insieme dei punti tali che $z \geq 0$ e $x^2 + y^2 \leq e^{-z}$.

Seconda parte

1. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione data da $f(x) := x|x|$.
   a) Calcolare la derivata di f in ogni punto e dimostrare che f è di classe C^1;
   b) Calcolare il determinante Jacobiano di f (se serve, fare prima i casi $n = 2, 3$).
2. Calcolare $\displaystyle\int_E \cos(xy)\, dx\, dy$, dove $E := \big\{(x, y) : 0 < x < y < 3x,\ 1 < xy < 3\big\}$.
3. Data M matrice $n \times n$, poniamo $\phi(M) := \sup\big\{|Mv| : v \in \mathbb{R}^n,\ |v| \leq 1\big\}$. Sia quindi data un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Dimostrare che:
   a) ϕ è una norma sullo spazio delle matrici $n \times n$;
   b) f è una contrazione se $\sup \phi(Df) < 1$ (se serve, fare prima il caso $n = 1$);
   c) se f è una contrazione allora $\sup \phi(Df) < 1$ (se serve, fare prima il caso $n = 1$).

Integrazione, a.a. 2003/04 - Testi

PRIMO COMPITINO, 19 APRILE 2004

PRIMA PARTE

1. Si consideri la trasformazione $(y_1, y_2) = (x_1^3 - 3x_1x_2^2, 3x_1^2x_2 - x_2^3)$. Dire per quali punti (x_1, x_2) risulta localmente invertibile.
2. Calcolare e^{At} per $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Si consideri l'insieme C definito dall'equazione $(x^2 + y^2)^2 - 8(y^2 - x^2) = 0$. Dire in quali punti di C non si applica il teorema della funzione implicita. Dire in quali punti non si può esplicitare (localmente) la y in funzione di x.
4. Calcolare, per $a \in \mathbb{R}$, il polinomio caratteristico della matrice $A := \begin{pmatrix} a-3 & 4 \\ 4 & a+3 \end{pmatrix}$.

   Dire per quali valori di a la funzione e^{tA} è infinitesima per $t \to +\infty$.
5. Trovare il valore minimo della funzione $f(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + z^2$ con il vincolo $xy^2z = 1$.
6. Scrivere l'equazione differenziale del terzo ordine $x''' = t^2 \sin x + 2x\,x'$ come sistema di equazioni differenziale del primo ordine, e dire se si applicano le ipotesi del teorema di esistenza globale.
7. Dire per quali valori del parametro $a > 0$ la funzione $y = a/(1 - x)$ risulta essere una sottosoluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = y^2 + e^{-x}$ sulla semiretta $x < 1$.
8. Dire quali delle seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono chiusi e limitati:

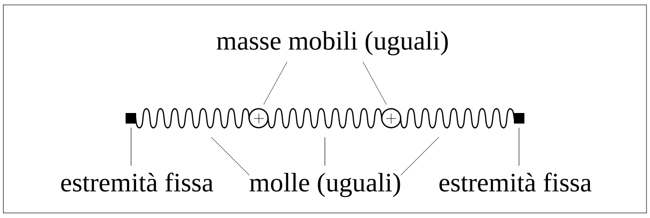
   a) $\{x^2 + (y-z)^2 + (y+z)^2 \le 1\}$, b) $\{(x^2+y^2)z < 1\}$, c) $\{(x^2+y^2)z = x^2+z^2 = 1\}$.

SECONDA PARTE

1. Si consideri il problema di Cauchy
$$\begin{cases} \dot{y} = x^2 + \log y \\ y(0) = 1 \end{cases} . \tag{1}$$
   a) Dimostrare che la soluzione massimale y è unica e crescente;
   b) dimostrare y è definita su tutto $\mathbb{R}$;
   c) dimostrare che y è convessa per $x > 0$;
   d) calcolare il limite di $y(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$;
   e) determinare la parte principale di $y(x)$ per x che tende a $+\infty$ e a $-\infty$.
2. Si consideri il sistema di k equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti
$$\dot{y} = Ay + b(x) , \tag{2}$$
   dove A è una matrice $k \times k$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ una funzione continua.
   a) Dimostrare che per $b \equiv 0$ ed A simmetrica, le soluzioni di (2) sono tutte infinitesime per $x \to +\infty$ se e solo se gli autovalori di A sono tutti negativi.
   b) Dimostrare che vale lo stesso quando b è una funzione infinitesima a $+\infty$.
   c) Che si può dire quando A non è una matrice simmetrica?
3. Sia A l'insieme dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ e $x + y = z^2$.

a) Provare a disegnare l'insieme A;
b) dimostrare che in A esistono i punti di massima e minima distanza dall'origine;
c) calcolare tali punti.

4. Si consideri il sistema composto da tre molle lineari uguali ancorate a due masse (puntiformi) vincolate a muoversi orizzontalmente come descritto in figura.



a) Scegliere opportunamente la variabili che descrivono il sistema, e scrivere le equazioni differenziali che ne determinano il comportamento.
b) Scriverne la soluzione generale.
c) Dare un senso matematico preciso a quest'affermazione: *le oscillazioni del sistema si possono scrivere come combinazioni di oscillazioni "in fase" (quelle per cui la distanza tra le masse rimane costante nel tempo) ed "in antifase" (il baricentro delle due masse rimane fisso nel tempo).*

Secondo compitino, 27 maggio 2004

Prima parte

1. Dire quali dei seguenti sistemi di equazioni differenziali (nella variabile indipendente t) sono lineari, specificando se omogenei oppure no, ed in caso calcolarne la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\text{a)}\ \begin{cases} \ddot{x} = (2+t)(x+y) + \dot{y} \\ \ddot{y} = y + \sin t(\dot{x}+1) \end{cases}, \quad \text{b)}\ \begin{cases} \ddot{x} = x\dot{y} + y\dot{x} \\ \dot{y} = y + e^t(x+\dot{x}) \end{cases}, \quad \text{c)}\ \begin{cases} x = ty + t^2 z \\ \dot{y} = x + 2ty + t^2\dot{z} \\ \ddot{z} = x + y + z - 3\dot{z} \end{cases}.$$

2. Scrivere e^{At} per $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -2x \\ x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

3. Calcolare il potenziale su $\mathbb{R}^3$ del campo di vettori $F(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 + y(2x+z) \\ x^2 + z(2y+x) \\ y^2 + x(2z+y) \end{pmatrix}$.

4. Sia C la curva data dall'intersezione dell'ellisse di equazione $9x^2+16y^2 = 25$ ed il semipiano $y \geq 0$. Trovare una parametrizzazione di C.

5. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la mappa $\phi : (0,1)^2 \to \mathbb{R}^3$ data da $\phi(t,u) := (t+u, at+u^2, t^2+u^2)$ è una parametrizzazione regolare?

6. Calcolare divergenza e rotore del campo di vettori $F(x,y,z) := (x+yz, y+xz, z+xy)$ e calcolarne il flusso uscente dal cubo $C = [0,1]^3$.

7. Sia L l'insieme delle soluzioni (x,y,z) del sistema $\begin{cases} x^2 + (y-z)^2 = 1\ , \\ y^2 + (z-x)^2 = 5\ . \end{cases}$

   Scrivere un vettore tangente (non nullo) ad L nel punto $(1,2,2)$.

8. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & \text{su } (0,+\infty)\times[-\pi,\pi], \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) & \text{per } t \in [0,+\infty), \\ u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) & \text{per } t \in [0,+\infty), \\ u(0,x) = \cos x & \text{per } x \in [-\pi,\pi], \\ u_t(0,x) = \sin x & \text{per } x \in [-\pi,\pi]. \end{cases}$

Seconda parte

1. Sia S la superficie data dall'intersezione dell'ellisse $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$ con il semispazio $z \geq 0$, orientata in modo tale che la normale ad S nel punto $(0,0,2)$ è $(0,0,1)$. Calcolare il flusso attraverso S del campo di vettori $F(x,y,z) := (x, y, (z-1)^2)$.

2. Sia F il campo vettoriale $F(x,y) = \Big(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{(x+1)(x+y^2)}{(x^2+y^2)(1+y^2)}\Big)$.

   a) Dire se F ammette potenziale sul semipiano aperto $A := \{y > 0\}$, ed in caso calcolarlo;

   b) calcolare $\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma$ quando γ è il cerchio di centro l'origine e raggio 1 percorso in senso antiorario.

3. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua e 2π-periodica, indichiamo con c_k i suoi coefficienti di Fourier complessi.

   a) Dimostrare che se $|c_k| = o(|k|^{-n})$ per $k \to \pm\infty$ per ogni n intero allora $f \in C^\infty$.

   b) Vale il viceversa dell'affermazione precedente?

4. Sia dato C insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera ∂C di classe C^1. Indichiamo con η la normale esterna a ∂C, e per ogni $d > 0$, indichiamo con C_d l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ tali che $\operatorname{dist}(x, C) \leq d$. Dimostrare che:
a) per ogni $x \notin C$ esiste $y \in \partial C$ tale che $|x - y| = \operatorname{dist}(x, C)$ e $x - y \perp \operatorname{Tan}(\partial C, y)$;
b) per ogni $d > 0$, $C_d = C \cup \big\{ y + s\, \eta(y) : \ y \in \partial C, \ s \in (0, d] \big\}$;
c) se $n = 2$ e ∂C è una curva regolare di classe C^2, allora esiste $d_0 > 0$ ed esiste P polinomio di secondo grado tale che $\operatorname{Area}(C_d) = P(d)$ per ogni $d \in [0, d_0]$.
d) Cosa si può dire sui coefficienti del polinomio P?

Scritto del I appello, 7 giugno 2004

Prima parte

1. Scrivere il sistema $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \dot{y}) \\ \ddot{y} = g(x, y, \dot{y}) \end{cases}$ come sistema di equazioni del primo ordine.
   Sotto quali ipotesi su f e g si ottiene un sistema lineare omogeneo?
2. Calcolare e^{At} per $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
3. Determinare il potenziale su $\mathbb{R}^2$ di $F(x, y) = \Big(\dfrac{2x}{1 + x^2 + y^2}, -\dfrac{2x^2 y}{(1 + x^2 + y^2)(1 + y^2)} \Big)$.
4. Calcolare il prodotto vettoriale $(1, -1, 2) \times (-3, 1, 4)$.
5. Scrivere (ma non risolvere!) il sistema dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti critici di della funzione $f(x) = a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2$ con il vincolo $x_1^4 + \cdots + x_n^4 = 1$.
6. Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ sono limitati, e quali sono chiusi:

   a) $\{x^4 + y^4 = 4,\ z \leq 0\}$, b) $\{x^2 + y^2 < 1,\ x + z = 1\}$, c) $\{x^4 + y^3 + z^2 \leq 2\}$.

7. Risolvere il problema ai dati iniziali $\begin{cases} u_t = u + u_{xx} & \text{su } (0, +\infty) \times [-\pi, \pi], \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) & \text{per } t \in [0, +\infty), \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi) & \text{per } t \in [0, +\infty), \\ u(0, x) = \cos x + 2\sin(2x) & \text{per } x \in [-\pi, \pi]. \end{cases}$
8. Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che sia localmente invertibile ma non invertibile.

Seconda parte

1. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia y_a la soluzione massimale del problema di Cauchy
   $$\begin{cases} \dot{y} = y^2 - x \\ y(0) = a \end{cases}$$
   e sia I_a l'intervallo di definizione di y_a. Dimostrare che:
   a) I_a è limitato inferiormente per ogni a;
   b) I_a è illimitato superiormente per ogni $a \leq 0$;
   c) esiste $a > 0$ tale che I_a è limitato superiormente.
2. Sia F il campo di vettori
   $$F(x, y) = \Big(\frac{y^2}{x^2 + y^4}, \frac{-2xy}{x^2 + y^4} \Big) .$$
   Calcolare $\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma$ nei seguenti casi:
   a) γ è la curva parametrizzata da $\gamma(t) = 2(\cos t, \sin t)$ con $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$;
   b) γ è il grafico di $y = x^2 - 1$, orientato in modo tale che la tangente in $(0, -1)$ sia $(1, 0)$.
3. Sia $\mathbb{R}^{n \times n}$ lo spazio delle matrici reali $n \times n$, ed indichiamo con I la matrice identità e con $O(n)$ il sottoinsieme delle matrici ortonormali.
   a) Dimostrare che in un intorno del punto I, $O(n)$ è un insieme regolare di dimensione $n(n-1)/2$ e determinarne lo spazio tangente in tale punto.
   b) Dimostrare $O(n)$ è un insieme regolare di dimensione $n(n-1)/2$.

4. a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Dimostrare che f è continua se e solo se il grafico di f è un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   b) Cosa succede se si omette l'ipotesi che f sia limitata?

   c) Sia $f : X \to Y$ con X e Y spazi metrici. Cercare le ipotesi più generali su X ed Y per cui vale la seguente implicazione: se f è continua allora il grafico di f è chiuso in $X \times Y$. Cercare quindi le ipotesi più generali per cui vale l'implicazione opposta.

Scritto del II appello, 5 luglio 2004

Prima parte

1. Risolvere il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$ con le condizioni iniziali $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$.

2. Dire per quali dei seguenti problemi ai dati iniziali la soluzione è unica:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{y} = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{y} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}, \quad \text{c) } \begin{cases} \ddot{y} = y + \dot{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}.$$

3. Calcolare divergenza e rotore del campo di vettori $F(x, y, z) := (x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2)$.

4. Determinare i punti di massimo e di minimo di $f(x, y, z) := 2x + y + z$ sull'insieme S dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2$.

5. Si consideri il campo di vettori $F(x, y, z) := (y+2z, x+e^y z, e^y +2x+5z^4)$. Dire se ammette potenziale su tutto $\mathbb{R}^3$ ed in caso calcolarlo.

6. Dire per quali $\alpha > 0$ risulta finita l'area della superficie Σ parametrizzata da

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = \rho^{-\alpha} \end{cases} \quad \text{con } 0 < \rho \leq 1 \text{ e } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

7. Dare un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 il cui luogo di zeri sia una curva (e non una superficie).

8. Determinare la serie di Fourier reale di $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) := e^x + e^{-x}$.

Seconda parte

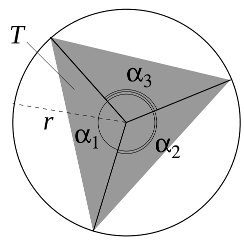
1. Sia y la soluzione (massimale) del problema di Cauchy $\begin{cases} \dot{y} = e^y - x^2 \\ y(0) = 10 \end{cases}$.

   a) Dimostrare che y è definita per ogni $x < 0$.

   b) Studiare il comportamento di y a $-\infty$.

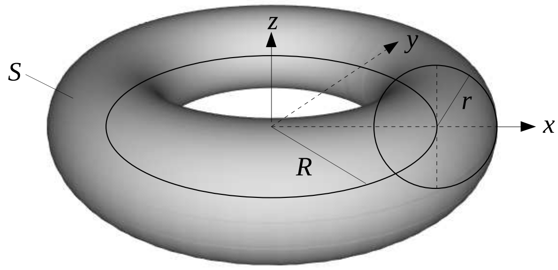
   c) Dimostrare che y non è definita per ogni $x > 0$. [*Suggerimento: cercare sottosoluzioni della forma $y = a/(b - x)$.*]

2. a) Dimostrare che tra tutti i triangoli inscritti in una data circonferenza, quelli di area massima sono tutti e soli quelli equilateri. [*Suggerimento: determinare l'area del triangolo T in funzione degli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ presi come in figura.*]



   b) Dimostrare che tra tutti i tetraedri inscritti in una data sfera, quelli di volume massimo sono tutti e soli quelli regolari (cioè con i lati di lunghezza uguale).

3. Siano R, r numeri reali positivi con $r < R$, e sia Σ la superficie toroidale (o "a ciambella") data dall'insieme dei punti dello spazio che distano r dalla circonferenza di centro l'origine e raggio R che giace sul piano xy (si veda la figura sottostante). Scrivere Σ come luogo di zeri di un'equazione regolare, trovarne una parametrizzazione e calcolarne l'area.



4. Data A matrice in $\mathbb{R}^{n\times n}$ con norma $\|A\| < 1$, poniamo

$$f(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} A^n}{n} \; .$$

Dimostrare i seguenti fatti:
a) la matrice $I - A$ è invertibile e $(I - A)^{-1} = \sum_0^\infty A^n$;
b) $f(A)$ è ben definita, continua in A, e commuta con A;
c) la funzione $g(t) := f(tA)$ è derivabile e $g'(t) = A(I + tA)^{-1}$;
d) $\exp(f(A)) = I + A$. [*Suggerimento: calcolare la derivata di* $h(t) := (I + tA)\exp(-f(tA))$.]

Scritto del III appello, 10 settembre 2004

Prima parte

1. Calcolare l'esponenziale della matrice nilpotente $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Scrivere il problema di Cauchy $\begin{cases} \ddot{y} = xe^y\dot{y} + y^2 \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1 \end{cases}$ come sistema di equazioni del primo ordine.

3. Calcolare il flusso del campo di vettori $F(x, y, z) := (x - y^2, y - z^2, z - x^2)$ uscente dalla sfera Σ di centro $(0, 0, 1)$ e raggio 1.

4. Trovare un vettore tangente alla curva di equazioni $\begin{cases} z(x^2 + y^2) = e^x \\ e^z + 1 = e + x + y \end{cases}$ nel punto $(0, 1, 1)$.

5. Dato $a \in \mathbb{R}$, si consideri il campo di vettori
$$F(x, y, z) := (2x + y + a^2z, x + (1 + a)y + az, x + y + a(a + 1)z) \ .$$
Dire per quali a il campo F ammette potenziale su tutto $\mathbb{R}^3$ ed in caso calcolarlo.

6. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $y := e^{ax}$ è una sottosoluzione dell'equazione differenziale $\dot{y} = 2y + x^2$ su tutto $\mathbb{R}$.

7. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si considerino i vettori $v := (a, 2, 1 - a)$ e $w := (a + 1, a + 1, -1)$. Calcolare il prodotto vettoriale di $v \times w$ e dire per quali valori di a i vettori v e w sono paralleli.

8. Calcolare la serie di Fourier reale e complessa della funzione $f(x) := \sin x \cos x$.

Seconda parte

1. Sia A l'insieme dei punti (x, y, z) tali che $x^2 + y^2 + z^4 < 1$ e Σ la sua frontiera. Indichiamo con A' e Σ' le intersezioni di A e Σ con il semispazio $\{z > 0\}$.
a) Dimostrare che Σ è una superficie regolare limitata e darne un disegno approssimativo.
b) Calcolare il baricentro di A e di A'.
c) Calcolare il flusso attraverso Σ e Σ' del campo di vettori $F := \big((xz+1)z^2, y^2+z, x-2yz\big)$.
[*Suggerimento: usare il teorema della divergenza.*]

2. Sia Σ la superficie di equazione $x^2 + y^2 = (1 + z^2)^2$.
a) Dimostrare che Σ è una superficie regolare.
b) Dimostrare che esiste un punto in Σ che minimizza la distanza da $(1, 0, 3)$.
c) Determinare tale punto.

3. Dato $n > 1$, sia V una funzione radiale su $\mathbb{R}^n$ esclusa l'origine, cioè una funzione della forma $V(x) := v(|x|)$ con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^2. Sia inoltre F un campo di vettori radiale su $\mathbb{R}^n$ esclusa l'origine, cioè un campo della forma
$$F(x) := f(|x|)\frac{x}{|x|}$$
con $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funzione di classe C^1.
a) Scrivere il gradiente di V in funzione di v;
b) scrivere la divergenza di F in funzione di f;
c) scrivere il laplaciano di V in funzione di v;
d) determinare le funzioni radiali V con laplaciano nullo.

Scritto del IV appello, 12 gennaio 2005

Prima parte

1. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma F\cdot\tau$ dove $F(x,y) := \Big(\dfrac{-y^2}{(1+x)^2}, \dfrac{2y}{1+x}\Big)$ e $\gamma(t) := (t^t - 1, t\log t)$ con $t \in [1,2]$.
2. Trovare gli errori nel seguente calcolo:
$$\exp\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & 0\\ 0 & -e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e & e\\ 0 & -e\end{pmatrix}.$$
3. Sia $F(x,y,z) := \big(xz + y + y^2z, 2xyz + yz + y^5, xy^2 + 2z^6\big)$. Calcolare il rotore di F.
4. Si consideri il problema $\begin{cases}\ddot x = y - x\\ \ddot y = -x\end{cases}$ con condizioni iniziali $\begin{cases}x(0) = y(0) = 0\\ \dot x(0) = -\dot y(0) = 1\end{cases}$.
Ridurlo ad un problema ai dati iniziali per un'equazione lineare del quarto ordine.
5. Sia C la curva definita dalle equazioni $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $x^3 + y^3 = 2$. Dire se le ipotesi del teorema della funzione implicita sono soddisfatte nel punto $(1,1,-1)$ ed in caso trovare un vettore tangente a C in tal punto.
6. Trovare il minimo valore della funzione $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + 2z^2$, con il vincolo $xyz^2 = 1$.
7. Calcolare la serie di Fourier reale della funzione $f(x) = \cos(x/2)$.
8. Scrivere la formula per l'area di una superficie nello spazio parametrizzata da una funzione $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, con D dominio regolare di $\mathbb{R}^2$.

Seconda parte

1. Dato $p > 0$, si considerino tutti i pentagoni P di perimetro p ottenuti mettendo un rettangolo accanto ad un triangolo isoscele in modo che la base del triangolo coincida con un lato del rettangolo. Determinare il massimo dell'area di P (in funzione di p).
2. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia y_α la soluzione (massimale) del problema di Cauchy
$$\begin{cases}\dot y = y^3 - x^3\\ y(0) = \alpha\end{cases},$$
e sia $I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)$ il suo intervallo di definizione. Dimostrare che:
a) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $a_\alpha = -\infty$, ovvero y_α è definita per ogni $x < 0$;
b) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, y_α è crescente su una semiretta illimitata a sinistra e tende a $-\infty$ a $-\infty$;
c) per ogni $\alpha < 0$, $b_\alpha < +\infty$ e y_α tende a $-\infty$ per $x \to b_\alpha$ (suggerimento: utilizzare il fatto che y_α è una sottosoluzione di $\dot y = y^3$ per $x \geq 0$);
d) per ogni $\alpha > 1$, $b_\alpha < +\infty$ e y_α tende a $+\infty$ per $x \to b_\alpha$ (suggerimento: mostrare che $y_\alpha \geq \alpha(x+1)$, e poi che y_α è una soprasoluzione di $\dot y = \beta y^3$ per $x \geq 0$ ed un qualche $\beta > 0$);
e) esiste al più un α tale che $b_\alpha = +\infty$.
3. In un contenitore pieno del liquido A viene disciolta una piccola quantità della sostanza B. La sostanza B reagisce chimicamente con la sostanza A trasformandosi in una terza sostanza C, e la velocità di reazione è proporzionale alla densità di B, ovvero la quantità (massa) di B tramutata in C per unità di volume ed unità di tempo è pari a $\sigma\rho$ dove ρ rappresenta la densità di B (massa per unità di volume) e σ è una costante fisica che dipende da A e B.
a) Scrivere l'equazione differenziale che determina ρ in funzione del tempo t.
b) Supponiamo ora che σ dipenda secondo una certa formula nota anche dalla temperatura T del liquido, e che la reazione che trasforma B in C liberi una quantità di calore proporzionale

alla massa di B che viene trasformata in C (e che lo scambio da calore tra il recipiente e l'esterno sia trascurabile). Scrivere l'equazione differenziale che determina ρ in funzione del tempo.

Scritto del quinto appello, 8 febbraio 2005

Prima parte

1. Dire per quali delle seguenti equazioni differenziali valgono le ipotesi del teorema di esistenza globale:
$$\text{a) } \dot{y} = e^x y - x^4 \ , \qquad \text{b) } \dot{y} = \frac{y^2}{1+x^2} \ , \qquad \text{c) } \ddot{y} = x^3 y \ .$$

2. Risolvere il sistema $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = x - 2y \end{cases}$ con la condizione iniziale $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

3. Calcolare l'integrale del campo di vettori $F(x,y) := \big(x/(1+y), 1\big)$, lungo l'arco γ della circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 che va dal punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ a $(1,0)$.

4. Calcolare la lunghezza della curva data in coordinate polari da $\rho = e^{-\theta}$ con $0 \le \theta \le +\infty$.

5. Dato il campo $F(x,y) := (3x + \sin(yz), y^2, y(x-2z))$, calcolarne la divergenza ed il flusso uscente dalla sfera S di centro $(0,1,-1)$ e raggio 1.

6. Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ la funzione $z = e^{ax}$ è sottosoluzione su tutto $\mathbb{R}$ dell'equazione $\dot{y} = y + x^2$.

7. Risolvere il seguente problema: $\begin{cases} u_t = u_{xx} - u - 5\cos(2x) & \text{su } [0,+\infty) \times [-\pi,\pi] \\ u(t,\pi) = u(t,-\pi) & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ u_x(t,\pi) = u_x(t,-\pi) & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ u(0,x) = \sin x & \text{per } x \in [-\pi,\pi] \end{cases}$.

8. Dato D aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, scrivere la formula per l'area del grafico di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$, specificando le ipotesi necessarie su f affinché tale formula sia valida.

Seconda parte

1. Sia C l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^4$ che soddisfano i vincoli $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1$ e $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2$.
   a) Dimostrare che l'insieme C non è vuoto ed è limitato.
   b) C è un insieme regolare (localmente grafico)?
   c) Trovare il minimo R tale che C è contenuto nella palla chiusa di raggio R centrata nell'origine.

2. Calcolare l'integrale lungo il cammino $\gamma(t) := (t + \log t, t^3 + \sin(\pi t))$, con $t \in [1, +\infty)$, del campo di vettori
$$F(x,y) := \left(\frac{3x^2 y}{y^2 + x^6}, \frac{-x^3}{y^2 + x^6} \right) \ .$$

3. Siano M ed H matrici simmetriche $n \times n$, con H definita positiva. Dimostrare che il massimo della forma quadratica $f(x) := \langle Mx; x \rangle$ tra tutti gli $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano il vincolo $\langle Hx; x \rangle = 1$ esiste e coincide con il massimo autovalore della matrice $H^{-1}M$.
   Questa formula è ancora valida quando H è simmetrica ed invertibile ma non definita positiva?

Calcolo Differenziale, a.a. 2003/04 - Soluzioni

PRIMO COMPITINO, 12 NOVEMBRE 2003

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. $\nabla f(x,y) := \big(y(2x+y-1), x(2y+x-1)\big)$ si annulla nei punti $P_1 := (0,0)$, $P_2 := (1,0)$, $P_3 := (0,1)$, $P_4 := (1/3, 1/3)$, dove le matrici Hessiane sono, rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

   Quindi P_1, P_2, P_3 sono di punti di sella, mentre P_4 è un minimo relativo.

2. Basta prendere $g(x,y) := x$.
3. $\nabla f(\pi, 0) = (0,0)$, per cui le derivate direzionali sono tutte nulle.
4. $\nabla f(x) = |x|e_1 + \frac{x_1}{|x|}x + \frac{1}{|x|^2}x = \Big(|x|e_1 + \frac{x_1^2}{|x|} + \frac{x_1}{|x|^2}, \frac{x_1 x_2}{|x|} + \frac{x_2}{|x|^2}, \dots, \frac{x_1 x_n}{|x|} + \frac{x_n}{|x|^2}, \Big)$.
5. 1 e 0, rispettivamente.
6. Il polinomio caratteristico $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda - 2)$ ha due radici positive ed una negativa. La matrice non è definita positiva, né negativa.
7. $\displaystyle\int_T yx \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 \Big(\int_0^{2x} y\,dy\Big) x \sin(x^2)\,dx = \int_0^1 x^2 \sin(x^2)\, 2x\,dx = \int_0^1 t \sin t\,dt = \Big| -t\cos t \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos t = \sin 1 - \cos 1$.
8. Usando le coordinate polari centrate nel punto $(3,0)$ l'integrale diventa

$$\int_C \dots = 2\pi \int_0^2 \rho^{1-4\beta}\,d\rho = \begin{cases} \dfrac{\pi 2^{2-4\beta}}{1-2\beta} & \text{per } b < 1/2, \\ +\infty & \text{per } \beta \geq 1/2. \end{cases}$$

PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Il gradiente di f si annulla nei punti $P_1 := (0,0)$, $P_2 := (1,0)$, $P_3 := (0,1/2)$, $P_4 := (1/3, 1/6)$. P_1, P_2, P_3 sono di punti di sella, mentre P_4 è un minimo relativo.
2. Basta prendere $g(x,y) := x$.
3. $\nabla f(0,\pi) = (0,0)$, per cui le derivate direzionali sono tutte nulle.
4. $\nabla f(x) = |x|^2 e_1 + 2x - 1x + \frac{1}{|x|^2}x$.
5. Il primo limite è 1, il secondo non esiste.
6. Il polinomio caratteristico $(\lambda - 2)(\lambda^2 - 6\lambda - 2)$ ha due radici positive ed una negativa. La matrice non è definita positiva, né negativa.
7. $\cos 1 - \sin 1$.
8. L'integrale è $\dfrac{\pi 2^{2-4\beta}}{1-2\beta}$ per $b < 1/2$, e $+\infty$ per $\beta \geq 1/2$.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. a) La funzione f è chiaramente di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$. Facendo i conti si vede che, posto per semplicità di notazione $z := 2xy$,

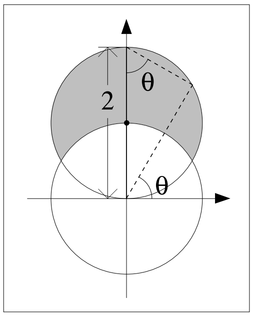
$$Df(x,y) = e^z(1+z)\,(y,x) \quad \text{e} \quad D^2 f(x,y) = e^z \begin{pmatrix} -y^2(2+z) & 1+3z+z^2 \\ 1+3z+z^2 & -x^2(2+z) \end{pmatrix} .$$

Ne consegue che il gradiente si annulla per $x = y = 0$, oppure per $z = -1$; in altre parole, nel punto $(0,0)$ e su tutta l'iperbole di equazione $y = -1/(2x)$.

b) Nel punto (0.0) il determinante della matrice Hessiana è uguale a -1, per cui i due autovalori sono discordi, ed abbiamo un punto di sella. Nei punti dell'iperbole $y = -1/(2x)$ (ovvero $z = -1$) il determinante della matrice Hessiana è uguale a 0. Quindi uno dei due autovalori è nullo, e dunque non è possibile dedurre dalla matrice Hessiana se si tratti di punti di massimo relativo, minimo relativo o altro.
Per studiare la natura dei punti sull'iperbole $y = -1/(2x)$, studiamo la funzione f su tutte le rette verticali (ponendo cioè x costante): si vede facilmente che il punto $y = -1/(2x)$ è di minimo assoluto – posto infatti $f^x(y) := f(x,y) = xye^{2xy}$ si ha che $(f^x)'(y) = D_y f(x,y) = x(1+2xy)e^{2xy}$ che risulta positiva per $y > -1/(2x)$ e negativa altrimenti, ragion per cui $y = -1/(2x)$ è il punto di minimo assoluto di f^x. Siccome poi f è costante sulla curva $y = 1/x$ (e non potrebbe essere altrimenti, visto che il gradiente è nullo su tutta la curva), tutti questi punti risultano essere di minimo assoluto per la funzione f su tutto il piano.

c) Abbiamo già visto al punto precedente che i punti sull'iperbole $y = -1/(2x)$ sono tutti e soli i punti di minimo assoluto di f. Siccome $f(x,x) = x^2 e^{2x^2}$ tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$, l'estremo superiore dei valori assunti da f è $+\infty$ (che ovviamente non viene mai raggiunto).

2. a) Come si vede dal disegno accanto, il cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 coincide con l'insieme dei punti le cui coordinate polari soddisfano $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \rho \le 2\sin\theta$.



b) L'intersezione dei due cerchi consiste dei punti tali che $0 \le \theta \le \pi$ e $1 \le \rho \le 2\sin\theta$. Poiché $2\sin\theta \ge 1$ se e solo se $\pi/6 \le \theta \le 5\pi/6$, quest'ultima condizione rimpiazza la $0 \le \theta \le \pi$.

c) Per calcolare l'integrale passiamo prima in coordinate polari, integriamo rispetto a ρ, e quindi integriamo rispetto a θ utilizzando il cambio di variabile $t = -\cos\theta$:

$$\begin{aligned}
\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(\int_1^{2\sin\theta} \rho^2\,d\rho \right) d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\sin\theta)^3 d\theta - \frac{2\pi}{9} \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} 1 - t^2\,dt - \frac{2\pi}{9} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{9} .
\end{aligned}$$

3. a) Facendo qualche conto si dimostra che il gradiente della funzione $|x|$ è

$$\nabla|x| = \frac{x}{|x|} . \tag{1}$$

Usando la formula per la derivata della funzione composta si vede allora che

$$\nabla V = \nabla(v(|x|)) = \dot v(|x|)\,\frac{x}{|x|}\ . \tag{2}$$

b) Sia v una primitiva di f. Allora, per la formula (2), il gradiente della funzione radiale $V(x) := v(|x|)$ è proprio $F(x)$.
c) Si parte dal fatto che $D_i|x| = x_i|x|^{-1}$ per ogni i (cfr. (1)) e si fanno i conti:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}F = \sum_i D_iF_i &= \sum_i D_i\big(f(|x|)\,x_i\,|x|^{-1}\big)\\
&= \sum_i D_i\big(f(|x|)\big)\,x_i\,|x|^{-1} + f(|x|)\,D_i(x_i)\,|x|^{-1} + f(|x|)\,x_i\,D_i(|x|^{-1})\\
&= \sum_i f'(|x|)\,(x_i\,|x|^{-1})^2 + f(|x|)\,|x|^{-1} + f(|x|)\,x_i(-x_i|x|^{-3})\\
&= \sum_i f'(|x|)\,x_i^2\,|x|^{-2} + f(|x|)\,|x|^{-1}\big(1 - x_i^2\,|x|^{-2}\big)\\
&= f'(|x|) + f(|x|)\frac{n-1}{|x|}\ .
\end{aligned}$$

d) Per quanto visto al punto precedente, un campo radiale F ha divergenza nulla se e solo se f soddisfa l'equazione differenziale a variabili separabili

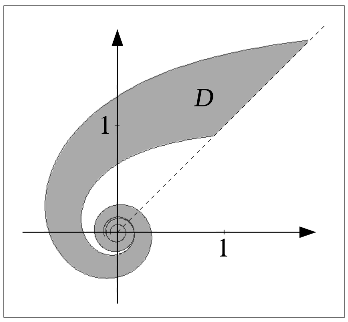
$$\dot f(t) + f(t)\frac{n-1}{t} = 0 \quad \text{per } t \in (0, +\infty).$$

Le soluzioni di questa equazione sono tutte e sole le funzioni f della forma $f(t) = at^{1-n}$ con $a \in \mathbb{R}$, e pertanto i campi radiali con divergenza nulla sono tutti e soli quelli della forma

$$F(x) := a\frac{x}{|x|^n} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

4. Se l'applicazione Φ fosse iniettiva su C, allora la formula di cambio di variabile per gli integrali multipli e l'identità $\det(D\Phi(\rho,\theta)) = \rho$ darebbero

$$\mathrm{Area}(D) = \int_{\Phi(C)} 1\,dx\,dy = \int_C \rho\,d\rho\,d\theta = \int_{\pi/4}^{+\infty}\bigg(\int_{1/\theta}^{2/\theta}\rho\,d\rho\bigg)d\theta = \frac{3}{2}\int_{\pi/4}^{+\infty}\frac{d\theta}{\theta^2} = \frac{6}{\pi}\ .$$



Sfortunatamente, la mappa Φ non è iniettiva su C. In effetti, D è la zona di piano compresa tra due curve (parametrizzate da $\rho = 2/\theta$ e $\rho = 1/\theta$) che spiraleggiano verso l'origine. Tuttavia, facendone un disegno accurato si vede che i bordi di questa spirale si sovrappongono uno all'altro (figura accanto).
Per capire meglio cosa succede, osserviamo che D può anche essere ottenuto come l'immagine (iniettiva!) secondo Φ dell'insieme C' dei (ρ,θ) tali che $0 \le \theta < 2\pi$ e ρ appartiene all'insieme

$$C'_\theta := \begin{cases} I_\theta^1 \cup I_\theta^2 \cup I_\theta^3 \cdots & \text{per } 0 \le \theta < \pi/4,\\[2mm] I_\theta^0 \cup I_\theta^1 \cup I_\theta^2 \cdots & \text{per } \pi/4 \le \theta < 2\pi,\end{cases} \qquad \text{con} \quad I_\theta^k := \Big[\frac{1}{\theta + 2k\pi}, \frac{2}{\theta+2k\pi}\Big]$$

Ora, non è difficile convincersi del fatto che per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$ gli intervalli I^k_θ si sovrappongono uno all'altro per $k \geq 1$ (l'estremo superiore di I^{k+1}_θ è sempre maggiore o uguale all'estremo inferiore di I^k_θ per $\theta \geq 0$ e $k \geq 1$), e quindi

$$I^1_\theta \cup I^2_\theta \cup I^3_\theta \cdots = \Big(0, \frac{2}{\theta + 2\pi}\Big] .$$

Possiamo quindi decomporre C' come unione disgiunta di due insiemi facili da descrivere, vale a dire

$$C'' := \Big\{ \frac{\pi}{4} \leq \theta < 2\pi,\ \frac{1}{\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\theta} \Big\} \quad \text{e} \quad C''' := \Big\{ 0 \leq \theta < 2\pi,\ \frac{1}{\theta + 2\pi} \leq \rho \leq \frac{2}{\theta + 2\pi} \Big\} .$$

Ricordando che Φ è iniettiva su C' otteniamo finalmente che

$$\begin{aligned} \text{Area}(D) = \int_{\Phi(C')} 1\, dx\, dy &= \int_{C'} \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_{C''} \rho\, d\rho\, d\theta\ + \int_{C'''} \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{2\pi} \Big(\int_{1/\theta}^{2/\theta} \rho\, d\rho \Big) d\theta\ + \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{2/\theta} \rho\, d\rho \Big) d\theta \\ &= \frac{3}{2} \int_{\pi/4}^{2\pi} \frac{d\theta}{\theta^2}\ + 2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\theta + 2\pi)^2} = \frac{23}{4\pi} . \end{aligned}$$

SECONDA PARTE, GRUPPO B

1. a) Procediamo come per il gruppo B: posto per semplicità di notazione $z := xy$ si ha

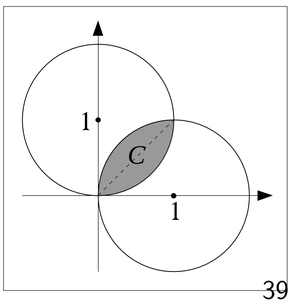
$$Df(x, y) = e^{-z}(1 - z)\,(y, x) \quad \text{e} \quad D^2 f(x, y) = e^{-z} \begin{pmatrix} -y^2(2 - z) & 1 - 3z + z^2 \\ 1 - 3z + z^2 & -x^2(2 - z) \end{pmatrix} .$$

Dunque il gradiente di f si annulla nel punto $(0, 0)$ e sull'iperbole di equazione $y = 1/x$.

b) Nel punto (0.0) il determinante della matrice Hessiana è uguale a -1, per cui si tratta di un punto di sella. Nei punti dell'iperbole $y = 1/x$ (ovvero $z = 1$) il determinante della matrice Hessiana è uguale a 0. Per studiare la natura dei punti sull'iperbole $y = 1/x$, studiamo la funzione f su tutte le rette verticali: si vede facilmente che il punto $y = 1/x$ è di massimo assoluto su ciascuna retta, e siccome f è costante sulla curva $y = 1/x$, questi punti risultano essere di massimo assoluto per la funzione f su tutto il piano.

c) Abbiamo già visto al punto precedente che i punti sull'iperbole $y = 1/x$ sono tutti e soli i punti di massimo assoluto di f. Siccome $f(x, -x) = -x^2 e^{x^2}$ tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$, l'estremo inferiore dei valori assunti da f è $-\infty$.

2. a) Il cerchio di centro $(0, 1)$ e raggio 1 è l'insieme dei punti tali che, in coordinate polari, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \rho \leq 2 \sin\theta$, mentre l'altro cerchio è dato da $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \rho \leq 2\cos\theta$.



b) L'intersezione dei due cerchi consiste dei punti tali che $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \rho \leq 2 \min\{\sin\theta, \cos\theta\}$.

c) Siccome la funzione integranda è simmetrica rispetto alla bisettrice $y = x$, il suo integrale su C coincide con il doppio dell'integrale sulla metà di C che giace al di sotto di detta bisettrice, ed utilizzando il cambio di variabile $\cos\theta = t$,

$$\begin{aligned}\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy &= 2\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\,d\rho\right)d\theta \\ &= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/4}(\sin\theta)^3 d\theta = \frac{16}{3}\int_{\sqrt{2}/2}^1 1-t^2\,dt = \frac{9}{4}(8-5\sqrt{2})\ .\end{aligned}$$

3. Uguale al gruppo A.
4. Uguale al gruppo A, eccetto per il limite inferiore imposto su θ, e cioè $\pi/2$ invece di $\pi/4$. Si vede quindi che D è l'immagine secondo Φ dell'unione disgiunta di

$$C'' := \left\{\ \frac{\pi}{2}\le\theta<2\pi,\ \frac{1}{\theta}\le\rho\le\frac{2}{\theta}\right\} \quad \text{e} \quad C''' := \left\{\ 0\le\theta<2\pi,\ \frac{1}{\theta+2\pi}\le\rho\le\frac{2}{\theta+2\pi}\right\}\ .$$

Siccome Φ è iniettiva su $C''\cup C'''$ otteniamo che

$$\begin{aligned}\text{Area}(D) &= \int_{\pi/2}^{2\pi}\left(\int_{1/\theta}^{2/\theta}\rho\,d\rho\right)d\theta\ +\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2/\theta}\rho\,d\rho\right)d\theta \\ &= \frac{3}{2}\int_{\pi/2}^{2\pi}\frac{d\theta}{\theta^2}\ +2\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(\theta+2\pi)^2} = \frac{11}{4\pi}\ .\end{aligned}$$

COMMENTI

- Prima parte, esercizio 3. Molti hanno calcolato correttamente il gradiente di f nel punto assegnato, ma non sono poi riusciti a dire cosa questo implicasse a livello di derivate direzionali.
- Prima parte, esercizio 4. Molti hanno trovato difficile non tanto calcolare quanto scrivere il gradiente di f.
- Seconda parte, esercizio 1. La seguente osservazione avrebbe semplificato molto la dimostrazione nei punti b) e c): la funzione f si può scrivere come $f(x,y) = g(xy)$ con $g(t) := te^{2t}$ per il gruppo A (rispettivamente, $g(t) := te^{-t}$ per il gruppo B). Lo studio della funzione g mostra che $t = -1/2$ è un punto di minimo assoluto mentre l'estremo superiore dei valori è $+\infty$; ne consegue immediatamente che i punti dell'iperbole $y = -1/(2x)$ sono tutti e soli i punti di minimo assoluto di f, mentre l'estremo superiore dei valori è $+\infty$.
- Seconda parte, esercizio 1b). Molti hanno argomentato come segue (per il gruppo A): siccome l'estremo inferiore dei valori della funzione non è $-\infty$ (cosa che si può effettivamente dimostrare), allora il valore minimo viene assunto in almeno un punto che sarà necessariamente uno di quelli dove si annulla il gradiente, e siccome non può trattarsi del punto $(0,0)$, che sappiamo già essere di sella, allora deve necessariamente trattarsi dei punti dell'iperbole $y = -1/(2x)$. Il primo passaggio di questo ragionamento è errato anche per funzioni di una variabile: l'estremo inferiore dei valori della funzione $f(t) := e^{-t}$ su $\mathbb{R}$ è 0, e non $-\infty$, ma non ci sono punti di minimo. (Se si preferisce, $f(t) := e^{-t^3}$ è un'esempio di funzione con dei punti critici che non sono minimi.)
- Seconda parte, esercizio 1b). Per un errore di conto, alcuni hanno trovato che il determinante della matrice NON si annullava sui punti dell'iperbole dove si annullava il gradiente. Tuttavia questo non può mai succedere: data una funzione f di n-variabili il cui gradiente

Df si annulla sulla curva parametrizzata da $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ con $\dot\gamma \neq 0$, allora la matrice Hessiana $D^2 f$ ha determinante nullo su tutta la curva. Infatti derivando la funzione vettoriale $Df(\gamma(t))$, che è costantemente nulla, otteniamo

$$0 = \frac{d}{dt}(Df(\gamma(t)) = D^2 f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)$$

per cui la matrice $D^2 f(\gamma(t))$ non può essere iniettiva.

- Seconda parte, esercizio 2a). Il modo più "pulito" per derivare la descrizione del cerchio di centro $(0,1)$ e raggio 1 in coordinate polari consiste nel prendere la disequazione che definisce il cerchio, ovvero $x^2_(y-1)^2 \leq 1$ ed applicare la sostituzione $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, ottenendo così con pochi passaggi $\rho \leq 2\sin\theta$ (siccome ρ è sempre positivo, questa condizione è verificata per qualche ρ solo se per gli angoli θ che soddisfano $0 \leq \theta \leq \pi$).
- Seconda parte, esercizio 2b). Alcuni hanno sostituito senza accorgersene il dominio di integrazione C con un insieme più grande (nel gruppo B, ad esempio, è vero che per i punti di C vale $\rho \leq \sqrt{2}$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$, ma queste due condizioni individuano un quarto di cerchio che contiene C ma anche molto altro).
- Seconda parte, esercizio 2c). Molti errori nel calcolo degli integrali!
- Seconda parte, esercizio 3. Pochi hanno provato a farlo, pur trattandosi di un esercizio molto facile.
- Seconda parte, esercizio 4. Quasi tutti non si sono accorti del fatto che la funzione Φ non è iniettiva su C, ed hanno disegnato D come una spirale che si avvolge infinite volte attorno all'origine (il che dimostra che farsi ingannare dai disegni e' molto facile).

SECONDO COMPITINO, 9 GENNAIO 2003

PRIMA PARTE, GRUPPO A

1. Il limite vale β per $x \neq 0$ e $+\infty$, $-\infty$, o 0 per $x = 0$, a seconda che α sia positivo, negativo o nullo. La convergenza è uniforme solo per $\alpha = \beta = 0$.

2. Il massimo di $x^2 e^{-nx}$ viene raggiunto per $x = 2/n$ e vale $4e^{-2}n^{-2}$, che è una successione sommabile. Quindi la serie converge totalmente.

3. $\displaystyle\int_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z \cdot \pi(1-z)^2\,dz = \pi \left| \frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{12}.$

4. a) no; b) si; c) si.

5. Siccome $\dot{y} = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{e^y} = e^{-y}$, un'equazione ammissibile è proprio $\dot{y} = e^{-y}$.

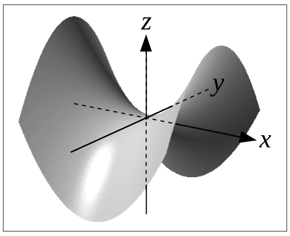
6. $P(\lambda) = \lambda^4 + 4 = 0$ che ha zeri $\lambda = \pm 1 \pm i$. La soluzione generale dell'equazione è

$$y = e^x(a_1 \sin x + a_2 \cos x) + e^{-x}(a_3 \sin x + a_4 \cos x) \quad \text{con } a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{R}.$$

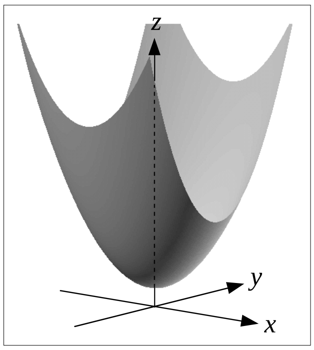
7. Si tratta di un'equazione di Bernoulli, e la sostituzione $z = y^2$ la riduce all'equazione lineare del prim'ordine $\dot{z} - 2x^{-2}z = -2x$. Infine

$$y = e^{-1/x} \left[e^2 - \int_2^x 2t\, e^{2/t}\,dt \right]^{1/2}.$$

8. Gruppo A:



Gruppo B:



PRIMA PARTE, GRUPPO B

1. Il limite vale β per $x \neq 0$ e 0 per $x = 0$. La convergenza è uniforme solo per $\beta = 0$.

2. Il massimo di xe^{-nx} viene raggiunto per $x = 1/n$ e vale $e^{-1}n^{-1}$, che è una successione non sommabile. Quindi la serie non converge totalmente.

3. $\displaystyle\int_T z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 -z \cdot \pi(1-z)^2\,dz = -\pi \left| \frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right|_0^1 = -\frac{\pi}{12}.$

4. a) no; b) no; c) no.

5. Siccome $\dot{y} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$, un'equazione ammissibile è proprio $\dot{y} = 1 + y^2$.

6. Uguale al gruppo A.

7. Uguale al gruppo A.

SECONDA PARTE, GRUPPO A

1. Si vede subito che $f_n(x)$ tende a 0 per ogni $x > 0$. Per determinare la norma del sup della funzione positiva f_n, ne studiamo la monotonia, ed essendo $f_n'(x) := (\alpha - nx)x^{\alpha-1}e^{-nx}$ una funzione che cambia segno in $x = \alpha/n$, dobbiamo distinguere due casi:
(i) per $\alpha \leq 0$, f_n è decrescente e quindi per ogni $a > 0$ si ha

$$\sup_{x \geq a} f_n(x) = f_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \ \text{convergenza uniforme su } [a, +\infty),$$

mentre

$$\sup_{x>0} f_n(x) = f_n(0^-) = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha < 0 \\ 1 & \text{per } \alpha = 0 \end{cases} \ \Rightarrow \ \text{NO conv. uniforme su } (0, +\infty).$$

(ii) per $\alpha > 0$, f_n ha massimo in $x = \alpha/n$ e quindi

$$\sup_{x>0} f_n(x) = f_n(\alpha/n) = \Big(\frac{\alpha}{ne}\Big)^{\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \ \text{convergenza uniforme su } (0, +\infty).$$

2. *Prima soluzione*: data la forma dell'equazione omogenea, detta di Eulero, è noto che il cambio di variabile $x = e^t$ la riduce ad un equazione lineare a coefficienti costanti. Ponendo infatti $z(t) := y(e^t)$, si ottiene

$$\dot{z}(t) = \dot{y}(e^t)e^t \ , \quad \ddot{z}(t) = \ddot{y}(e^t)e^{2t} + \dot{y}(e^t)e^t \ ,$$

e scrivendo l'equazione (1) in termini di z invece che di y si ha

$$\ddot{z} - 2\alpha\dot{z} + \alpha^2 z = e^{2t} \ . \tag{3}$$

Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata alla (3) è $\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 = (\lambda - \alpha)^2$ e quindi le soluzioni sono generate da $e^{\alpha t}$ e $te^{\alpha t}$.
Per $\alpha \neq 2$, cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $z = ce^{2t}$ ed otteniamo $c = (2-\alpha)^{-2}$. La soluzione generale della (3) è dunque

$$z = z(t) = \frac{e^{2t}}{(2-\alpha)^2} + e^{\alpha t}(at + b) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R},$$

mentre quella della (1) è

$$y = y(x) = \frac{x^2}{(2-\alpha)^2} + x^{\alpha}(a \log x + b) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Resta il caso $\alpha = 2$. In questo caso e^{2t} e te^{2t} risolvono l'equazione omogenea, e quindi cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione non omogenea della forma $z = ct^2e^{2t}$, ottenendo $c = 1/2$. La soluzione generale della (3) è allora

$$y = y(x) = \frac{x^2 \log^2 x}{2} + x^2(a \log x + b) \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Seconda soluzione: cominciamo col cercare una soluzione particolare dell'equazione omogenea

$$x^2\ddot{y} + (1 - 2\alpha)x\dot{y} + \alpha^2 y = 0$$

della forma $y = x^\lambda$. Si vede allora che λ deve soddisfare

$$\lambda(\lambda-1) + (1-2\alpha)\lambda + \alpha^2 = 0$$

ovvero $\lambda = \alpha$. Avendo trovato una soluzione dell'equazione omogenea, applichiamo il metodo di riduzione dell'ordine: facendo la sostituzione $y = x^\alpha u$, la (1) diventa

$$x^{\alpha+2}\ddot{u} + x^{\alpha+1}\dot{u} = x^2$$

ovvero $(x\dot{u})' = x^{1-\alpha}$. Integrando due volte otteniamo infine la (4) (e la (5)).

3. Dimostriamo la (2) direttamente nel caso generale.
Prima soluzione: Ci limitiamo a calcolare l'integrale di $f(|x|)$ sulla semisfera S_R dei punti $x \in B_R$ tali che $x_n \geq 0$, e consideriamo quindi il cambio di variabile

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} = x_{n-1} \\ t = |x| \end{cases}$$

La derivata di (y,t) rispetto ad x è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \frac{x_1}{|x|} & \dots & \frac{x_{n-1}}{|x|} & \frac{x_n}{|x|} \end{pmatrix}$$

ed ha determinante

$$\frac{x_n}{|x|} = \frac{\sqrt{t^2-|y|^2}}{t} \ .$$

Non è difficile verificare che questo cambio di variabile trasforma S_R *bigettivamente* nell'insieme T_R dei punti (y,t) tali che $0 \leq t \leq R$ e $|y| \leq t$. Pertanto

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n &= 2\int_{S_R} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n \\ &= 2\int_{T_R} f(t)\, \frac{t}{\sqrt{t^2-|y|^2}}\, dy_1 \cdots dy_{n-1}\, dt \\ &= 2\int_0^R f(t) \left[\int_{\{|y|\leq t\}} \frac{t}{\sqrt{t^2-|y|^2}}\, dy_1 \cdots dy_{n-1} \right] dt \ . \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale tra parentesi quadre nell'ultima riga, facciamo l'ulteriore cambio di variabile $y = tz$, che ha come derivata t volte la matrice identità I (in dimensione $n-1$) e determinante uguale a t^{n-1}:

$$\int_{B_R} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n = \int_0^R f(t) t^{n-1} \underbrace{\left[\int_{\{|z|\leq 1\}} \frac{2}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz_1 \cdots dz_{n-1} \right]}_{C} dt \ . \tag{6}$$

Ora non ci resta che verificare che la costante C è proprio $n\omega_n$. Per fare questo, basta scrivere la (6) per $f \equiv 1$ ed $R = 1$:

$$\omega_n = \int_{B_1} 1\, dx_1 \cdots dx_n = \int_0^1 t^{n-1} a\, dt = \frac{C}{n} \ .$$

Seconda soluzione: Per ogni $r \geq 0$ poniamo

$$g(r) := \int_{B_r} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n \ .$$

Dimostriamo che

$$g'(r) = f(r)\, \frac{d}{dr}\big[\mathrm{vol}(B_r)\big] = f(r)\, n\omega_n r^{n-1} \ . \tag{7}$$

La seconda uguaglianza segue dal fatto che $\mathrm{vol}(B_r) = \omega_n r^n$. Per la prima osserviamo invece che per ogni $h > 0$ il rapporto incrementale di g in r è dato da

$$\frac{g(r+h) - g(r)}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{B_{r+h}\setminus B_r} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n \tag{8}$$

e quindi risulta compreso tra

$$\Big[\inf_{r\leq t\leq r+h} f(t)\Big] \frac{\mathrm{vol}(B_{r+h}) - \mathrm{vol}(B_r)}{h} \quad \text{e} \quad \Big[\sup_{r\leq t\leq r+h} f(t)\Big] \frac{\mathrm{vol}(B_{r+h}) - \mathrm{vol}(B_r)}{h} \ .$$

Siccome f è continua in r, questi inf e sup convergono a $f(r)$ quando $h \to 0$, e passando al limite nella (8) si ottiene infine la (7).

Per ottenere la (2) basta integrare la (7) tenendo conto del fatto che $g(0) = 0$.

4. a) Ogni K_n è compatto perché le funzioni continue mappano compatti in compatti. Inoltre K_n è l'insieme dei punti x della forma $x = f^{(n)}(y)$ con $y \in K$, dove $f^{(n)}$ indica la composizione di f con se stessa per n volte. In particolare $x = f^{(n-1)}(z)$ con $z := f(y)$ e quindi x appartiene anche a K_{n-1}.

   b) Siccome ogni intersezione di chiusi è chiusa, K_∞ è chiuso in K, e quindi compatto. Osserviamo ora che data una qualunque successione di punti $x_n \in K_n$, ogni suo punto di accumulazione x appartiene a K_∞ (dato m, la monotonia di K_n implica che x_n appartiene ad K_m per ogni $n \geq m$, e quindi $x \in K_m$ perché K_m è chiuso; poiché questo vale per ogni m, abbiamo $x \in K_\infty$). Da questa osservazione consegue che K_∞ non è vuoto. Siccome $K_\infty \subset K_n$ per ogni n, $f(K_\infty) \subset f(K_n) = K_{n+1}$ per ogni n e dunque $f(K_\infty) \subset K_\infty$. Dato $x \in K_\infty$, allora $x \in K_{n+1} = f(K_n)$ per ogni n, e dunque esiste $y_n \in K_n$ tale che $x = f(y_n)$. Preso ora un punto di accumulazione y della successione y_n, esso appartiene a K_∞ per l'osservazione precedente, e chiaramente $x = f(y)$ per la continuità di f.

   c) Il diametro di $f(C)$ è l'estremo superiore di $d(y_1, y_2)$ per $(y_1, y_2) \in f(C)\times f(C)$, e siccome $f(C)$ è compatto e la funzione distanza è continua, questo estremo superiore è un massimo, ovvero esistono $y_1, y_2 \in f(C)$ tali che $\mathrm{diam}(f(C)) = d(y_1, y_2)$. Chiaramente $y_1 \neq y_2$ a meno che C abbia diametro 0, ovvero consista di un punto solo. Presi allora $x_1, x_2 \in C$ tali che $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, abbiamo

$$\mathrm{diam}(f(C)) = d(y_1, y_2) = d(f(x_1), f(x_2)) < d(x_1, x_2) \leq \mathrm{diam}(C) \ .$$

   d) Per quanto visto al punto b), K_∞ è compatto e non vuoto. Inoltre coincide con $f(K_\infty)$, ed ha quindi lo stesso diametro. Per via del punto c) ne segue che K_∞ contiene un punto solo, che è quindi un punto fisso di f. Siccome poi f riduce le distanze, non può avere più di un punto fisso.

Seconda parte, gruppo B

1. Si vede subito che $f_n(x)$ tende a 0 per ogni $x > 0$. Inoltre
$$f_n'(x) := \frac{x^{\alpha-1}(\alpha n + (\alpha-2)x^2)}{(n+x^2)^2} \ .$$
(i) per $\alpha \geq 2$, f_n è crescente per ogni $n > 0$, e quindi abbiamo che per ogni $a > 0$
$$\sup_{x\leq a} f_n(x) = f_n(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \ \text{convergenza uniforme su } (0,a],$$
mentre
$$\sup_{x>0} f_n(x) = f_n(+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{per } \alpha > 2 \\ 1 & \text{per } \alpha = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \ \text{NO conv. uniforme su } (0,+\infty).$$
(ii) per $0 < \alpha < 2$, f_n ha massimo in $x = c\sqrt{n}$ con $c := \sqrt{\dfrac{\alpha}{2-\alpha}}$ e quindi
$$\sup_{x>0} f_n(x) = f_n(c\sqrt{n}) = c' n^{\alpha/2-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \Rightarrow \ \text{convergenza uniforme su } (0,+\infty),$$
dove si è posto $c' := \dfrac{\alpha^{\alpha/2}}{2(2-\alpha)^{\alpha/2-1}}$.

2. Si procede come per il gruppo A. Posto $z(t) := y(e^t)$, la (1) diventa $\ddot{z} - 2\alpha\dot{z} + \alpha^2 z = e^t$, che per $\alpha \neq 1$ ha soluzione generale
$$z = \frac{e^t}{(1-\alpha)^2} + e^{\alpha t}(at+b) \quad \text{con } a,b \in \mathbb{R},$$
e quindi
$$y = \frac{x}{(1-\alpha)^2} + x^\alpha(a\log x + b) \quad \text{con } a,b \in \mathbb{R}.$$
Mentre per $\alpha = 1$
$$y = \frac{x\log^2 x}{2} + x(a\log x + b) \quad \text{con } a,b \in \mathbb{R}.$$

3. Uguale al gruppo A.

4. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte: sorprendentemente sono stati fatti moltissimi errori negli esercizi 3 (calcolo dell'integrale) e 6 (calcolo delle radici quarte di -4).
- Seconda parte, esercizio 3: quasi tutti hanno svolto il punto a) senza problemi, utilizzando le coordinate polari per $n = 2$ e le coordinate sferiche per $n = 3$. Alcuni sono riusciti a dare una dimostrazione generale usando un'opportuna versione delle coordinate sferiche in dimensione arbitraria.
- Seconda parte, esercizio 3: per quanto riguarda l'equazione (7) si osservi che
$$\frac{d}{dr}\big[\mathrm{vol}(B_r)\big] = \text{area della frontiera di } B_r. \tag{9}$$

Non si tratta di una formula di validità generale: se sostituiamo a B_r gli ellissoidi pieni $E_r := \{x : \ q(x) \leq r^2\}$, dove $q(x)$ è una forma quadratica definita positiva, allora la (9) non vale.

- Seconda parte, esercizio 3: una dimostrazione ancora più diretta della formula (2) si ottiene rifacendosi direttamente alla definizione di integrale secondo Riemann-Peano-Jordan. La accenno brevemente: prese delle partizioni $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_{h-1} < r_h = R$ dell'intervallo $[0, R]$ con parametro di finezza σ. ed indicando con T_i i "gusci sferici" dei punti x tali che $r_{i-1} < |x| \leq r_i$, allora le somme finite

$$\sum_1^h f(r_i) \cdot \mathrm{vol}(T_i) \tag{10}$$

convergono all'integrale $\int_{B_R} f(|x|)\, dx_1 \cdots dx_n$ quando σ tende a 0. D'altra parte

$$\mathrm{vol}(T_i) = \omega_n(r_i^n - r_{i-1}^n) \sim n\omega_n r_i^{n-1}(r_i - r_{i-1})$$

e quindi le somme in (10) convergono anche all'integrale $\int_0^R n\omega_n f(t)\, t^{n-1} dt$.

- Seconda parte, esercizio 4: la funzione f non è necessariamente una contrazione con costante di Lipschitz $\lambda < 1$ (come invece alcuni hanno pensato): si prenda ad esempio $K = [0, 1]$ e $f(x) = \sin x$.

Scritto del I appello, 12 gennaio 2003

Prima parte, gruppo A

1. $Df(x,y) = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$, $\det(Df(x,y)) = e^{2x}$.
2. No: il limite lungo la retta $y = 0$ è 0, mentre lungo la retta $y = x$ è 1.
3. $P(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 4\lambda - 11$. Siccome $P(0) = -11 < 0$ e $P(+\infty) = +\infty$, ci deve essere almeno un autovalore (o zero) positivo. D'altra parte non possono essere tutti positivi, perché altrimenti il coefficiente di λ^2 dovrebbe essere negativo. (Alternativamente: $P'(\lambda) = 3\lambda^2 + 14\lambda + 4 > 0$ per$\lambda \geq 0$, quindi $P(\lambda)$ è crescente per $\lambda > 0$ e dunque ha un unico autovalore positivo). Quindi la matrice non è né definita positiva né definita negativa.
4. Ad esempio $f(x,y) = \arctan x$.
5. $\displaystyle\int_D x(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_1^2 \rho^4 \cos\theta\, d\rho\, d\theta = \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^4\, d\rho\right) = -\frac{62}{5}.$
6. $y = e^{-x^2}\left(a + \displaystyle\int 4xe^{x^2}\,dx\right) = ae^{-x^2} + 2$ con $a \in \mathbb{R}$.
7. a) $1 - x^2$ risolve l'equazione con polinomio caratteristico λ^3, ovvero $D^3 y = 0$.
   b) $e^{-x} + x\cos x$ risolve l'equazione con polinomio caratteristico $(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$.
   c) $\sin(x^3)$ non risolve alcuna equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.
   d) $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$ risolve l'equazione con polinomio caratteristico $\lambda^2 + 4$.

Prima parte, gruppo B

1. $Df(x,y) = e^y \begin{pmatrix} -\sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$, $\det(Df(x,y)) = -e^{2y}$.
2. Sì, ed è 0: infatti $x^2y^2 = o(\rho^4)$ mentre $x^2 + y^2 + xy \geq \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + xy = \dfrac{\rho^2}{2}$.
3. $P(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda - 1$. Siccome $P(0) = -1 < 0$ e $P(+\infty) = +\infty$. La matrice non è né definita positiva né definita negativa (vedi esercizio 3 del gruppo A).
4. Ad esempio $f(x,y) = x^2 + y^2$.
5. $\displaystyle\int_D x(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \rho^4 \cos\theta\, d\rho\, d\theta = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^4\, d\rho\right) = \frac{62}{5}.$
6. $y = e^{-x^2}\left(a - \displaystyle\int 2xe^{x^2}\,dx\right) = ae^{-x^2} - 1$ con $a \in \mathbb{R}$.
7. a) $1 + x^2$ risolve l'equazione con polinomio caratteristico λ^3, ovvero $D^3 y = 0$.
   b) $e^{-x} + x\sin x$ risolve l'equazione con polinomio caratteristico $(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2$.
   c) $\sin(x^2)$ non risolve alcuna equazione lineare omogenea a coefficienti costanti.
   d) $2\cos x \sin x = \sin(2x)$ risolve l'equazione con polinomio caratteristico $\lambda^2 + 4$.

Seconda parte, gruppo A

1. la palla B è compatta ed f è continua, e quindi f ammette massimo e minimo assoluti. Poiché f assume sia valori positivi che negativi, il massimo è positivo ed il minimo è negativo. In particolare, questo esclude che ci siano punti di massimo o minimo assoluti sulla frontiera di B dove f è nulla. Non resta che cercarli tra i punti (x,y,z) in cui si annulla il gradiente

di f, vale a dire

$$\begin{cases} yz(\rho^2 - 1 + 2x^2) = 0 \\ xz(\rho^2 - 1 + 2y^2) = 0 \\ xy(\rho^2 - 1 + 2z^2) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

dove si è posto per brevità $\rho^2 := x^2 + y^2 + z^2$. Siccome non ci interessano i punti in cui f si annulla, possiamo limitarci alle soluzioni con coordinate tutte diverse da 0, ed Il sistema (2) si riduce a

$$\begin{cases} 2x^2 = 1 - \rho^2 \\ 2y^2 = 1 - \rho^2 \\ 2z^2 = 1 - \rho^2 \end{cases} \tag{3}$$

Dunque $x^2 = y^2 = z^2 = 1/5$, ovvero i seguenti 8 punti:

$$P = \Big(\frac{\pm 1}{\sqrt{5}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}, \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}\Big) \ .$$

I valori di f in questi punti coincidono a meno di un segno, e quindi si tratta di punti di massimo se il segno di f è positivo (e.g., il numero delle coordinate negative è dispari) e di punti di minimo altrimenti (il numero delle coordinate negative è pari).

2. L'insieme A_r è un ellisse (piena) centrata nell'origine con semiassi di lunghezza

$$a_r = \pi r \quad \text{e} \quad b_r = \frac{\pi r}{\sqrt{1 - 1/r^2}} = \pi r + \frac{\pi}{2r} + o\Big(\frac{1}{r^2}\Big) \ . \tag{4}$$

Si tratta quindi di un ellisse che contiene il cerchio di $B_{\pi r}$ di centro l'origine e raggio πr ed in realtà molto "vicina" ad esso. L'idea è quindi di calcolare esplicitamente l'integrale su $B_{\pi r}$, cosa che si può facilmente fare passando alle coordinate polari, e poi stimare in qualche modo l'integrale sulla differenza $A_r \setminus B_{\pi r}$:

$$\begin{aligned} \int_{B_{\pi r}} \sin\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\, dx\, dy &= \int_0^{\pi r} \sin\rho \cdot 2\pi\rho \, d\rho \\ &= 2\pi \Big| \sin\rho - \rho\cos\rho \Big|_0^{\pi r} = 2\pi\sin(\pi r) - 2\pi^2 r\cos(\pi r) \ . \end{aligned} \tag{5}$$

L'insieme $A_r \setminus B_{\pi r}$ è contenuto nella corona circolare di raggi a_r e b_r. Quindi, dato (x, y) in questo insieme, il valore di $\sqrt{x^2+y^2}$ differisce da $a_r = \pi r$ per meno di $b_r - a_r$, e siccome $\sin t$ ha derivata di modulo inferiore a 1, il valore di $\sin\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ differisce da $\sin(\pi r)$ per meno di $b_r - a_r$, che tende a 0 per $r \to +\infty$ (cfr. (4)). Quindi

$$\begin{aligned} \int_{A_r \setminus B_{\pi r}} \sin\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)\, dx\, dy &= \text{area}(A_r \setminus B_{\pi r}) \cdot \big(\sin(\pi r) + o(1)\big) \\ &= \pi(a_r b_r - a_r^2) \cdot \big(\sin(\pi r) + o(1)\big) \\ &= \frac{\pi^3}{2}\sin(\pi r) + o(1) \ . \end{aligned} \tag{6}$$

Mettendo insieme (5) e (6) otteniamo infine

$$I_r = -2\pi^2 r\cos(\pi r) + \Big(2\pi + \frac{\pi^3}{2}\Big)\sin(\pi r) + o(1) \ . \tag{7}$$

In particolare

$$\lim_{n\to+\infty} I_{2n+\frac{1}{2}} = 2\pi + \frac{\pi^3}{2} \ .$$

3. a) Le soluzioni dell'equazione omogenea sono e^x ed e^{-x}. Applicando il metodo della variazione delle costanti otteniamo $y = e^x u_1 + e^{-x} u_2$ dove u_1 ed u_2 risolvono il sistema

$$\begin{cases} e^x \dot u_1 + e^{-x} \dot u_2 = 0 \\ e^x \dot u_1 - e^{-x} \dot u_2 = 2e^{-x^2} \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \dot u_1 = e^{-x^2-x} \\ \dot u_2 = -e^{-x^2+x} \end{cases} .$$

Essendo $\dot y = e^x u_1 - e^{-x} u_2$, le condizioni iniziali su y diventano

$$\begin{cases} u_1(0) + u_2(0) = y(0) = 0 \\ u_1(0) - u_2(0) = \dot y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_2(0) = 0 \end{cases} .$$

Pertanto

$$y = e^x \int_0^x e^{-t^2-t} dt - e^{-x} \int_0^x e^{-t^2+t} dt \ .$$

b) Poiché $\ddot y = y + e^{-x^2}$, y è strettamente convessa in tutti gli intervalli in cui $y \ge 0$. Non resta quindi che far vedere che $y \ge 0$ ovunque. A questo scopo, osserviamo che

$$\dot y = e^x \int_0^x e^{-t^2-t} dt + e^{-x} \int_0^x e^{-t^2+t} dt$$

e quindi $\dot y(x) > 0$ per $x > 0$, mentre $\dot y(x) < 0$ per $x < 0$. Dunque 0 è (l'unico) punto di minimo assoluto di y, e siccome $y(0) = 0$, ne consegue che $y(x) \ge 0$ ovunque.

4. a) Il massimo esiste perché $v \mapsto |Av|$ è una funzione continua e la sfera S dei vettori unitari è un insieme chiuso e limitato, e quindi compatto.

   b) L'unica proprietà non immediata è la disuguaglianza $\phi(A + B) \le \phi(A) + \phi(B)$, e per questa basta osservare che per ogni vettore unitario v si ha

$$|(A + B)v| = |Av + Bv| \le |Av| + |Bv| \le \phi(A) + \phi(B) \ .$$

   c) $M^t = (A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A = M$, e quindi M è simmetrica. Inoltre per ogni vettore v si ha

$$|Av|^2 = (Av) \cdot (Av) = (A^t Av) \cdot v = Mv \cdot v \ .$$

   d) Siccome M è simmetrica, la si può scrivere nella forma $M = R^t M' R$ dove R è una matrice ortonormale ed M' è una matrice diagonale i cui elementi sulla diagonale sono gli autovalori λ_i di M. Quindi, per ogni vettore v si ha

$$\begin{aligned} |Av|^2 &= Mv \cdot v = (R^t M' R v) \cdot v = (M' R v) \cdot (R v) \\ &= M' w \cdot w = \sum_i \lambda_i w_i^2 \le \lambda_{\max} \sum_i w_i^2 = \lambda_{\max} |w|^2 = \lambda_{\max} |v|^2 \end{aligned}$$

   (notare che $|w| = |v|$ perché R è ortonormale). Prendendo il massimo su tutti i vettori v unitari otteniamo allora $\big(\phi(A)\big)^2 \le \lambda_{\max}$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta basta prendere come v un'autovettore di M corrispondente all'autovalore $\lambda_{\max}$.

Seconda parte, gruppo B

1. Si procede come per il gruppo A: f assume valori diversi da zero nei punti di minimo e massimo, che pertanto sono interni alla palla B. In particolare si tratta di punti in cui si annulla il gradiente di f, vale a dire

$$\begin{cases} yz(4-\rho^2-2x^2)=0 \\ xz(4-\rho^2-2y^2)=0 \\ xy(4-\rho^2-2z^2)=0 \end{cases}$$

   e le soluzioni con tutte le coordinate non nulle corrispondono ai seguenti 8 punti:

$$P=\Big(\frac{\pm 2}{\sqrt{5}},\frac{\pm 2}{\sqrt{5}},\frac{\pm 2}{\sqrt{5}}\Big)\ .$$

   Quelli con un numero pari di coordinate negative sono punti di massimo, gli altri di minimo.

2. Il valore di I_r è quello calcolato nella formula (7) della soluzione per il gruppo A. Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} I_{2n-\frac{1}{2}} = -\Big(2\pi+\frac{\pi^3}{2}\Big)\ .$$

3. Procedendo come per il gruppo A si ottiene

$$y=-e^x\int_0^x e^{-t^2-t}dt+e^{-x}\int_0^x e^{-t^2+t}dt\ .$$

   La concavità si dimostra come per il gruppo A.

4. Uguale al gruppo A.

Commenti

- Prima parte, esercizio 7: in molti hanno sostenuto che $e^x+x\sin x$ e $e^{-x}+x\cos x$ non risolvono alcuna equazione differenziale.
- Gruppo A, seconda parte, esercizio 3b): la positività della y, che per via dell'equazione implica la stretta convessità, può essere dimostrata senza bisogno di ricorrere alla formula esplicita della soluzione. Siccome $y(0)=\dot{y}(0)=0$ e $\ddot{y}(0)=1$, y è sicuramente positiva in un intorno di 0 (escluso 0 stesso) e quindi se y non fosse strettamente positiva per $x>0$, dovrebbe esistere $\bar{x}>0$ tale che $y(\bar{x})=0$ e $y>0$ in $(0,\bar{x})$. Ma allora y sarebbe strettamente convessa in $[0,\bar{x}]$ con $y(0)=y(\bar{x})=0$, per cui $y<0$ in $(0,\bar{x})$. Assurdo. In modo analogo si dimostra che $y>0$ per $x<0$.
- Seconda parte: nessuno (!) ha risolto l'esercizio 2 o la parte b) dell'esercizio 3.

Scritto del II appello, 12 febbraio 2004

Prima parte

1. $Df(x,y) = \dfrac{(2x^2+y^2, xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ per $(x,y) \neq (0,0)$, e $Df(0,0) = (0,0)$.

2. Siccome $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$, il valore massimo è 1 e viene preso sul bordo del cerchio, il minimo è 0 e viene preso nel centro del cerchio $(1,1)$.

3. La serie converge puntualmente in $(-1,1)$. Non converge totalmente e neanche uniformemente perché questo implicherebbe la convergenza puntuale su tutto $[-1,1]$.

4. $\displaystyle\int_A \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2)^3} = \int\limits_{1\leq x^2+y^2\leq 4} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^3} = \int_1^2 \frac{2\pi\rho\,d\rho}{\rho^6} = \frac{15\pi}{32}.$

5. Si tratta di un'equazione di Bernoulli: la sostituzione $y = u^a$ dà $a\dot{u} = x^{-2}u^{a+1} + x^{-1}u$, che per $a := -1$ diventa l'equazione lineare $x\dot{u} + u = -x^{-1}$, ovvero $(xu)' = -x^{-1}$, ovvero $u = x^{-1}(c - \log x)$. Quindi
$$y = \frac{x}{c - \log x} \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

6. $\displaystyle\int_{A_\beta} y^\alpha\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} y^\alpha \left(\int_0^{y^{-\beta}} dx\right) dy = \int_1^{+\infty} y^{\alpha-\beta}\,dy$ che è finito per $\alpha < \beta - 1$.

7. Terz'ordine: $D^3 y = 0$. Secondo ordine: $D^2(y/x) = 0$, ovvero $x^2\ddot{y} - 2x\dot{y} + 2y = 0$.

Seconda parte

1. b) La soluzione generale dell'equazione omogenea è della forma $y = ae^x + be^{-x}$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora una soluzione particolare dell'equazione non omogenea tra i polinomi di grado $2n$, ovvero
$$\bar{y} = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k \quad \text{con } a_0,\ldots,a_{2n} \in \mathbb{R}.$$

   L'equazione diventa allora
$$a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \sum_{k=0}^{2n-2} (a_k - (k+2)(k+1)a_{k+2})x^k = x^{2n}$$

   e quindi i coefficienti a_k devono soddisfare il sistema
$$\begin{cases} a_{2n} = 1 \\ a_{2n-1} = 0 \\ a_{2n-2} - 2n(2n-1)\,a_{2n} = 0 \\ a_{2n-3} - (2n-1)(2n-2)\,a_{2n-1} = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_k - (k+2)(k+1)\,a_{k+2} = 0 \\ \qquad\vdots \\ a_0 + 2a_2 = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} a_{2n} = 1 \\ a_{2n-1} = 0 \\ a_{2n-2} = 2n(2n-1)a_{2n} = 2n(2n-1) \\ a_{2n-3} = (2n-1)(2n-2)a_{2n-1} = 0 \\ \quad\vdots \\ a_k = (k+2)(k+1)a_{k+2} = \begin{cases} (2n)!/k! & \text{per } k \text{ pari} \\ 0 & \text{per } k \text{ dispari} \end{cases} \\ \quad\vdots \\ a_0 = (2n)! \end{cases}$$

e quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y = ae^x + be^{-x} + (2n)! \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Imponendo i dati iniziali $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ otteniamo quindi

$$\begin{cases} a + b + (2n)! = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad a = b = \frac{(2n)!}{2} \ ,$$

e la soluzione del problema di Cauchy è

$$y = (2n)! \Big[-\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \Big]$$

2. L'idea è di risolvere l'equazione come se fosse un'equazione lineare in u ottenendo così una formula che dà u in funzione di g, e che se tutto va bene ci permette di ottenere g a partire da u.
   Usando il fattore integrante e^g, l'equazione diventa $e^g\dot{u} + \dot{g}e^g u = (e^g u)' = \dot{g}ge^g$, e quindi $e^g u = (g-1)e^g + a$ con $a \in \mathbb{R}$. Per $a = 0$ otteniamo $u = g - 1$, ovvero $g = u + 1$.
3. a) la verifica del fatto che $\|\cdot\|_1$ è una norma è standard, e la omettiamo.
   b) La disuguaglianza $\|f\|_1 \le (b-a)\|f\|_\infty$ implica che se $\|f_n\|_\infty \to 0$, allora anche $\|f_n\|_1 \to 0$. Il viceversa non è sempre vero: basta prendere la successione di funzioni

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - n(x-a) & \text{per } a \le x \le a + \frac{1}{n}, \\ \\ 0 & \text{per } a + \frac{1}{n} < x \le b. \end{cases}$$

   Si vede che in tal caso $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{2n} \to 0$ mentre $\|f_n\|_\infty = 1$.
4. a) $\det(D\Phi(x,y)) = \det \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^3 - 3y^2 \end{pmatrix} = 9\big((x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2\big) = 9(x^2+y^2).$
   b) Identificando ogni punto (x, y) del piano con il numero complesso $z = x + iy$, si vede subito che $\Phi(z) = z^3$, e quindi è chiaro che $\Phi(B)$ è B stesso: infatti, se $|z| \le 1$, allora $|z^3| = |z|^3 \le 1$, e quindi $\Phi(B) \subset B$, e viceversa dato un numero complesso w tale che $|w| \le 1$, ogni sua radice cubica z soddisfa $|z| = |w|^{1/3} \le 1$, e quindi $B \subset \Phi(B)$.
   c) L'area di $\phi(B) = B$ è π. D'altra parte, utilizzando la formula di cambio di variabile otterremmo

$$\Phi(B) = \int_B \big|\det(D\Phi(x,y))\big|\, dx\, dy = \int_0^1 9\rho^4\, 2\pi\rho\, d\rho = 3\pi \ .$$

   La discrepanza è dovuta ad un'errata applicazione della formula: la funzione Φ, infatti, non è iniettiva su B. Per la precisione, ogni punto in $\Phi(B)$ tranne l'origine corrisponde esattamente a tre punti distinti di B, e quindi l'integrale dello Jacobiano dà tre volte l'area di $\Phi(B)$.

Commenti

- Prima parte, esercizio 1: nella fretta quasi nessuno si è accorto che le derivate parziali nell'origine andavano calcolate a parte.
- Prima parte, esercizio 8: nonostante la libertà di scelta, quasi tutti hanno scritto enunciati incompleti, dimenticando molte ipotesi (se non addirittura tutte)!
- Seconda parte, esercizio 4: senza accorgersi che la funzione Φ corrisponde ad una ben nota funzione olomorfa, le parti a) e b) dell'esercizio sono molto difficili. Se però ci si accorge che $|\Phi(x,y)|^2 = (x^2+y^2)^3$, allora si può se non altro dedurre che $\Phi(B) \subset B$, e quindi che l'area di $\phi(B)$ deve essere non superiore a π, ed in particolare non può essere 3π.
- Seconda parte, esercizio 4a): usando il fatto che $\Phi(x,y)$ corrisponde alla funzione olomorfa $\Phi(z) = z^3$, si poteva usare la (nota?) formula $\det(D\Phi(x,y)) = |\Phi'(z)|^2$ per ottenere subito che $\det(D\Phi(x,y)) = |3z^2|^2 = 9|z|^4 = 9(x^2+y^2)^2$.

Prima parte

1. a) $\{0\}\times\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$; c) $\{0,1\}\times[0,+\infty)\cup[0,1]\times\{0\}$.
2. $-\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cos t,\sin t)\,\sin t+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\cos t,\sin t)\,\cos t.$
3. Il polinomio caratteristico della matrice M è $(\lambda-a)(\lambda-1)(\lambda-3)$, e quindi gli autovalori sono tutti strettamente positivi se e solo se $a>0$.
4. $\displaystyle\int_A |y|e^x dx\,dy=\int_0^\infty\left(2\int_0^{e^{-x}} y\,dy\right)e^x\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1$
5. Ad esempio $f_n(x):=x^n$. Infatti f_n converge puntualmente alla funzione f data da $f(x)=0$ per $x\in[0,1)$ e $f(1)=1$, e siccome f è discontinua, la convergenza non può essere uniforme.
6. $f(x,y,z)=e\,\exp\Big[y^2-\dfrac12(x+z)^2+\cdots\Big]=e\Big[1+y^2-\dfrac12(x+z)^2+\cdots\Big].$
7. Si tratta di un'equazione di Bernoulli; la soluzione è $y(x)=\dfrac{1}{2-x^2-e^{-x^2/2}}$.
8. Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è $(\lambda+1)(\lambda+2)$ mentre il termine noto risolve l'equazione lineare del secondo ordine con polinomio caratteristico $(\lambda+1)^2$. Per il teorema degli annichilatori, esiste una soluzione particolare tra le combinazioni lineari di xe^{-x} e x^2e^{-x}.

Seconda parte

1. a, c) La matrice Hessiana di f_a è
$$D^2f_a(x,y)=\begin{pmatrix}2a-\cos x\cos y & \sin x\sin y\\ \sin x\sin y & 2a-\cos x\cos y\end{pmatrix}.$$
Un semplice calcolo mostra che i suoi autovalori sono $2a-\cos(x+y)$ e $2a-\cos(x-y)$. Pertanto f_a è convessa se e solo se questi autovalori sono positivi o nulli per ogni x,y, ovvero se e solo se $a\geq 1/2$. Inoltre f_a è strettamente convessa per $a>1/2$; in particolare f_1è strettamente convessa.
b, d) Ciascuna f_a è continua e tende a $+\infty$ per $|(x,y)|\to+\infty$; quindi deve avere almeno un punto di minimo e non ha punti di massimo. Siccome f_a è di classe C^1, i punti di minimo sono compresi tra quelli in cui si annulla il gradiente, ovvero tra le soluzioni del sistema
$$\begin{cases}2ax-\sin x\cos y=0\\ 2ay-\cos x\sin y=0\end{cases};\tag{1}$$
osserviamo inoltre che $(0,0)$ è sempre una soluzione di (1). Ora, se f_a è convessa i punti di minimo coincidono con i punti in cui si annulla il gradiente, e se f_a è strettamente convessa c'è un solo punto di minimo. Pertanto per $a>1/2$ si ha che $(0,0)$ è un punto di minimo, e non ce ne sono altri.
Siccome $1/\pi<1/2$, $f_{1/\pi}$ non è convessa, e non è detto che $(0,0)$ sia il punto di minimo (anzi, lo studio della matrice Hessiana mostra che si tratta di un punto di massimo locale). Dobbiamo trovare le altre soluzioni di (1); per farlo prendiamo la somme e la differenza dell'equazioni in (1), ottenendo il sistema equivalente
$$\begin{cases}2a(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)\\ 2a(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y=\sin(x-y)\end{cases}.\tag{2}$$

Osserviamo ora che per $a = 1/\pi$ le soluzioni dell'equazione $2at = \sin t$ sono esattamente 0, $\pm\pi/2$ (lo si vede facilmente con un disegno, e lo si può dimostrare con un breve studio di funzione). Pertanto le soluzioni di (2) sono i nove punti dati da

$$(0,0)\ ,\quad \Big(0, \pm\frac{\pi}{2}\Big)\ ,\quad \Big(\pm\frac{\pi}{2}, 0\Big)\ ,\quad \Big(\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{4}\Big)\ .$$

Un semplice calcolo mostra che i punti di minimo sono $(0, \pm\pi/2)$ e $(\pm\pi/2, 0)$.

2. L'insieme A si parametrizza come l'insieme dei punti

$$\begin{cases} x = \rho\cos^5\theta \\ y = \rho\sin^5\theta \end{cases}$$

con $0 \le \theta \le \pi/2$ e $0 \le \rho \le r$, e la parametrizzazione è iniettiva tranne che per $\rho = 0$ (si tratta di una semplice verifica). Essendo

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos^5\theta & -5\rho\,\cos^4\theta\,\sin\theta \\ \sin^5\theta & 5\rho\,\sin^4\theta\,\cos\theta \end{pmatrix} = 5\rho\,\sin^4\theta\,\cos^4\theta\ ,$$

l'integrale diventa

$$\begin{aligned}\int_A y\,dx\,dy &= \int_0^r\int_0^{\pi/2} 5\rho^2\sin^9\theta\,\cos^4\theta\,d\theta\,d\rho \\ &= \Big(\int_0^r 5\rho^2 d\rho\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\sin^9\theta\,\cos^4\theta\,d\theta\Big)\end{aligned}$$

e usando la sostituzione $t = \cos\theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{5}{3}r^3\int_0^1 (1-t^2)^4 t^4\,dt \\ &= \frac{5}{3}r^3\int_0^1 t^{12} - 4t^{10} + 6t^8 - 4t^6 + t^4\,dt = \frac{128}{9009}r^3\ .\end{aligned}$$

3. La soluzione generale dell'equazione omogenea è $y = ae^x + be^{-x}$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Per risolvere l'equazione non omogenea, usiamo il metodo della variazione delle costanti, scrivendo $y = ue^x + ve^{-x}$. L'equazione si riduce allora al sistema

$$\begin{cases} e^x\dot u + e^{-x}\dot v = 0 \\ e^x\dot u - e^{-x}\dot v = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{cases} \quad\text{ovvero}\quad \begin{cases} \dot u = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^x(1+e^{2x})} \\ \dot v = -\dfrac{1}{2}\dfrac{e^x}{1+e^{2x}} \end{cases}\ .$$

D'atra parte, le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $\dot y(0) = 0$ si riducono a

$$\begin{cases} 0 = y(0) = u(0) + v(0) \\ 0 = \dot y(0) = u(0) - v(0) \end{cases} \quad\text{ovvero}\quad \begin{cases} u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{e^x(1+e^{2x})} = \frac{1}{2}\int\frac{d(e^x)}{e^{2x}(1+e^{2x})} \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{ds}{s^2(1+s^2)} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{s^2} - \frac{1}{1+s^2}ds \\ &= -\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{s} + \arctan s\Big] + a = -\frac{1}{2}\big[e^{-x} + \arctan e^x\big] + a \end{aligned}$$

con $a := \frac{4+\pi}{8}$ per avere $u(0) = 0$. Inoltre

$$v = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = -\frac{1}{2}\arctan e^x + b$$

con $b := \frac{\pi}{8}$ per avere $v(0) = 0$. Quindi la soluzione cercata è

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\Big[\frac{\pi}{4} - \arctan e^x\Big] + \frac{1}{2}\big[e^x - 1\big] \ .$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1b). Non volendo utilizzare la stretta convessità di f_1, si può dimostrare direttamente che per $a \geq 1/2$ l'equazione $2at = \sin t$ ammette come unica soluzione $t = 0$, e pertanto il sistema (2) ammette come unica soluzione $(0, 0)$; questo punto è quindi l'unico punto critico di f_a, e deve essere il punto di minimo.
- Seconda parte, esercizio 1. L'esercizio si semplifica notevolmente se ci si accorge che

  $$2f_a(x, y) = a((x + y)^2 + (x - y)^2) + \cos(x + y) + \cos(x, y) \ .$$

  Infatti, utilizzando il cambio di variabili $t = x + y$ e $u = x - y$, ci si riconduce allo studio della convessità e dei punti di minimo della funzione $g(t) + g(u)$, dove

  $$g(t) := at^2 + \cos t \ ,$$

  cioè allo studio di una funzione di una variabile.

Scritto del IV appello, 5 luglio 2004

Prima parte

1. Il numero -1 deve essere uno zero con molteplicità almeno 3 del polinomio caratteristico P dell'equazione. L'esempio più semplice si ha quindi per $P(\lambda) = (\lambda + 1)^3$, che corrisponde all'equazione $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.
2. Ad esempio la matrice diagonale con autovalori $-1, -1, 3$.
3. Deve essere $\alpha < 1$.
4. Scrivendo x, y in coordinate polari otteniamo
$$\int_C \frac{x^2}{z^\alpha}\,dx\,dy\,dz = \int_1^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{\rho^2\cos^2\theta}{z^\alpha}\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$
$$= \Big(\int_1^\infty z^{-\alpha}dz\Big)\Big(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\Big)\Big(\int_0^2 \rho^3\,d\rho\Big) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \le 1, \\ \dfrac{4\pi}{\alpha} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$
5. $D^2 f = \begin{pmatrix} \sin(y-x)+\sin(x-z) & \sin(x-y) & \sin(z-x) \\ \sin(x-y) & \sin(z-y)+\sin(y-x) & \sin(y-z) \\ \sin(z-x) & \sin(y-z) & \sin(x-z)+\sin(z-y) \end{pmatrix}.$
6. Si tratta di trovare i punti di massimo e minimo della forma quadratica $3x^2 + xy + 2y^2$. Siccome gli autovalori della matrice associata sono entrambe positivi, l'unico punto critico è $(0, 0)$, ed è un minimo assoluto.
7. $\sum_1^\infty e^{kx^2-4k} = \sum_1^\infty (e^{x^2-4})^k$ converge a $(1-e^{x^2-4})^{-1}-1$ per ogni $x \in (-2, 2)$, e non converge altrimenti. La convergenza è totale in ogni intervallo $[-2+\varepsilon, 2-\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$.

Seconda parte

1. Sia $P = (x, y, z)$ un punto di $\mathbb{R}^3$. Come prima cosa, osserviamo che il punto Q sulla circonferenza C di equazioni $x^2+y^2 = R^2$ e $z = 0$ che minimizza la distanza da P minimizza anche la distanza dalla proiezione di P sul piano xy, cioè da $P' := (x, y, 0)$. Pertanto Q deve essere
$$Q = \Big(\frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\Big)\ .$$
Ne segue che la distanza di P da C è
$$|P - Q| = \sqrt{z^2 + \big(\sqrt{x^2+y^2} - R\big)^2}$$
e quindi S è l'insieme dei punti che soddisfano la disequazione
$$z^2 + \big(\sqrt{x^2+y^2} - R\big)^2 \le r^2\ .$$
In particolare, fissato $z \in [-r, r]$, l'intersezione di S con il piano parallelo al piano xy ad altezza z è l'insieme S_z dei punti (x, y, z) tali che
$$\big|\sqrt{x^2+y^2} - R\big| \le r^2 - z^2\ ,$$

si tratta dunque di una corona circolare di raggio esterno $R + \sqrt{r^2 - z^2}$ e raggio interno $R - \sqrt{r^2 - z^2}$ (mentre S_z è vuoto se $z \notin [-r, r]$). Pertanto, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S) &= \int_{-r}^{r} \mathrm{Area}(S_z)\, dz \\
&= \int_{-r}^{r} \pi\big(R + \sqrt{r^2 - z^2}\big)^2 - \pi\big(R - \sqrt{r^2 - z^2}\big)^2\, dz \\
&= \int_{-r}^{r} 4\pi R \sqrt{r^2 - z^2}\, dz = 4\pi r^2 R \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - s^2}\, ds = 2\pi^2 r^2 R\ .
\end{aligned}$$

2. La funzione f è di classe C^∞ su tutto $\mathbb{R}^2$. Il gradiente di f è $Df = (-8xy^2, 4y(2 - 2x^2 - y^2))$ e si annulla nei punti $(0, \pm\sqrt{2})$ e sulla retta $y = 0$. La derivata seconda di f è

$$D^2 f = \begin{pmatrix} -8y^2 & -16xy \\ -16xy & 8 - 8x^2 - 12y^2 \end{pmatrix}$$

ed è definita negativa in $(0, \pm\sqrt{2})$. Questi punti sono dunque di massimo locale.
I punti critici sulla retta $y = 0$, invece, non possono essere studiati usando la derivata seconda che, non sorprendentemente, risulta non definita su tutta la retta. Tuttavia, f è nulla su tutta la retta e $f(x, y) = 4y^2(1 - x^2 - y^2/4)$; studiando il segno del fattore $1 - x^2 - y^2/4$ otteniamo che f è positiva all'interno dell'ellisse di equazione $x^2 + y^2/4 = 1$ e negativa all'esterno, per cui i punti $(x, 0)$ con $|x| < 1$ risultano essere punti di minimo locale, mentre i punti $(x, 0)$ con $|x| > 1$ sono di massimo locale. Invece i punti $(\pm 1, 0)$ non sono né di massimo né di minimo locale.

3. a) Sia $S(n)$ il gruppo delle permutazioni di n elementi; per ogni $i, j = 1, \dots, n$ indichiamo con v_{ij} la j-esima coordinata di v_i (quindi, ad essere precisi la matrice di coordinate v_{ij} è la trasposta della matrice di colonne v_i, ma il determinante è ovviamente lo stesso). Abbiamo allora che

$$\det M = \sum_{\sigma \in S(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} v_{i,\sigma(i)}\ . \tag{1}$$

Per derivare questa prodotto conviene introdurre la seguente notazione: con $\delta(i, k)$ indichiamo il numero 1 se $i = k$ e zero altrimenti, $D = D^1$ è l'operatore di derivazione, e D^0 l'operatore identità; possiamo allora scrivere la derivata del prodotto di n funzioni di una variabile nella seguente forma compatta:

$$D\Big(\prod_{i=1}^{n} u_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} D^{\delta(i,k)} u_i\ .$$

Applicando questa formula per derivare il termine di destra della (1) otteniamo

$$\begin{aligned}
D(\det M) &= \sum_{\sigma \in S(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) D\Big(\prod_{i=1}^{n} v_{i,\sigma(i)}\Big) \\
&= \sum_{\sigma \in S(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} D^{\delta(i,k)} v_{i,\sigma(i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\sigma \in S(n)} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} D^{\delta(i,k)} v_{i,\sigma(i)} = \sum_{k=1}^{n} \det(D^{\delta(1,k)} v_1, \dots, D^{\delta(n,k)} v_n)
\end{aligned}$$

che è proprio la formula desiderata:

$$D(\det M) = \det(Dv_1, v_2, \dots, v_n) + \det(v_1, Dv_2, \dots, v_n) + \cdots + \det(v_1, v_2, \dots, Dv_n) \ . \quad (2)$$

b) Applichiamo la formula (2) per derivare w:

$$\begin{aligned} Dw &= D(\det(y, Dy, D^2y, \dots, D^{n-1}y) \\ &= \det(Dy, Dy, D^2y, \dots, D^{n-1}y) + \det(y, D^2y, D^2y, \dots, D^{n-1}y) + \cdots \\ &\quad \cdots + \det(y, Dy, \dots, D^{n-3}y, D^{n-1}y, D^{n-1}y) + \det(y, Dy, \dots, D^{n-2}y, D^ny) \ . \end{aligned}$$

Siccome in tutti questi determinanti tranne l'ultimo c'è una colonna che si ripete, sono tutti nulli, e quindi

$$Dw = \det(y, Dy, \dots, D^{n-2}y, D^ny) \ .$$

Ricordando poi che y soddisfa l'equazione

$$D^ny = -a_{n-1}D^{n-1}y - a_{n-1}D^{n-2}y - \cdots - a_1Dy - a_0y \ ,$$

otteniamo

$$\begin{aligned} Dw &= \det(y, Dy, \dots, D^{n-2}y, D^ny) \\ &= \det(y, Dy, \dots, D^{n-2}y, -a_{n-1}D^{n-1}y - a_{n-1}D^{n-2}y - \cdots - a_0y) \\ &= \det(y, Dy, \dots, D^{n-2}y, -a_{n-1}D^{n-1}y) \\ &= -a_{n-1}w \ . \end{aligned}$$

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1. Per calcolare il volume di S si può anche utilizzare il fatto che S si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z il cerchio D che giace sul piano xz con centro $(R, 0)$ e raggio r. Usando la formula per il volume dei solidi di rotazione otteniamo

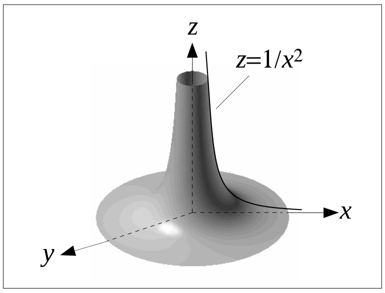
$$\mathrm{Vol}(S) := \int_D 2\pi|x|\, dx\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^r 2\pi(R + r\cos\theta)\,\rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi^2r^2R \ .$$

- Seconda parte, esercizio 2. Un modo alternativo per studiare i punti critici della forma $(\bar{x}, 0)$ è questo: siccome $D_y^2 f(\bar{x}, 0) = 8(1 - \bar{x}^2) > 0$, se $|\bar{x}| < 1$ allora $D_y^2 f > 0$ in $(\bar{x}, 0)$, e per continuità esiste $\delta > 0$ tale che $D_y^2 f > 0$ sul quadrato $Q := (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \times (-\delta, \delta)$. Quindi, per ogni $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è convessa sull'intervallo $(-\delta, \delta)$ ed ha derivata nulla per $y = 0$, che risulta quindi essere un punto di minimo. Ne consegue che $f(x, y) \geq f(x, 0) = 0$ per ogni $(x, y) \in Q$, e dunque $(\bar{x}, 0)$ è un punto di minimo locale. In modo analogo si dimostra che tutti i punti $(\bar{x}, 0)$ con $|\bar{x}| > 1$ sono punti di massimo locale.

- Seconda parte, esercizio 3a). Una dimostrazione alternativa la si ottiene per induzione su n, sviluppando il determinante di M rispetto all'ultima colonna (o a qualunque altra colonna o riga).

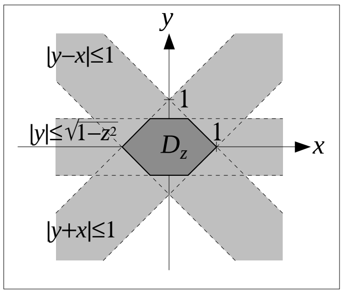
Prima parte

1. a) $f(x,y) := e^x(1+y^2)^{-1}$ è maggiorata in modulo da e^x e quindi f è limitata su ogni striscie del tipo $I \times \mathbb{R}$ con I intervallo in $\mathbb{R}$ e si applica il teorema di esistenza globale.
   b) La derivata parziale di $f(x,y) := \log(1+x^2+y^2)$ rispetto a y è $2y(1+x^2+y^2)^{-1}$ è maggiorata in modulo da 1, e quindi f è Lipschitziana in y su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e si applica il teorema di esistenza globale.
   c) $f(x,y) := \sin(x+y)$ è maggiorata in modulo da 1, ovvero è limitata. Quindi si applica il teorema di esistenza globale.
2. Ad esempio $f(x,y) := xy$, che ha come unico punto critico $(0,0)$ (punto di sella).
3. La funzione f è differenziabile per $x \neq 0$, e $Df(x) = x/|x|$.
4. Fissato x_4, la sezione di C ad altezza x_4 è una sfera (tridimensionale) di centro l'origine e raggio $e^{-x_4/2}$ ed ha volume pari a $\frac{4}{3}\pi(e^{-x_4/2})^3$. Pertanto
$$\text{Misura}(C) = \int_0^\infty \frac{4}{3}\pi e^{-3x_4/2}\,dx_4 = \left| -\frac{8}{9}\pi e^{-3x_4/2} \right|_0^\infty = \frac{8\pi}{9} \;.$$
5. Le condizioni $|x+y| \leq 2$ e $|x-y| \leq 1$ equivalgono rispettivamente a $|u| \leq 1$ e $|v| \leq 1/2$. Inoltre $x = u+v$ ed $y = u-v$, per cui $dx\,dy = 2\,du\,dv$ e
$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1}^{1} f(u+v,u-v)\,du\,dv \;.$$
6. La derivata derivata seconda di f nel punto (x,y) è
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2-a\cos x & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$
   ed è semidefinita positiva se e solo se $2 \geq a\cos x$. Questa condizione è verificata per ogni x se e solo se $|a| \leq 2$.
7. Il limite di $f_n(x)$ per $n \to +\infty$ esiste per ogni $x \geq 0$, e vale
$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ \pi/4 & \text{per } x = 1 \\ \pi/2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$
   Siccome f è discontinua in 0, è chiaro che la convergenza non può essere uniforme su $[a,+\infty]$ quando $a \leq 1$. Viceversa è facile vedere che è uniforme per $a > 1$.
8. Si tratta del grafico della funzione $z = 1/x^2$ $(x > 0)$ ruotato attorno all'asse delle z.



Seconda parte

1. b) La disequazione che definisce C_1 è $y^2 \leq 1 - z^2$ e non ammette soluzioni quando $|z| > 1$. Pertanto la sezione di C_1 ad altezza z è vuota per $|z| > 1$, e pertanto lo stesso vale per D_z. Per $|z| \leq 1$, invece, D_z è l'insieme dei punti (x, y) che soddisfano le disequazioni



$$\begin{cases} |y| \leq \sqrt{1 - z^2} \\ |y - x| \leq 1 \\ |y + x| \leq 1 \end{cases}$$

e si tratta quindi dell'intersezione di tre strisce, che dà luogo all'esagono disegnato in figura.

c) Un semplice conto mostra che l'area dell'esagono D_z è

$$\text{Area}(D_z) = 2 - 2\Big(1 - \sqrt{1 - z^2}\Big)^2 = 4\sqrt{1 - z^2} - 2(1 - z^2)$$

e quindi

$$\text{Vol}(D) = \int_{-1}^{1} \text{Area}(D_z)\, dz = \int_{-1}^{1} \big(4\sqrt{1 - z^2} - 2 + 2z^2\big)\, dz = \frac{6\pi - 8}{3} .$$

2. a) Dette x_1 ed x_2 le ascisse dei vertici di T oltre all'origine, le corrispondenti ordinate sono $2(1 - x_1^2)$ e $2(1 - x_2^2)$. Inoltre l'area di T è metà di quella del parallelogrammo generato dai vettori corrispondenti a questi due vertici, ovvero

$$A(x_1, x_2) := \frac{1}{2}\left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2(1 - x_1^2) & 2(1 - x_2^2) \end{pmatrix} \right| = \big| x_1(1 - x_2^2) - x_2(1 - x_1^2) \big|$$

e supponendo $x_1 \geq x_2$,

$$A(x_1, x_2) = x_1(1 - x_2^2) - x_2(1 - x_1^2) .$$

b) Si tratta di trovare il valore massimo di $A(x_1, x_2)$ sull'insieme delle coppie (x_1, x_2) tali che $-1 \leq x_2 \leq x_1 \leq 1$, vale a dire il triangolo chiuso D delimitato dalle rette $x_2 = -1$, $x_1 = 1$ e $x_2 = x_1$. Il punto di massimo esiste perché f è una funzione continua e D un insieme compatto. Inoltre, se tale punto è situato all'interno di D, allora il gradiente di f vi si annulla, e cioè

$$\begin{cases} 0 = D_1 A = 1 - x_2^2 + 2x_1 x_2 , \\ 0 = D_2 A = -2x_1 x_2 - (1 - x_1^2) . \end{cases}$$

Sommando le due equazioni si ottiene $x_1^2 - x_2^2 = 0$, che ammette come soluzioni $x_2 = x_1$ ed $x_2 = -x_1$. Scartiamo la prima possibilità perché non dà luogo a punti interni a D. Sostituendo $x_2 = -x_1$ nella prima equazione otteniamo $1 - 3x_1^2 = 0$, ovvero $x_1 = \pm 1/\sqrt{3}$ e $x_2 = \mp 1/\sqrt{3}$. Solo il punto critico $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ risulta interno a D, e

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}} . \tag{1}$$

Il punto di massimo di A potrebbe però essere situato su uno dei tre segmenti che costituiscono la frontiera di Q. Per i punti sul segmento $x_1 = 1$, $-1 \leq x_2 \leq 1$ si ha $A(1, x_2) = 1 - x_2^2$, che raggiunge il valore massimo per $x_2 = 0$, e detto valore è

$$A(1, 0) = 1 . \tag{2}$$

Analogamente si vede che il valore massimo di f sul segmento $x_2 = -1$, $-1 \le x_1 \le 1$ viene raggiunto per $x_1 = 0$, e

$$A(0, -1) = 1 \; . \tag{3}$$

Infine, sul segmento $x_2 = x_1$ il valore di A è sempre 0. Confrontando i valori in (1), (2), (3), si deduce che il massimo di A viene raggiunto in $(1, 0)$ e $(0, -1)$, che corrispondono ai triangoli speculari di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(\pm 1, 0)$.

3. L'equazione differenziale

$$\ddot{y} + \frac{a}{x}\dot{y} - \frac{a}{x^2}y = x^b \quad \text{per } x > 0. \tag{4}$$

è un'equazione di Eulero. Il modo standard di risolverle è il cambio di variabile $t = \log x$: scriviamo dunque $y(x) = z(\log x)$, e siccome

$$\dot{y} = \frac{\dot{z}}{x} \quad \text{e} \quad \ddot{y} = \frac{\ddot{z} - \dot{z}}{x^2} \; ,$$

la (4) si riduce alla seguente equazione in z e t:

$$\ddot{z} + (a - 1)\dot{z} - az = e^{(b+2)t} \; . \tag{5}$$

Il polinomio caratteristico dell'omogenea ha come soluzioni 1 ed $-a$, e quindi soluzione dell'omogenea è $z = \alpha e^t + \beta e^{-at}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea della forma $\bar{y} = \gamma e^{(b+2)t}$, ed otteniamo che γ deve essere pari a $((b+1)(a+b+2))^{-1}$, e quindi la soluzione generale della (5) è

$$z = \frac{e^{(b+2)t}}{(b + 1)(a + b + 2)} + \alpha e^t + \beta e^{-at} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

e sostituendo $t = \log x$

$$y = \frac{x^{b+2}}{(b + 1)(a + b + 2)} + \alpha x + \beta x^{-a} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1c): c'è chi ha calcolato l'area dell'esagono D_z con un integrale, invece che con metodi elementari. No comment!
- Seconda parte, esercizio 3): alcuni hanno risolto l'esercizio senza tener conto del fatto che a e b sono positivi, dovendo però discutere molti più casi.
- Seconda parte, esercizio 3. Una soluzione alternativa consiste nel cercare soluzioni particolari dell'equazione omogenea associata alla (4) della forma $y = x^\alpha$ ed applicare il metodo della variazione delle costanti. Ponendo $y = x^\alpha$ l'equazione omogenea si riduce a

$$\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} + a\alpha x^{\alpha-2} - ax^{\alpha-2} = 0 \quad \text{per } x > 0,$$

e siccome le soluzioni dell'equazione di secondo grado $(\alpha + a)(\alpha - 1) = 0$ sono 1 e $-a$, otteniamo come soluzioni particolari dell'equazione omogenea le funzioni x e x^{-a}.
Applichiamo ora il metodo della variazione delle costanti: sostituendo $y = ux + vx^{-a}$ e ponendo $\dot{u}x + \dot{v}x^{-a} = 0$, l'equazione (4) diventa $\dot{u} - a\dot{v}x^{-(a+1)} = x^b$. Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} \dot{u}x + \dot{v}x^{-a} = 0 \\ \dot{u} - a\dot{v}x^{-(a+1)} = x^b \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \dot{u} = \frac{x^b}{a+1} \\ \dot{v} = -\frac{x^{b+a+1}}{a+1} \end{cases} .$$

Ricaviamo u e v per integrazione, e ricordando che $y = ux + vx^{-a}$ otteniamo la soluzione generale della (4):

$$y = \frac{x^{b+2}}{(b_1)(a+b+2)} + \alpha x + \beta x^{-a} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

PRIMA PARTE

1. Per esempio, $X := (0,1)$ e $f(x) := x/2$.
2. La sezione di V ad altezza z è vuota per $z < 0$, ed altrimenti è un rettangolo di lati $4z$ e $2/(1+z^4)$. Quindi
$$\mathrm{Vol}(V) = \int_0^{+\infty} \frac{8z}{1+z^4}\,dz = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\pi\ .$$
3. La funzione f è una forma quadratica, e quindi si tratta di vedere quando la matrice associata
$$M := \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a-4 & -2 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}$$
è definita positiva. Il polinomio caratteristico è $(\lambda - a)(\lambda - (a-5))(\lambda - (a+1))$, e dunque ha soluzioni tutte positive se e solo se $a > 5$.
4. Il polinomio caratteristico dell'omogenea è $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^4 - 1)/(\lambda - 1)$. Gli zeri sono dunque le radici quarte dell'unità tranne 1, vale a dire -1 e $\pm i$. Inoltre una soluzione particolare dell'equazione è $e^x/4$. Quindi
$$y = \frac{e^x}{4} + a_1 e^{-x} + a_2 \cos x + a_3 \sin x$$
con $a_1, \dots, a_3 \in \mathbb{R}$.
5. $\nabla f(x) = 2\dfrac{(x_1, -x_2, x_3, -x_4)}{x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}$.
6. Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^3 + 8 = 0$, i suoi zeri sono le radici cubiche di -8, ovvero -2 e $1 \pm i\sqrt{3}$. Una soluzione particolare dell'equazione è $y = e^{2x}/16$, e quindi quella generale è
$$y = ae^{-2x} + be^x \cos(\sqrt{3}x) + ce^x \sin(\sqrt{3}x) + \frac{e^{2x}}{16} \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}.$$
7. Le funzioni f_n convergono uniformemente a 0 su ogni intervallo del tipo $(-\infty, a]$ con $a \in \mathbb{R}$.
8. $\displaystyle\int_C z(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{e^{-z/2}} z\rho^2\, 2\pi\rho\, d\rho\right) dz = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} z e^{-2z}\, dz = \frac{\pi}{8}.$

SECONDA PARTE

1. a) Per x diverso da 0 si calcola facilmente che
$$D_i f_j(x) = D_i(x_j|x|) = \delta_{ij}|x| + \frac{x_i x_j}{|x|}\ .$$
Inoltre il calcolo delle derivate direzionali in 0 dà $D_i f_j(0) = 0$ per ogni i, j. In particolare le derivate direzionali esistono su tutto $\mathbb{R}^n$ e sono continue, quindi f è differenziabile ovunque per il teorema del differenziale totale, e di classe C^1.

b) La derivata di f in un punto x è una matrice della forma $|x|(I + e\,e^t)$ dove $e := x/|x|$ è un vettore unitario (in questa formula, e è un vettore colonna, ovvero una matrice $n \times 1$, mentre e^t è la sua trasposta, cioè una matrice $1 \times n$; il prodotto $e\,e^t$ è quindi una matrice $n \times n$). Come dimostriamo sotto, $\det(I + e\,e^t) = 2$ per ogni vettore unitario e, e quindi

$$\det(Df(x)) = 2|x| \quad \text{per ogni } x.$$

Per dimostrare che $\det(I+e\,e^t) = 2$, prendiamo una matrice ortonormale M tale che $Me = \bar{e}$, dove $\bar{e} = (1, 0, \dots, 0)$, ed osserviamo che, essendo $\det M = \det M^t = 1$,

$$\det(I + e\,e^t) = \det(M(I + e\,e^t)M^t) = \det(I + \bar{e}\,\bar{e}^t) = \det \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = 2\ .$$

2. Consideriamo il cambio di variabile $u = xy$ e $v = y/x$ (definito solo per x, y positivi). Si verifica che l'insieme E corrisponde *in modo biunivoco* all'insieme E' delle coppie (u, v) tali che $1 < u < 3$ e $1 < v < 3$, ed inoltre
$$du\,dv = \left|\det \begin{pmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{pmatrix}\right| dx\,dy = \frac{2y}{x}\,dx\,dy = 2v\,dx\,dy\ .$$
Pertanto
$$\int_E \cos(xy)\,dx\,dy = \int_1^3\int_1^3 \frac{\cos u}{2v} du\,dv = \left(\int_1^3 \cos u\,du\right)\left(\int_1^3 \frac{dv}{2v}\right) = (\sin 3 - \sin 1)\frac{\log 3}{2}\ .$$

3. a) Si tratta di verificare che per ogni coppia di matrici M, N ed ogni numero reale λ valgono le seguenti proprietà: (i) $\phi(M) \geq 0$, (ii) $\phi(M) = 0 \Rightarrow M = 0$, (iii) $\phi(\lambda M) = |\lambda|\,\phi(M)$, (iv) $\phi(M + N) \leq \phi(M) + \phi(N)$. Le dimostrazioni sono elementari e le ometto.
b) La definizione di ϕ implica immediatamente la seguente disuguaglianza:
$$|Mv| \leq \phi(M)\,|v| \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$
Prendiamo due punti distinti x, y in $\mathbb{R}^n$, ed indichiamo con γ rettilineo che li congiunge, ovvero $\gamma(y) := x + (y - x)t$ con $t \in [0, 1]$. Allora
$$f(y) - f(x) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\big[f(\gamma(t))\big]\,dt = \int_0^1 Df(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt\ ,$$
per cui, ricordando la (1) ed usando il fatto che $\dot\gamma(t) = y - x$ per ogni t,
$$\begin{aligned}|f(y) - f(x)| &\leq \int_0^1 \big|Df(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\big|\,dt \leq \int_0^1 \phi\big(Df(\gamma(t))\big)\,|\dot\gamma(t)|\,dt \\ &\leq \sup \phi(Df) \int_0^1 |\dot\gamma(t)|\,dt \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(Df(x))|y - x|\ ,\end{aligned}$$
e dunque f è una contrazione se $\sup \phi(Df) < 1$.
c) Se f è una contrazione di parametro $\lambda < 1$, allora, dato $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ ed $h > 0$ si ha
$$\left|\frac{f(x + hv) - f(x)}{h}\right| \leq \frac{\lambda|hv|}{h} = \lambda\,|v|$$
e passando al limite per $h \to 0$ si ottiene
$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right| \leq \lambda\,|v|\ ,$$
e siccome la derivata parziale di f nella direzione v è proprio $Df(x)\,v$, $|Df(x)\,v| \leq \lambda|v|$ che implica $\phi(Df(x)) \leq \lambda$.

Integrazione, a.a. 2003/04 - Soluzioni

PRIMA PARTE

1. Il determinante della derivata è
$$\det\begin{pmatrix} 3x_1^2-3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2-3x_2^2 \end{pmatrix} = 9\big[(x_1^2-x_2^2)^2+4x_1^2x_2^2\big] = 9(x_1^2+x_2^2)^2$$
e quindi la funzione è localmente invertibile in tutti i punti, eccetto l'origine $(0,0)$.

2. Si ha $A = 3I + N$ con $N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; inoltre $N^2 = 0$, e quindi $e^{tN} = I + tN$, e
$$e^{tA} = e^{3tI}e^{tN} = e^{3t}(I+tN) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

3. I punti in cui C non è localmente grafico sono quelli in cui si annulla il gradiente della funzione $f(x,y) := (x^2+y^2)^2 - 8(y^2-x^2)$, e cioè
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4x(x^2+y^2+4) = 0 \ , \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2+y^2-4) = 0 \ . \\ f = (x^2+y^2)^2 - 8(y^2-x^2) = 0 \end{cases}$$
L'unica soluzione di questo sistema è $(0,0)$. I punti in cui non è possibile esplicitare y in funzione di x sono quelli in cui si annulla la derivata di f rispetto a y, ovvero
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = 4y(x^2+y^2-4) = 0 \ . \\ f = (x^2+y^2)^2 - 8(y^2-x^2) = 0 \end{cases}$$
Le soluzioni di questo sistema sono $(0,0)$, come prima, e i quattro punti $(\pm1, \pm\sqrt{3})$.

4. Il polinomio caratteristico di A è $(\lambda - a)^2 - 25$ ed ha soluzioni $a \pm 5$. In particolare A è diagonalizzabile, e pertanto e^{tA} si scrive come
$$e^{tA} = R^{-1}\begin{pmatrix} e^{(a+5)t} & 0 \\ 0 & e^{(a-5)t} \end{pmatrix} R \ .$$
Ne consegue che la funzione è infinitesima per $t \to +\infty$ se e solo se entrambe gli autovalori di A sono negativi, ovvero $a < -5$.

5. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange da luogo al sistema
$$\begin{cases} xy^2z - 1 = 0 \\ 2x - \lambda y^2 z = 0 \\ 4y - 2\lambda xyz = 0 \\ 2z - \lambda xy^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} xy^2z = 1 \\ 2x^2 = \lambda xy^2z = \lambda \\ 2y^2 = \lambda xy^2 z = \lambda \\ 2z^2 = \lambda xy^2 z = \lambda \end{cases}$$
per cui $\lambda = \pm 2$, e le soluzioni sono $(1, \pm1, 1)$ e $(-1, \pm1, -1)$. In tutti questi casi il valore di f è 4. Che questo sia il valore minimo è garantito dal fatto che un punto di minimo esiste nonostante che il vincolo non sia compatto (perché f tende a $+\infty$ quando $|(x,y,z)|$ tende a $+\infty$), e dal fatto che l'equazione del vincolo non è degenere in nessuno dei punti del vincolo.

6. Introducendo le variabili ausiliarie $y = x'$ e $z = x''$ possiamo riscrivere l'equazione come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = t^2 \sin x + 2xy \end{cases}$$

La funzione $f(t, x, y, z) := (y, z, t^2 \sin x + 2xy)$ è definita su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, è di classe C^1, ma non è a crescita lineare in (x, y, z) per via del termine xy, e quindi il teorema di esistenza globale non si applica.

7. Affinché y sia sottosoluzione deve valere $\dot{y} \leq y^2 + e^{-x}$, ovvero

$$\frac{a}{(1-x)^2} \leq \frac{a^2}{(1-x)^2} + e^{-x} \quad \text{per } x < 1,$$

cosa che si verifica se e solo se $a \leq a^2$, cioè $a \geq 1$.

8. Gli insiemi a) e c) sono chiusi perché controimmagini di chiusi secondo funzioni continue, mentre b) è aperto (controimmagine di un aperto) e non essendo vuoto né tutto tutto lo spazio non può essere anche chiuso. L'insieme a) è limitato, mentre c) non lo è: si può infatti costruire una successione di punti (x_n, y_n, z_n) in tale insieme tali che $z_n := 1/n$, ed in tal caso $|y_n|$ deve necessariamente tendere a $+\infty$.

SECONDA PARTE

1. a) La funzione $f(x, y) := \log y + x^2$, è definita su tutto $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ e di classe C^∞. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy (1) è unica. Inoltre $f(x, y) \geq 0$ per $y \geq \exp(-x^2)$, e facendo un disegno è facile convincersi del fatto che il grafico della soluzione y deve rimanere sopra il grafico di $\exp(-x^2)$, da cui risulta che y ha derivata positiva ovunque. Per dimostrarlo osserviamo che $y_1 := \exp(-x^2)$ è una sottosoluzione per $x > 0$ ed una soprasoluzione per $x < 0$, e siccome Siccome $y(0) = y_1(0)$, per il teorema del confronto $y \geq y_1$ per ogni x. Anzi, il teorema del confronto può essere applicato nella forma forte, per cui $y > y_1$ per ogni $x \neq 0$, da cui segue $\dot{y} > 0$ per ogni $x \neq 0$, e quindi y è strettamente crescente.

   b) Sia $I = (a, b)$ l'insieme di definizione di y. Siccome l'insieme di definizione di f è $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, se a fosse finito, il limite di y per $x \to a^+$ dovrebbe essere 0 oppure $+\infty$. La prima possibilità è esclusa dalla minorazione $y \geq \exp(-x^2)$ e la seconda dalla maggiorazione $y \leq y(0) = 1$ per $x \leq 0$. Dunque $a = -\infty$. Per dimostrare che $b = +\infty$ procediamo allo stesso modo: ci manca solo una maggiorazione per y, che può essere ottenuta usando il lemma di Gronwall e la stima $\dot{y} = \log y + x^2 \leq y + x^2$.

   c) Derivando l'equazione $\dot{y} = \log y + x^2$ otteniamo $\ddot{y} = \dot{y}/y + 2x$. Siccome già sappiamo che $\dot{y} \geq 0$, si vede subito che $\ddot{y} \geq 0$ per $x \geq 0$.

   d) Siccome y è crescente, ammette limite $a \in [0, 1]$ per $x \to -\infty$. Se per assurdo fosse $a > 0$, passando al limite nell'equazione, otteniamo che $\dot{y}$ tende a $+\infty$, che è una contraddizione. Similmente, y ammette limite $b \in [1, +\infty]$ per $x \to +\infty$; passando al limite nell'equazione, otteniamo che $\dot{y}$ tende a $+\infty$, cosa che è compatibile solo con l'ipotesi $a = +\infty$. Dunque y tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e a 0 per $x \to -\infty$.

   e) Difficile. Cerchiamo di determinare il comportamento di y per $x \to +\infty$. Se partiamo dall'ipotesi che y abbia crescita polinomiale in x si vede subito che nell'equazione $\dot{y} = \log y + x^2$, il termine $\log y$ è trascurabile, per cui $\dot{y} \sim x^2$, che suggerisce l'idea che $y \sim x^3/3$. Per far vedere che le cose stanno effettivamente così, usiamo de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x^2/3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dot{y}}{x^2} = 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{\log y}{x^2} \ ;$$

per concludere ci basta mostrare che $\log y = o(x^2)$, ovvero $y = o(\exp(x^2))$. Osserviamo ora che $2\exp(x)$ è soprasoluzione dell'equazione per $x \geq 0$ (ci si riduce alla disuguaglianza $2\exp(x) \geq \log 2 + x + x^2$, che segue dallo sviluppo di Taylor all'ordine 2 dell'esponenziale in 0) e vale più di y in 0, per cui $2\exp(x) \geq y$ per $x \geq 0$.
Per quanto riguarda il comportamento a $-\infty$, si può congetturare che y sia asintoticamente equivalente a $\exp(-x^2)$. Siccome $y \geq \exp(-x^2)$, non ci resta che dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$y \leq (1+\varepsilon)\exp(-x^2) \quad \text{definitivamente per } x \to -\infty \tag{3}$$

(cioè per per ogni x minore di un qualche x_0 finito). Scrivendo $1+\varepsilon$ come e^a con $a > 0$, la (3) diventa $y \leq \exp(a - x^2)$. Osserviamo che questa disuguaglianza deve valere frequentemente: infatti, se così non fosse, avremmo che $y > \exp(a - x^2)$ definitivamente, per cui $\dot{y} \geq a$, che a sua volta implicherebbe che $y \to -\infty$ per $x \to -\infty$. Dunque $y \leq \exp(a - x^2)$ frequentemente, e per far vedere che lo stesso vale definitivamente basta osservare che la funzione $\exp(a - x^2)$ è definitivamente una sottosoluzione.

2. a) Se A è simmetrica, si può scrivere come $A = R^{-1}DR$ con R matrice ortonormale R e D matrice diagonale con coefficienti uguali agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di A. Pertanto $\exp(Ax) = R^{-1}\exp(Dx)R$ e la soluzione generale del sistema (2) è

$$y(x) = R^{-1}e^{Dx}v = R^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x}v_1 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n x}v_n \end{pmatrix} \quad \text{con } v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^k. \tag{4}$$

Ora è chiaro che se tutti gli autovalori di A sono negativi, allora la funzione in (4) è infinitesima a $+\infty$ indipendentemente dalla scelta di v. Viceversa, se per assurdo un qualche λ_i non fosse negativo, prendendo $v = e_i$ otterremmo una soluzione non infinitesima del sistema.
b) In tal caso la soluzione generale del sistema è data dalla soluzione generale del sistema omogeneo (4) più una soluzione particolare del sistema non omogeneo, ad esempio

$$\bar{y}(x) = e^{Ax}\int_0^x e^{-At}b(t)\,dt = \int_0^x e^{A(x-t)}b(t)\,dt\ .$$

Cominciamo col far vedere che se tutti gli autovalori di A sono negativi allora $\bar{y}$ è infinitesima a $+\infty$ (e di conseguenza sono infinitesime *tutte* le soluzioni del sistema non omogeneo). Indicando con $\bar{\lambda}$ il massimo autovalore di A otteniamo la stima

$$|e^{Ax}| \leq |R^{-1}|\,|e^{Dx}|\,|R| = |R^{-1}|\Big(\sum |e^{\lambda_i x}|^2\Big)^{1/2}|R| \leq Ce^{\bar{\lambda}x}$$

con C costante finita (per la precisione, siccome R è ortonormale si ha $|R| = |R^{-1}| = \sqrt{n}$ e si può prendere $C := n^{3/2}$). Dunque

$$|\bar{y}(x)| \leq \int_0^x \left|e^{A(x-t)}\right|\,|b(t)|\,dt = Ce^{\bar{\lambda}x}\int_0^x e^{-\bar{\lambda}t}|b(t)|\,dt\ .$$

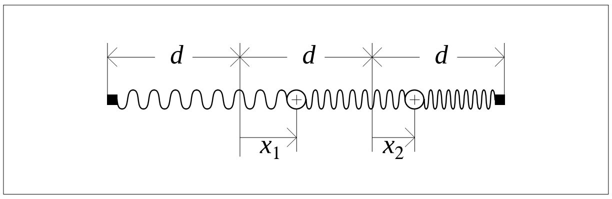
Mostriamo ora che il termine più a destra di questa catena di disuguaglianze è infinitesimo per $x \to +\infty$. Se l'integrale, che è crescente in x, tende a un limite finito allora la conclusione è immediata perché $\bar{\lambda} < 0$ per ipotesi. Se invece l'integrale tende a $+\infty$, applicando de L'Hôpital si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{-\bar{\lambda}t}|b(t)|\,dt}{e^{-\bar{\lambda}x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\bar{\lambda}x}|b(x)|\,dt}{-\bar{\lambda}e^{-\bar{\lambda}x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|b(x)|}{-\bar{\lambda}} = 0\ .$$

Non ci resta che far vedere che se almeno un autovalore non è negativo, allora esiste una soluzione non infinitesima. Ma questo è ovvio: se $\bar{y}$ stessa non è infinitesima, allora abbiamo finito, e se invece $\bar{y}$ fosse infinitesima, allora basta prendere $y + \bar{y}$ con y soluzione non infinitesima del sistema omogeneo.
c) Nel caso che A non sia simmetrica, le soluzioni sono tutte infinitesime se e solo se le parti reali degli autovalori di A sono tutte negative. Nel caso in cui A sia diagonalizzabile in senso complesso la dimostrazione è essenzialmente la stessa, e diventa leggermente più complicata nel caso generale. Ometto una dimostrazione dettagliata.

3. b) L'insieme A è chiuso in $\mathbb{R}^3$, in quanto luogo di zeri della funzione continua $\Phi(x, y, z) := (x^2+y^2-z^2-1, x+y-z^2)$. Dimostriamo ora che è anche limitato. A tale scopo, osserviamo che
$$z^2 + 1 = x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 = \frac{1}{2}z^4 \ ,$$
ovvero $z^4 - 2z^2 - 2 \leq 0$, e poiché le soluzioni della disuguaglianza $t^2 - 2t - 2 \leq 0$ sono limitate, deduciamo che per i punti di A la variabile z è limitata. Essendo poi $x^2 + y^2 = z^2$, ne deduciamo che anche x e y sono limitate. Quindi A è limitato, ed essendo chiuso, anche compatto. pertanto la funzione $f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2$, cioè il quadrato della distanza dall'origine, ammette sia un punto di minimo che un punto di massimo su A.
c) Il vincolo che definisce A non è degenere: infatti la derivata della funzione Φ è
$$D\Phi(x, y, z,) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & -2z \end{pmatrix}$$
ed ha rango minore di 2 se e solo se tutti i minori si annullano, cioè per
$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -4xz + 2z = 0 \\ -4yz + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{che ha soluzioni} \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad x = y = \frac{1}{2} \ ,$$
ed è facile vedere che nessuna di queste soluzioni appartiene ad A.
Siccome il vincolo che definisce A è non degenere e la funzione f è di classe C^1, i punti di minimo e massimo sono tutti ottenibili tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Cerchiamo dunque i punti critici della funzione ausiliaria
$$F(x, y, z, \lambda, \mu) := x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 - z^2 - 1) - \mu(x + y - z^2) \ .$$
La condizione $DF = 0$ equivale al sistema
$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 2y - 2\lambda y - \mu = 0 \\ 2z + 2\lambda z + 2\mu z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + y - z^2 = 0 \end{cases}$$
e con un po' di lavoro si trova che le soluzioni sono
$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \pm\sqrt{1+\sqrt{3}} \right) \quad \text{e} \quad \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \mp\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \ .$$
Per la prima coppia di punti il valore di f è $3 + 2\sqrt{3}$ mentre per la seconda è 1. Dunque i primi due punti sono quelli che massimizzano la distanza dall'origine, mentre i secondi due sono quelli che la minimizzano.

4. Indichiamo con m la masse, con $m\omega^2$ la costante elastica delle molle, con d_0 la loro lunghezza a riposo e con $3d$ la distanza tra gli estremi fissi delle molle. La posizione di equilibrio del sistema è chiaramente quella in cui le lunghezze delle tre molle sono uguali a d. Indichiamo quindi con x_1 ed x_2 lo spostamento delle due masse dalle rispettive posizione di equilibrio (vedi figura). Queste sono le variabili più convenienti per descrivere il sistema.



La forze esercitata dalla molla di sinistra sulla massa di sinistra è pari a $-m\omega^2(d+x_1-d_0)$ mentre quella esercitata dalla molla centrale è $m\omega^2(d+x_2-x_1-d_0)$. La risultante è $-m\omega^2(2x_1-x_2)$ (notare che non dipende da d_0). Analogamente, la forza applicata alla massa di destra è $-m\omega^2(2x_2-x_1)$, e le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2(2x_1 - x_2) \ , \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2(2x_2 - x_1) \ . \end{cases} \tag{5}$$

c) Possiamo cercare le soluzioni di (5) in due classi particolari: quelle della forma $x_2 = x_1$ (per cui la distanza tra le masse resta costante) e quelle della forma $x_2 = -x_1$ (per cui il baricentro resta fermo). Nel primo caso il sistema (5) si riduce all'equazione

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$$

e le corrispondenti soluzioni sono della forma

$$(x_1, x_2) = a_1(\cos(\omega t), \cos(\omega t)) + a_2(\sin(\omega t), \sin(\omega t)) \quad \text{con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Nel secondo caso il sistema (5) si riduce a

$$\ddot{x}_1 = -3\omega^2 x_1$$

e le corrispondenti soluzioni sono

$$(x_1, x_2) = a_3(\cos(\sqrt{3}\omega t), -\cos(\sqrt{3}\omega t)) + a_4(\sin(\sqrt{3}\omega t), -\sin(\sqrt{3}\omega t)) \quad \text{con } a_3, a_4 \in \mathbb{R}.$$

Sommando soluzioni di un tipo e dell'altro otteniamo una famiglia di soluzioni di (5) di dimensione 4, ottenendo quindi *tutte* le soluzioni di (5). In particolare abbiamo risposto anche al punto b).

Commenti

- Prima parte, esercizio 3. Molti hanno risolto l'esercizio dimenticando di imporre la condizione che i punti appartenessero a C. Per esempio, i punti in cui si annulla il gradiente di f – ed in cui quindi non si può applicare il teorema della funzione implicita – sono $(0,0)$ e $(0,\pm 2)$, ma gli ultimi due punti non appartengono a C. Analogamente, i punti in cui si annulla la derivata parziale di f rispetto a y – ed in cui non si può applicare il teorema della funzione implicita per esplicitare y in funzione di x – sono una curva, che però interseca C solo in tre punti.

- Prima parte, esercizio 6. Molti hanno risolto correttamente la prima parte dell'esercizio, senza però accorgersi che la funzione f che definisce il sistema di equazioni non ha crescita lineare all'infinito, e quindi non si può applicare il teorema di esistenza globale.

- Seconda parte, esercizio 1b). Molti hanno motivato il fatto che la soluzione non può tendere a $+\infty$ in tempo finito usando la stima $|\log y + x^2| \leq |y| + x^2$ ed applicando quindi una delle varie versioni del teorema di esistenza globale. Il problema è che la stima vale solo per $y > 1$ e la funzione $\log y + x^2$ non è definita su tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, e quindi non sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza globale. (È anche chiaro che, essendo $y \geq 1$, questo problema può essere corretto, ma bisognerebbe aver spiegato come).

- Seconda parte, esercizio 1e). Se esistesse il limite di $\dot{y}$ per $x \to -\infty$, questo dovrebbe essere 0 perché y tende ad un limite finito, e quindi $\log y + x^2 = \log(y \exp(x^2))$ tende a 0. Da questo si deduce che $y \exp(x^2)$ tende a 1, ovvero $y \sim \exp(-x^2)$. Questa dimostrazione non è però completa se non si dimostra che il limite di $\dot{y}$ esiste (io non ci sono riuscito).

- Seconda parte, esercizio 3c). Nell'applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, molti hanno dimenticato di verificare che il vincolo che definisce l'insieme A non è mai degenere. Non si esclude quindi la possibilità che nei punti di massimo e minimo il vincolo sia degenere, e che pertanto questi punti non rientrino tra la soluzioni del sistema di equazioni dato dal metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

- Seconda parte, esercizio 3. C'è una soluzione più semplice basata sulla seguente osservazione: per ogni punto in A si ha $x^2+y^2 = z^2+1$, e dunque la funzione da minimizzare $f = x^2+y^2+z^2$ si riduce a $2z^2 + 1$. Si tratta dunque di capire per quali z esistono punti in A la cui terza coordinata vale z, ovvero per quali z il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 + 1 \\ x + y = z^2 \end{cases} \tag{6}$$

  ammette almeno una soluzione. Sostituendo $y = z^2 - x$ nella prima equazione otteniamo l'equazione di secondo grado in x

$$2x^2 - 2z^2x + z^4 - z^2 - 1 = 0$$

  che ammette soluzioni reali se e solo se il discriminante è positivo, ovvero $z^4 - 2z^2 - 2 \leq 0$, ovvero $z^2 \leq 1+\sqrt{3}$. Quindi la funzione $f = 2z^2+1$ assume valore minimo per $z^2 = 0$ e valore massimo per $z^2 = 1 + \sqrt{3}$. Risolvendo infine il sistema (6) per $z = 0$ e per $z = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}$ si ottengono le rimanenti coordinate dei punti di minima e massima distanza dall'origine. Si noti che in questo modo non c'è bisogno di dimostrare a priori l'esistenza di massimi e minimi.

- Seconda parte, esercizio 4b). Una soluzione diretta è la seguente: scriviamo il sistema (5) nella forma $\ddot{x} = Mx$ con M la matrice simmetrica

$$M := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

  Con un po' di conti si vede che gli autovalori di M sono -1 e 3, con autovettori rispettivamente $(1, 1)$ e $(1, -1)$. Per quanto già visto altrove, la soluzione generale del sistema è

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \big[a_1 \cos(\omega t) + a_2 \sin(\omega t)\big] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \big[a_3 \cos(\sqrt{3}\omega t) + a_4 \sin(\sqrt{3}\omega t)\big] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

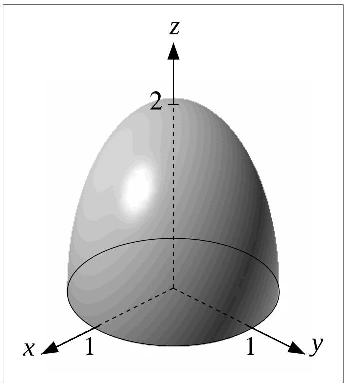
  con $a_1, \ldots, a_4 \in \mathbb{R}$.

SECONDO COMPITINO, 27 MAGGIO 2004

PRIMA PARTE

1. a) Lineare non omogeneo, $d = 4$; b) non lineare; c) lineare omogeneo, $d = 3$.
2. $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ -\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$.
3. F è il gradiente di $f(x,y,z) := xyz + x^2y + y^2z + z^2x + a$.
4. $(x(t), y(t)) := \left(\frac{5}{3}\cos t, \frac{5}{4}\sin t\right)$ con $0 \le t \le \pi$.
5. La matrice $D\phi(t,u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2u \\ 2t & 2u \end{pmatrix}$ ha rango inferiore a 2 solo nel punto $(a/2, a/2)$.
   Questo punto non appartiene al quadrato $(0,1)^2$ se e solo se $a \le 0$ oppure $a \ge 2$.
6. La divergenza di F è $\nabla \cdot F = 3$, ed il flusso di F uscente da C è uguale a 3. Il rotore di F è $\nabla \times F = 0$, ed infatti F è il gradiente della funzione $x^2 + y^2 + z^2 + xyz$.
7. La derivata di $\left(x^2 + (y-z)^2, y^2 + (z-x)^2\right)$ nel punto $(1,2,2)$ è la matrice $2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   Lo spazio tangente ad L in $(1,2,2)$ è quindi dato dalle soluzioni del sistema
   $$\begin{cases} x = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$
   come ed esempio il vettore $(0,1,-2)$.
8. Si cerca u della forma $u = a(t)\cos x + b(t)\sin x$. L'equazione si riduce a $\ddot{a} + a = 0$ e $\ddot{b} + b = 0$, ed i dati iniziali a $a(0) = 1$, $\dot{a}(0) = 0$ e $b(0) = 0$, $\dot{b}(0) = 1$. Pertanto $a = \sin t$ e $b = \cos t$, ovvero $u(t,x) = \cos t \cos x + \sin t \sin x = \cos(x - t)$.

SECONDA PARTE



1. Indichiamo con S' il disco definito da $z = 0$ e $x^2 + y^2 \le 1$, orientato dal vettore normale $(0,0,-1)$, e con A l'insieme aperto definito da
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \ , \\ 0 < z < 2\sqrt{1 - x^2 - y^2} \ . \end{cases}$$
   Allora l'unione di S e S' è uguale alla frontiera di A, e le orientazioni prescritte per queste due superfici coincidono con la normale esterna di ∂A; inoltre l'intersezione delle due superfici ha area nulla (si tratta di un cerchio).
   Applicando il teorema della divergenza otteniamo
   $$\int_S F \cdot \eta_S + \int_{S'} F \cdot \eta_{S'} = \int_{\partial A} F \cdot \eta_{\partial A} = \int_A \nabla \cdot F \ .$$
   Quindi, tenendo conto del fatto che $F \cdot \eta_{S'} = (x,y,1) \cdot (0,0,-1) = -1$ su S', ed indicando con D il cerchio $\{(x,y) : \ x^2 + y^2 \le 1\}$,
   $$\int_S F \cdot \eta_S = -\int_{S'} F \cdot \eta_{S'} + \int_A \nabla \cdot F$$

$$
\begin{aligned}
&= \text{Area}(S') + \int_A 2z\,dx\,dy\,dz \\
&= \pi + \int_D \left(\int_0^{2\sqrt{1-x^2-y^2}} 2z\,dz \right) dx\,dy \\
&= \pi + \int_D 4(1-x^2-y^2)dx\,dy \\
&= \pi + \int_0^1 4(1-\rho^2)\,2\pi\rho\,d\rho = 3\pi\ .
\end{aligned}
$$

2. a) Il campo $F = (F_x, F_y)$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ meno l'origine, è di classe C^∞ e soddisfa la condizione $D_y F_x = D_x F_y$. Siccome il semipiano A è semplicemente connesso (anzi, è convesso), F deve ammettere un potenziale V su tutto A. In particolare $D_x V = F_x$, e quindi
$$V(x,y) = \int F_x(x,y)\,dx = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = -\arctan(x/y) + a(y)\ ,$$
con $a(y)$ funzione incognita. Per determinare $a(y)$ sostituiamo la formula così ottenuta nell'equazione $D_y V = F_y$, ed otteniamo
$$D_y V = \frac{x}{x^2+y^2} + \dot{a}(y) = \frac{(x+1)(x+y^2)}{(x^2+y^2)(1+y^2)}$$
ovvero
$$\dot{a}(y) = \frac{(x+1)(x+y^2)}{(x^2+y^2)(1+y^2)} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+y^2}\ ,$$
da cui segue $a(y) = \arctan y + c$ con c costante arbitraria. Quindi
$$V(x,y) = -\arctan(y/x) + \arctan(y) + c\ .$$
b) Calcolare direttamente l'integrale di F su γ sembra a prima vista complicato. Siccome F soddisfa $D_y F_x = D_x F_y$ su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'integrale di F su γ è uguale a quello su ogni altro cammino $\tilde{\gamma}$ omotopo a γ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e basta quindi trovarne uno per cui il calcolo dell'integrale risulti facile. Ad esempio la frontiera del quadrato $[-1,1]^2$ (orientata in senso antiorario), ed infatti sul lato verticale $\{1\} \times [-1,1]$ si ha $F \cdot \tau_{\tilde{\gamma}} = 2/(1+y^2)$ che ha integrale π, su $\{-1\} \times [-1,1]$ si ha $F \cdot \tau_{\tilde{\gamma}} = 0$, e su entrambi i lati orizzontali $[-1,1] \times \{\pm 1\}$ si ha $F \cdot \tau_{\tilde{\gamma}} = 1/(x^2+1)$ che ha integrale $\pi/2$. In conclusione
$$\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} F \cdot \tau_{\tilde{\gamma}} = 2\pi\ .$$

3. a) La condizione $|c_k| = o(|k|^{-n})$ implica $|k|^{n-2}|c_k| = o(|k|^{-2})$, e quindi
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k|^{n-2}|c_k| < +\infty$$
per confronto con la serie $\sum 1/k^2$. Dunque la serie di funzioni $\sum c_k e^{ikx}$ converge totalmente con tutte le derivate fino a quella di ordine $n-2$, ed in particolare definisce una funzione di classe C^{n-2} che deve coincidere con f perché ha gli stessi coefficienti di Fourier. Quindi f è di classe C^{n-2}, e questo vale per ogni n intero positivo.

b) Il viceversa vale: se f è di classe C^∞, allora la sua derivata n-esima è una funzione continua i cui coefficienti di Fourier sono uguali a $(ik)^n c_k$ (come si è visto a lezione, basta integrare per parti n volte la formula per i coefficienti di $D^n f$). Si ha allora che

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |(ik)^n c_k|^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (|k|^n |c_k|)^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |D^n f|^2 \, dx < +\infty$$

da cui si deduce che $|k|^n |c_k|$ deve essere infinitesimo per $k \to \pm\infty$, ovvero $|c_k| = o(|k|^{-n})$.

4. a) Fissiamo $x \notin C$. Per definizione, la distanza di x da C è l'estremo inferiore di $f(y) := |x-y|$ per $y \in C$. Siccome f è continua e C è compatto, f ammette almeno un punto di minimo $y \in C$. Per via della minimalità di y, il segmento che congiunge x ad y (si osservi che $x \neq y$ perché $x \notin C$) interseca C solo nel punto y, e dunque risulta essere un punto di accumulazione del complementare di C, e quindi $y \in \partial C$. Il punto y è anche punto di minimo della funzione f^2 su ∂C, e quindi il gradiente di f^2 in y, vale a dire $2(y-x)$, deve essere ortogonale al piano tangente ad C in y.
b) È chiaro che ogni punto del tipo $x = y + s\,\eta(y)$ con $y \in \partial C$ e $0 \leq s \leq d$ dista al più d da C, e quindi appartiene a C_d. Viceversa, dato $x \notin C$, prendendo y come nel punto a) si ha $x - y = s\,\eta(y)$ con $s := |y-x| = \mathrm{dist}(x, C)$. In particolare, se $\mathrm{dist}(x,C) \leq d$ allora $x = y + s\,\eta(y)$ con $0 < s \leq d$.
c) Ovviamente, ci basta far vedere che $\mathrm{Area}(C_d \setminus C)$ è un polinomio di secondo grado in d. Prendiamo $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrizzazione regolare antioraria di ∂C; allora la normale esterna a ∂C nel punto $\gamma(t)$ è data da

$$\eta(t) = \frac{1}{|\dot\gamma|}(\dot\gamma_2, -\dot\gamma_1) \ ,$$

e per quanto visto al punto b) possiamo parametrizzare l'insieme $C_d \setminus C$ utilizzando l'applicazione $\phi : (0,d] \times [a,b] \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\phi(s,t) := \gamma(t) + s\,\eta(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1 + s\dot\gamma_2 |\dot\gamma|^{-1} \\ \gamma_2 - s\dot\gamma_1 |\dot\gamma|^{-1} \end{pmatrix} \ .$$

Tenendo conto del fatto che $D(|\dot\gamma|^{-1}) = -|\dot\gamma|^{-3}(\dot\gamma_1\ddot\gamma_1 + \dot\gamma_2\ddot\gamma_2)$ si ottiene

$$D\phi(s,t) = \begin{pmatrix} \dot\gamma_2 |\dot\gamma|^{-1} & \dot\gamma_1\big(1 + s|\dot\gamma|^{-3}(\dot\gamma_1\ddot\gamma_2 - \dot\gamma_2\ddot\gamma_1)\big) \\ -\dot\gamma_1 |\dot\gamma|^{-1} & \dot\gamma_2\big(1 + s|\dot\gamma|^{-3}(\dot\gamma_1\ddot\gamma_2 - \dot\gamma_2\ddot\gamma_1)\big) \end{pmatrix}$$

e dunque $\det(D\phi(s,t)) = |\dot\gamma| + s|\dot\gamma|^{-2}(\dot\gamma_1\ddot\gamma_2 - \dot\gamma_2\ddot\gamma_1)$. Quindi

$$\begin{aligned} \mathrm{Area}(C_d \setminus C) &= \int_0^d \int_a^b \det(D\phi(s,t)) \, ds\, dt \\ &= d\int_a^b |\dot\gamma| \, dt + \frac{d^2}{2}\int_a^b \frac{\dot\gamma_1\ddot\gamma_2 - \dot\gamma_2\ddot\gamma_1}{\dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2} \, dt \\ &= d\,\mathrm{Lungh}(\partial C) + \frac{d^2}{2}\int_a^b \frac{\dot\gamma_1\ddot\gamma_2 - \dot\gamma_2\ddot\gamma_1}{\dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2} \, dt \end{aligned}$$

che è appunto un polinomio di secondo grado in d.
Affinché quest'ultima formula sia valida dobbiamo però assumere che $\det(D\phi)$ sia positivo su $[0,d] \times [a,b]$ e che ϕ mappi $(0,d] \times [a,b)$ bigettivamente in $C_d \setminus C$, e quando C non è convesso entrambe le condizioni valgono solo per d sufficientemente piccolo. Infatti $\det(D\phi)$

è strettamente positivo per $s = 0$ e $t \in [a, b]$, ed un semplice argomento di compattezza mostra che lo stesso vale per $s \in [0, d_0]$ e $t \in [a, b]$ a patto di prendere d_0 sufficientemente piccolo. Ne consegue anche che ϕ è localmente iniettiva in $[0, d] \times [a, b]$. Dato il punto b), per concludere ci servirebbe dimostrare che ϕ è globalmente iniettiva $(0, d] \times [a, b)$, e anche questo può essere fatto con un argomento di compattezza che pure omettiamo.
d) Sia $P(d) = a+bd+cd^2$. Chiaramente $a = \mathrm{Area}(C)$ e tenendo conto della formula ricavata al punto c), $b = \mathrm{Lungh}(\partial C)$ e

$$c = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\dot\gamma_1\ddot\gamma_2 - \dot\gamma_2\ddot\gamma_1}{\dot\gamma_1^2 + \dot\gamma_2^2}\, dt \ .$$

Indicando con $\tilde\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ il cammino dato da $\tilde\gamma(t) := \dot\gamma(t)$, possiamo riscrivere c come l'integrale su $\tilde\gamma$ di un campo di vettori, e più precisamente

$$c = \int_{\tilde\gamma} F \cdot \tilde\tau \quad \text{con} \quad F(x_1, x_2) := \frac{1}{2}\frac{(-x_2, x_1)}{x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Notare che siccome γ è una parametrizzazione regolare, si ha $\dot\gamma \neq 0$, ovvero $\tilde\gamma$ non passa per l'origine. Inoltre, siccome ∂C è una curva chiusa regolare, possiamo supporre che $\dot\gamma(a) = \dot\gamma(b)$, e quindi $\tilde\gamma$ è un cammino chiuso. Pur non ammettendo potenziale, il campo F soddisfa la condizione delle derivate incrociate su tutto il piano meno l'origine, e quindi l'integrale di F su un qualunque cammino chiuso $\tilde\gamma$ è pari all'indice di avvolgimento di $\tilde\gamma$ attorno all'origine moltiplicato per l'integrale di F lungo il cerchio di centro l'origine e raggio 1 percorso in senso antiorario, vale a dire π. Quindi c è un multiplo di π. In effetti risulta che l'indice di avvolgimento di $\tilde\gamma$ attorno all'origine deve essere 1, e quindi $c = \pi$; non sono però riuscito a trovare alcuna dimostrazione elementare di questo fatto.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 1. Una soluzione alternativa consiste nel parametrizzare S e calcolare direttamente il flusso di F. Una parametrizzazione di S la si ottiene modificando opportunamente le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \cos\theta\, \cos\gamma \\ y = \sin\theta\, \cos\gamma \\ z = 2\sin\gamma \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq \gamma \leq \pi/2.$$

  Si verifica che la parametrizzazione è iniettiva e regolare all'interno del rettangolo $R := [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$, e che l'orientazione indotta su S è quella giusta. Il prodotto vettoriale fondamentale è

$$(2\cos\theta\, \cos^2\gamma, 2\sin\theta\, \cos^2\gamma, \sin\gamma\cos\gamma) \ ,$$

  ed il suo prodotto scalare per F è pari a $2\cos^2\gamma + \cos\gamma\sin\gamma(2\sin\gamma - 1)^2$. L'integrale di quest'ultima quantità su R è 3π.

- Seconda parte, esercizio 2b). Questo esercizio risulta molto più semplice se ci si accorge che

$$F(x, y) = \Big(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\Big) + \Big(0, \frac{1}{1 + y^2}\Big) \ .$$

  Infatti l'integrale del primo campo sul γ si calcola facilmente, mentre il secondo campo ammette chiaramente un potenziale, e quindi il suo integrale su ogni cammino chiuso è nullo. La decomposizione sopra è in effetti suggerita dallo svolgimento della prima parte dell'esercizio.

Prima parte

1. Aggiungendo la variabile $z := \dot{y}$ si ottiene il sistema del primo ordine

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,z) \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = g(x,y,z) \end{cases}$$

che è lineare omogeneo se e solo se f e g sono funzioni lineari (omogenee).

2. Calcoliamo prima l'esponenziale di $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -2I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, ottenendo

$$e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} .$$

L'esponenziale cercato è

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos t & e^{-2t}\sin t & 0 \\ -e^{-2t}\sin t & e^{-2t}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} .$$

3. $F = \nabla V$ con $V(x,y,z) := \log(1+x^2+y^2) - \log(1+y^2)$.

4. $(1,-1,2)\times(-3,1,4) = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (-6,-10,-2)$.

5. $$\begin{cases} x_1(a_1 - 2\lambda x_1^2) = 0 \\ \quad\vdots \\ x_n(a_n - 2\lambda x_n^2) = 0 \\ x_1^4 + \cdots + x_n^4 = 1 \end{cases} .$$

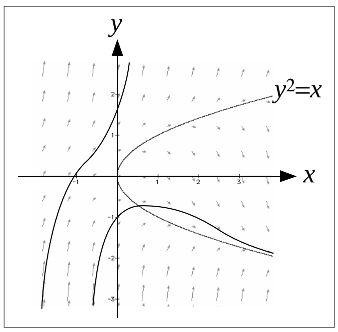
6. a) Chiuso ma non limitato; b) limitato ma non chiuso; c) chiuso ma non limitato.

7. Cerchiamo una soluzione u della forma $u(t,x) = a(t)\cos x + b(t)\sin(2x)$. L'equazione si riduce allora a $\dot{a} = 0$ con dato iniziale $a(0) = 1$ e $\dot{b} = -3b$ con dato iniziale $b(0) = 2$. Pertanto

$$u(t,x) = \cos x + 2e^{-3t}\sin(2x) .$$

8. Ad esempio $(x,y) \mapsto (e^x\cos y, e^x \sin y)$.

Seconda parte



1. La funzione $f(x,y) := y^2 - x$ è di classe C^∞ in tutto il piano. Preso dunque $a \in \mathbb{R}$, la soluzione y_a è unica. Inoltre, se l'estremo inferiore m del suo insieme di definizione I_a è finito, allora $y_a(x)$ tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$ quando x tende a m. Analogo discorso vale per l'estremo superiore. Disegnando le zone di monotonia dell'equazione è possibile farsi un'idea precisa del comportamento qualitativo delle

soluzioni (vedi figura). Le dimostrazioni rigorose si ottengono invece applicando il teorema del confronto.
a) Tutte le soluzioni tendono a $-\infty$ in un tempo finito. Per dimostrarlo, osserviamo che $y^2 - x \geq y^2 + 1$ per $x \leq -1$, e quindi tutte le soluzioni dell'equazione

$$\dot{y} = y^2 + 1 \tag{1}$$

sono *sottosoluzioni* dell'equazione $\dot{y} = y^2 - x$ per $x \leq -1$. Ne consegue che ciascuna y_a è *maggiorata* per $x \leq -1$ dalla soluzione di (1) che soddisfa la condizione iniziale $y(-1) = y_a(-1)$. D'altra parte le soluzioni di (1) sono tutte della forma $y(x) = \arctan(x + b)$ con $b \in \mathbb{R}$, e tendono a $-\infty$ in tempo finito.
b) Si vede subito che la funzione $y = \sqrt{x}$ è una soprasoluzione dell'equazione per $x \geq 0$. Ne consegue che, per a negativo, $y_a(x) \leq \sqrt{x}$ per ogni $x > 0$, e dunque y_a non può tendere a $+\infty$ in tempo finito. Resta da escludere che y_a tenda a $-\infty$ in tempo finito. Se per assurdo così fosse, avremmo che al contempo $\dot{y}$ deve tendere a $+\infty$; in particolare y sarebbe definitivamente crescente, che è una contraddizione.
c) Cerchiamo una sottosoluzione y che converge a $+\infty$ in tempo finito; se la troviamo, ogni y_a con $a \geq y(0)$ è minorata da y e quindi deve anch'essa convergere a $+\infty$ in tempo finito. Proviamo a prendere y del tipo

$$y(x) := \frac{2}{b - x} \quad \text{con } b > 0$$

(non è una scelta a caso: si tratta delle soluzioni dell'equazione $\dot{y} = y^2/2$, e sono quindi sottosoluzioni nell'insieme degli x per cui $y^2 - x \geq y^2/2$). Si vede che y è definita in $(-\infty, b)$, tende a $+\infty$ per $x \to b^-$, ed è sottosoluzione dell'equazione $\dot{y} = y^2 - x$ in $[0, b)$ se e solo se

$$\frac{2}{(b-x)^2} \leq \frac{4}{(b-x)^2} - x \quad \text{per } 0 \leq x < b,$$

ovvero se e solo se $x(b - x)^2 \leq 2$ per $0 \leq x < b$. Quest'ultima condizione è facilmente verificata per $b = 1$, e quindi $y := 2/(1-x)$ è una sottosoluzione dell'equazione per $0 \leq x < 1$, e tende a $+\infty$ per $x \to 1^-$. Per quanto detto sopra, ne consegue che $\sup I_a \leq 1$ per ogni $a \geq y(0) = 2$.

2. a) Siccome $F = (F_x, F_y)$ soddisfa la condizione $D_y F_x = D_x F_y$ su tutto l'insieme di definizione, in particolare deve ammettere un potenziale V *almeno* nel semipiano aperto $y > 0$ (che contiene la curva γ). Per trovare V, si procede come al solito, integrando in x l'equazione $D_x V = F_x$

$$V(x, y) = \int \frac{y^2}{x^2 + y^4}\, dx = \arctan(x/y^2) + a(y) \ ,$$

e sostituendo questa formula nell'equazione $F_y = D_y V$ per determinare $a(y)$:

$$\frac{-2xy}{x^2 + y^4} = \frac{-2xy}{x^2 + y^4} + \dot{a}(y) \ .$$

Dunque $\dot{a}(y) = 0$, ovvero a può essere qualunque costante. Per $a = 0$ abbiamo

$$V(x, y) = \arctan(x/y^2) \ . \tag{2}$$

Siccome γ è contenuto nel semipiano $y > 0$, possiamo usare V per calcolare l'integrale di F lungo γ:

$$\int_\gamma F \cdot \tau_\gamma = V(0, 2) - V(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -\arctan(\sqrt{2}/2) \ .$$

b) Il campo F ammette un potenziale V su tutto $\mathbb{R}^2$ meno l'origine. Questo lo si dimostra verificando che l'integrale di F sulla frontiera del quadrato $[-1,1]^2$ è nullo. A questo punto possiamo calcolare l'integrale di F sul cammino γ utilizzando il potenziale V, ed il fatto che, a meno di costanti, V coincide sul semipiano $y>0$ con l'espressione data in (2):

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\cdot\tau_\gamma &= \lim_{x\to+\infty} V(x,x^2-1) - \lim_{x\to-\infty} V(x,x^2-1)\\ &= \lim_{x\to+\infty}\arctan\left(\frac{x}{(x^2-1)^2}\right) - \lim_{x\to-\infty}\arctan\left(\frac{x}{(x^2-1)^2}\right) = 0\end{aligned}$$

3. Sia X lo spazio vettoriale della metrici $n\times n$, e sia Y il sottospazio delle matrici *simmetriche*. Allora $O(n)$ è il sottoinsieme delle $x\in X$ che soddisfano l'equazione $\phi(x)=0$, con $\phi: X\to Y$ data da
$$\phi(x) := x^t x\ ,$$
dove x^t denota la trasposta di x. Siccome X ha dimensione n^2 e Y ha dimensione $n(n+1)/2$, se possiamo applicare le ipotesi del teorema della funzione implicita alla funzione ϕ otterremo che $O(n)$ è un'insieme regolare di dimensione $n^2-n(n+1)/2 = n(n-1)/2$.
Vogliamo ora calcolare la derivata di ϕ in x, vedendola però non come matrice ma come applicazione lineare da X a Y. Per farlo, determiniamo lo sviluppo di Taylor di ϕ in x all'ordine 1:
$$\begin{aligned}\phi(x+y) = (x+y)^t(x+y) &= x^tx + x^ty + y^tx + y^ty\\ &= x^tx + x^ty + y^tx + O(|y|^2)\end{aligned}$$
ed essendo $x^tx=\phi(x)$, ne deduciamo che l'applicazione lineare $y\mapsto x^ty+y^tx$ deve essere la derivata di ϕ in x. Osserviamo ora che il kernel di $D\phi(x)$ è il sottospazio delle matrici y tali che $x^ty+y^tx=0$, ovvero tali che x^ty è *antisimmetrica*. Se x è invertibile, ed in particolare se $x\in O(n)$, questo sottospazio è isomorfo al sottospazio delle matrici antisimmetriche, ed ha quindi la stessa dimensione, $n(n-1)/2$. Ne segue che $D\phi(x)$ ha rango $n(n+1)/2$, che è il massimo possibile per le applicazioni lineari da X in Y. Abbiamo quindi dimostrato che le ipotesi del teorema della funzione implicita sono verificate per ogni $x\in O(n)$; pertanto $O(n)$ è un insieme regolare di dimensione $n(n-1)/2$. Per quanto visto, inoltre,
$$\mathrm{Tan}(O(n),x) = \big\{y\in X:\ x^ty \text{ è antisimmetrica}\big\}$$

4. c) Siano X, Y spazi metrici, e sia $f: X\to Y$ una funzione continua. Allora il grafico f, che indichiamo con Γ_f, è chiuso in $X\times Y$. Presa infatti una successione di punti $(x_n,y_n)\in\Gamma_f$ che converge a $(x,y)\in X\times Y$, si ha necessariamente che $x_n\to x$ e $f(x_n)=y_n\to y$. Per via della continuità di f si ha anche $f(x)=y$ e quindi (x,y) appartiene a Γ_f.
d) Se X è uno spazio metrico, Y uno spazio metrico compatto, ed $f:X\to Y$ una funzione con grafico chiuso, allora f è continua. Preso $x\in X$ ed una successione (x_n) che converge ad x, dobbiamo far vedere che $f(x_n)$ converge ad $f(x)$. Supponiamo per assurdo che così non sia. Allora esiste $\varepsilon>0$ ed una sottosuccessione (x_{n_k}) tale che $f(x_{n_k})$ è contenuto nell'insieme chiuso $Y\setminus B_\varepsilon(f(x))$. Siccome quest'insieme è anche compatto, esiste un'ulteriore sottosuccessione (x_{n_h}) tale che $f(x_{n_h})$ converge a qualche $y\in Y\setminus B_\varepsilon(f(x))$, ed in particolare $y\neq f(x)$. D'altra parte (x,y) è il limite di $(x_{n_h}, f(x_{n_h}))\in\Gamma_g$ e quindi deve appartenere a Γ_f perché questo è chiuso, ovvero $y=f(x)$, che è una contraddizione.
Il punto a) segue come caso particolare di c) e d).
b) Sia $X=Y=\mathbb{R}$. La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da
$$f(x) := \begin{cases} 1/x & \text{per } x\neq 0,\\ 0 & \text{per } x=0,\end{cases}$$
ha grafico chiuso ma non è continua.

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2. Il fatto che F ammette potenziale su tutto $\mathbb{R}^2$ meno l'origine può essere verificato in modo più diretto: per quanto visto al punto a), la funzione $V(x,y)$ in (1) risulta essere un potenziale di F nel complementare della retta $y = 0$, dove non è definito. Osserviamo che V si estende per continuità a tutti i punti di questa retta tranne l'origine ponendo
$$V(x,y) := \begin{cases} \arctan(x/y^2) & \text{per } y \neq 0, \\ +\pi/2 & \text{per } y = 0,\ x > 0, \\ -\pi/2 & \text{per } y = 0,\ x < 0. \end{cases}$$
Si può inoltre verificare che la funzione così definita risulta anche essere di classe C^1. Ricordando infatti l'identità $\arctan t + \arctan(1/t) = \pi/2$, valida per $t > 0$, si ottiene $V(x,y) = \pi/2 - \arctan(y^2/x)$ per $x > 0$, che è chiaramente una funzione di classe C^1 (il caso $x < 0$ si tratta in modo analogo). Siccome $\nabla V = F$ nel complementare della retta $y = 0$, per continuità lo stesso deve valere in tutto il piano (eccetto, ovviamente, l'origine).

- Seconda parte, esercizio 3. È possibile dare una dimostrazione più vicina al linguaggio usato nel corso. Indichiamo con $n \times n$ l'insieme delle coppie di indici interi ij con $1 \leq i, j \leq n$, e con E il sottoinsieme delle coppie ij con $1 \leq i \leq j \leq n$. Al solito, assegniamo al simbolo δ_{ij} valore 1 quando $i = j$ e 0 altrimenti. $O(n)$ è allora il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n\times n}$ definito dalle equazioni
$$\sum_{m=1}^{n} x_{im}x_{jm} = \delta_{ij} \quad \text{per ogni } ij \in E,$$
ovvero è il luogo di zeri della funzione $\phi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^E$ data da
$$\phi_{ij}(x) := \sum_{m=1}^{n} x_{im}x_{jm} - \delta_{ij} \quad \text{per ogni } ij \in E.$$
Un semplice conto mostra che la derivata di ϕ_{ij} rispetto alla variabile x_{hk} nel punto x è
$$\frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_{hk}}(x) = \delta_{hi}x_{jk} + \delta_{hj}x_{ik} \ .$$
Per dimostrare che la derivata di ϕ in x, come matrice di $n(n+1)/2$ righe e n^2 colonne, ha rango massimo e cioè $n(n+1)/2$, facciamo vedere che il suo kernel ha dimensione $n(n-1)/2$. Tale kernel è l'insieme delle matrici y tali che
$$0 = \sum_{hk} \frac{\partial \phi_{ij}}{\partial x_{hk}}(x)\, y_{hk} \quad \text{per ogni } ij \in E,$$
ovvero
$$0 = \sum_{kh} \delta_{hi}x_{jk}y_{hk} + \delta_{hj}x_{ik}y_{hk} = \sum_{k} x_{jk}y_{ik} + \sum_{h} x_{ik}y_{jk} = (x\,y^t)_{ji} + (x\,y^t)_{ij}$$
dove $x\,y^t$ è il prodotto di x per la trasposta di y. In altre parole, si tratta delle matrici y tali che xy^t, o equivalentemente $x^t y$, è antisimmetrica.

- Seconda parte, esercizio 4c). Per dimostrare che il grafico di una funzione continua $f : X \to Y$ è chiuso, si può anche osservare che $\Gamma_f = g^{-1}(0)$, dove $g : X \times Y \to \mathbb{R}$ è la funzione continua data da $g(x,y) := d_Y(f(x),y)$.

- Seconda parte, esercizio 4c). La compattezza di Y è necessaria o quasi: se infatti Y è connesso ma non compatto ed X ammette almeno un punto non isolato x_0, si può sempre costruire una funzione $f : X \to Y$ con grafico chiuso discontinua in x_0.

Scritto del II appello, 5 luglio 2004

Prima parte

1. La prima equazione ci dice che $y = -\dot{x}$, e sostituendo nella seconda equazione e nei dati iniziali otteniamo l'equazione del secondo ordine $\ddot{x} - \dot{x} - 2x = 0$ con dati iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = -3$. La soluzione di quest'ultima è $x = e^{-t} - e^{2t}$, e quindi $y = e^{-t} + 2e^{2t}$.

2. a) No, e si tratta di un esempio ben noto. b) Si. c) No, il dato iniziale non è completo.

3. $\nabla \cdot F = 2(x + y + z)$; $\nabla \times F = 2(z, x, y)$.

4. Massimo e minimo devono esistere perché S è compatto e f è continua. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x = 0 \\ 1 - 4\lambda y = 0 \\ 1 - 4\lambda z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = 1/\lambda \\ y = 1/(4\lambda) \\ z = 1/(4\lambda) \\ 5/(4\lambda^2) = 2 \end{cases}$$

a cui corrispondono i punti critici $\frac{1}{\sqrt{10}}(4, 1, 1)$ e $\frac{-1}{\sqrt{10}}(4, 1, 1)$, risp. massimo e minimo.

5. Il campo soddisfa la condizione delle derivate incrociate, e quindi ammette un potenziale V. Integrando l'equazione $D_x V = F_x$ otteniamo

$$V(x, y, z) = \int y + 2z \, dx = xy + 2xz + a(y, z) \ .$$

Sostituendo nell'equazione $D_y V = F_y$ otteniamo $D_y a(y, z) = e^y z$, e quindi

$$a(y, z) = \int e^y z \, dy = e^y z + b(z) \ ,$$

da cui segue $V(x, y, z) = xy + 2xz + e^y z + b(z)$. Sostituendo infine nell'equazione $D_z V = F_z$ otteniamo $D_z b(z) = 5z^4$, ovvero $b(z) = z^5 + c$ con $c \in \mathbb{R}$. Quindi

$$V(x, y, z) = xy + 2xz + e^y z + z^5 + c \ .$$

6. Il prodotto vettoriale fondamentale è

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\alpha\rho^{-(\alpha+1)} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\rho^{-\alpha}\cos\theta \\ -\alpha\rho^{-\alpha}\sin\theta \\ \rho \end{pmatrix}$$

e quindi l'area della superfice Σ è data

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_0^1 \int_0^\pi \sqrt{\alpha^2\rho^{-2\alpha} + \rho^2} \, d\theta \, d\rho = \pi \int_0^1 \rho^{-\alpha} \sqrt{\alpha^2 + \rho^{2(1+\alpha)}} \, d\rho$$

e quest'ultimo integrale improprio è finito se e solo se $\alpha < 1$.

7. Ad esempio $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, che ha come luogo di zeri l'asse delle z.

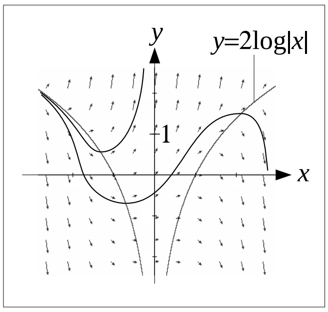
8. Siccome f è una funzione pari, i coefficienti dei seni sono tutti nulli, e quindi

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_1^\infty b_k \, \cos(kx)$$

con $b_k := \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (e^x + e^{-x}) \, \cos(kx) \, dx = \dfrac{2(e^\pi - e^{-\pi})(-1)^k}{\pi(1 + k^2)}$ per $k = 0, 1, 2, \ldots$

Seconda parte

1. a) Essendo $f(x,y) := e^y - x^2$ definita su tutto $\mathbb{R}^2$ e di classe C^∞, per il teorema di esistenza ed unicità locale, la soluzione massimale y del problema di Cauchy in questione esiste ed è unica. Inoltre, se per assurdo che l'estremo inferiore a del dominio di definizione di y fosse finito, allora il limite di y per $x \to a^+$ dovrebbe esistere ed essere pari a $+\infty$ oppure a $-\infty$, ma entrambe le possibilità portano ad un'assurdo: se infatti $\lim y = -\infty$, dall'equazione dedurremmo che $\lim \dot y = -a^2 < 0$; in particolare y dovrebbe essere decrescente in un intorno (destro) di a e quindi non potrebbe avere limite $-\infty$. Analogamente, se $\lim y = +\infty$, dall'equazione dedurremmo che $\lim \dot y = +\infty$; in particolare y dovrebbe essere crescente in un intorno di a e quindi non potrebbe avere limite $+\infty$.
b) Disegnando le zone di monotonia delle soluzioni, ci si accorge che sono decrescenti per $y < 2\log|x|$ e al decrescere di x incontrano prima o poi la curva $y = 2\log|x|$ in qualche punto $x_0 < 0$, senza poterla più riattraversare, e quindi restano decrescenti per $x < x_0$ (vedi figura). Più precisamente, se si avesse $y(x) > 2\log|x|$ per ogni $x < 0$, allora y sarebbe crescente per $x < 0$ ma allo stesso tempo avremmo che il limite a $-\infty$ dovrebbe essere $+\infty$, che è assurdo. Esiste dunque $x_0 < 0$ tale che $y(x_0) = 2\log|x_0|$, e siccome $y = 2\log(-x)$ è una sottosoluzione dell'equazione (in senso stretto), abbiamo che $y(x) < 2\log|x|$ per $x < x_0$.



In particolare y è decrescente per $x < x_0$, ed ammette limite $b \in (-\infty, +\infty]$ per $x \to -\infty$. Inoltre, se tale limite fosse finito, avremmo che $\dot y$ tende a $-\infty$, che è assurdo.
c) Per dimostrare che la soluzione y non è definita per ogni x positivo, basta minorarla con una funzione che tende a $+\infty$ in tempo finito. Per ogni $b > 0$, la funzione $y = 10b/(b-x)$ vale 10 in 0 e tende a $+\infty$ per $x \to b$. Per il teorema del confronto, ci basta quindi trovare $b > 0$ tale che $y = 10b/(b-x)$ è una sottosoluzione dell'equazione nell'intervallo $[0,b)$, vale a dire
$$\exp\Big(\frac{10b}{b-x}\Big) - x^2 \geq \frac{10b}{(b-x)^2} \quad \text{per } 0 \leq x < b. \tag{1}$$
Usando lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 con resto di Lagrange di e^y nel punto 0 otteniamo la stima $e^y \geq 1 + y + y^2/2$ per $y > 0$, e quindi
$$\exp\Big(\frac{10b}{b-x}\Big) \geq 1 + \frac{10b}{b-x} + \frac{50b^2}{(b-x)^2} \quad \text{per } x < b.$$
Pertanto, se $5b \geq 1$ la disuguaglianza (1) è implicata da
$$1 + \frac{10b}{b-x} - x^2 \geq 0 \quad \text{per } 0 \leq x < b,$$
che è ovviamente vera per $b = 1$.

2. a) Possiamo chiaramente supporre che il raggio della circonferenza sia 1. In tal caso, l'area del triangolo T determinato dagli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ è
$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) := \frac{1}{2}\big(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3\big)\ .$$
Osserviamo che la formula è corretta anche nel caso in cui T non contenga il centro della circonferenza, cioè nel caso in cui uno degli angoli è maggiore di π. Si tratta quindi di

trovare i punti di massimo di f sull'insieme S di tutti i punti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tali che $\alpha_i > 0$ per ogni i e

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi \ . \tag{2}$$

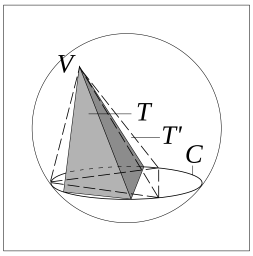
Tali punti di massimo, *se esistono*, sono punti critici della funzione f sulla superficie definita dal vincolo (2), e siccome f è di classe C^1 ed il vincolo è regolare, possono essere individuati tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, cioè risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cos\alpha_1 - \lambda = 0 \\ \frac{1}{2}\cos\alpha_2 - \lambda = 0 \\ \frac{1}{2}\cos\alpha_3 - \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = 2\lambda \\ \cos\alpha_2 = 2\lambda \\ \cos\alpha_3 = 2\lambda \end{cases}$$

a cui va aggiunto il vincolo (2). Cerchiamo quindi le soluzioni di questo sistema che soddisfano $\alpha_i > 0$ per ogni i. Per via di (2), abbiamo che $\alpha_i < 2\pi$ per ogni i. Se $|2\lambda| < 1$, l'equazione $\cos t = 2\lambda$ ammette due soluzioni in $(0, 2\pi)$, della forma α e $2\pi - \alpha$ (mentre non ci sono soluzioni se $|2\lambda| \geq 1$), e quindi ciascun α_i deve essere uguale ad α oppure a $2\pi - \alpha$. Ma l'unica combinazione che soddisfa il vincolo (2) è data da $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, e necessariamente $\alpha = 2\pi/3$. Quindi il punto di massimo della funzione f, *se esiste*, è unico e corrisponde a tutti e soli i triangoli equilateri.

Resta da dimostrare che f ammette massimo in S (altrimenti la soluzione trovata potrebbe non essere un massimo). Per fare questo, osserviamo che la chiusura di S consiste dei punti $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ che soddisfano (2) e $\alpha_i \geq 0$ per ogni i. Siccome la chiusura di S è limitata, ed f è continua, essa ammette almeno un punto di massimo sulla chiusura di S. D'altra parte, $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ assume valore zero non appena uno degli α_i si annulla, e quindi il punto di massimo deve soddisfare $\alpha_i \neq 0$ per ogni i, ovvero appartiene ad S, e non semplicemente alla sua chiusura.

b) Fissiamo una sfera S. Supponiamo che esista un tetraedro T inscritto in S di volume massimo e dimostriamo che è equilatero. Scelto un vertice V di T, la base corrispondente è un triangolo inscritto in una certa circonferenza C che giace sulla sfera (vedi figura); vogliamo far vedere che la base è equilatera. Se per assurdo così non fosse, il tetraedro T' ottenuto prendendo lo stesso vertice V e sostituendo la base con un qualunque triangolo equilatero iscritto in C avrebbe la stessa altezza di T ma area di base maggiore e quindi volume maggiore, contraddicendo la scelta di T.



Dunque la base di T è un triangolo equilatero, e siccome lo stesso ragionamento si applica a partire da qualunque scelta del vertice V, T deve essere equilatero.

Per concludere la dimostrazione dobbiamo dimostrare che esiste un tetraedro T. Un modo per farlo è questo: ad ogni quadrupla ordinata (x_1, x_2, x_3, x_4) di punti di S possiamo associare il tetraedro T inscritto in S di vertici x_1, x_2, x_3, x_4 (ammettiamo anche i tetraedri "degeneri" che si ottengono nel caso di punti complanari) ed indichiamo con $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ il volume di tale T. La funzione f è continua (ed esempio perché coincide con il modulo del determinante della matrice di colonne $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1$, $x_4 - x_1$) e quindi ammette massimo e minimo sull'insieme compatto $S \times S \times S \times S$. Notare che il massimo corrisponde ad un tetraedro non degenere.

3. Sia $P = (x, y, z)$ un punto di $\mathbb{R}^3$. Come prima cosa, osserviamo che il punto Q sulla circonferenza C di equazioni $x^2 + y^2 = R^2$ e $z = 0$ che minimizza la distanza da P minimizza anche la distanza dalla proiezione di P sul piano xy, cioè da $P' := (x, y, 0)$. Pertanto Q deve essere

$$Q = \Big(\frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 0 \Big) \ .$$

Ne segue che la distanza di P da C è

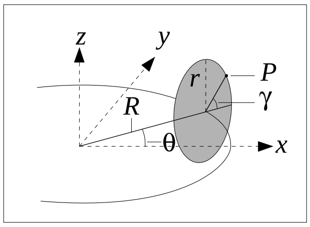
$$|P - Q| = \sqrt{z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2} \ .$$

Pertanto Σ è l'insieme dei punti che soddisfano l'equazione

$$z^2 + \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 = r^2 \ .$$

Si può verificare che per $R > r$ si tratta di un'equazione regolare, cioè valgono le ipotesi del teorema della funzione implicita.

Una parametrizzazione di Σ la si ottiene come segue: posto $t := \sqrt{x^2+y^2} - R$, l'equazione diventa $t^2 + z^2 = \rho^2$, e possiamo quindi scrivere t e z nella forma $t = \rho\cos\gamma$ e $z = \rho\sin\gamma$ con $\gamma \in [0, 2\pi)$; inoltre $x^2 + y^2 = (R+t)^2$ e quindi possiamo scrivere x e y come $x = (R+t)\cos\theta$ e $x = (R+t)\sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Riassumendo, i punti di Σ sono parametrizzati (in modo bigettivo) da



$$\begin{cases} x = (R + r\cos\gamma)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\gamma)\sin\theta \\ x = r\sin\gamma \end{cases}$$

con $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\gamma \in [0, 2\pi)$. Il prodotto vettoriale fondamentale associato a questa parametrizzazione è

$$\begin{pmatrix} -(R + r\cos\gamma)\sin\theta \\ (R + r\cos\gamma)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\gamma\cos\theta \\ -r\sin\gamma\sin\theta \\ r\cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(R + r\cos\gamma)\cos\theta\cos\gamma \\ r(R + r\cos\gamma)\sin\theta\cos\gamma \\ r(R + r\cos\gamma)\sin\gamma \end{pmatrix}$$

e l'area di Σ è quindi data da

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Sigma) &= \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\gamma)\sqrt{(\cos\theta\cos\gamma)^2 + (\sin\theta\cos\gamma)^2 + (\sin\gamma)^2}\, d\theta\, d\gamma \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\gamma)\, d\gamma = 4\pi^2 rR \ . \end{aligned}$$

4. a) Data A tale che $\|A\| < 1$, la serie $\sum_0^\infty A^n$ converge assolutamente, ed inoltre

$$(I - A)\sum_0^\infty A^n = \sum_0^\infty A^n - \sum_0^\infty A^{n+1} = I \ .$$

b) La serie di potenze che definisce la funzione $f(A)$ ha raggio di convergenza 1, quindi converge totalmente in ogni "palla" $\{\|A\| < r\}$ con $r < 1$, ne consegue che f è ben definita e continua su tutto $\{\|A\| < 1\}$. Inoltre $f(A)$ commuta con A perché $f(A)$ è una serie di potenze di A (per essere precisi, A commuta con tutte le somme parziali della serie che definisce $f(A)$).

c) Fissata A, la serie di potenze che definisce $g(t)$ ha raggio di convergenza pari a $\|A\|^{-1}$. Pertanto possiamo derivare termine a termine, ed otteniamo

$$g'(t) = \sum_1^\infty \frac{d}{dt}\frac{(-1)^{n-1}t^n A^n}{n} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}t^{n-1}A^n = A\sum_1^\infty (-tA)^{n-1} = A(I + tA)^{-1} \ .$$

d) Per calcolare la derivata della funzione $h(t) := (I+tA)\exp(-f(tA))$ utilizziamo la formula per la derivata del prodotto, per la derivata di una funzione composta e per la derivata dell'esponenziale:

$$\begin{aligned} h'(t) &= A\,e^{-f(tA)} + (I+tA)\left(e^{-f(tA)}\right)' \\ &= A\,e^{-f(tA)} + (I+tA)\,e^{-f(tA)}\,(-f(tA))' \\ &= A\,e^{-f(tA)} - (I+tA)\,e^{-f(tA)}A(I+tA)^{-1} \ . \end{aligned}$$

Siccome $e^{-f(tA)}$ commuta con $-f(A)$, che a sua volta commuta con A, che commuta con $I+tA$), si vede che $h'(t)=0$. Ne consegue che $h(t)$ è costante sull'intervallo di definizione $|t| < \|A\|^{-1}$, ed in particolare $h(0)=h(1)$, vale a dire $I=(I+A)\exp(-f(A))$, da cui segue la tesi.

Commenti

- Prima parte, esercizio 6. La superficie Σ è anche il grafico della funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha/2}$ definita sul semicerchio D dei punti (x,y) tali che $x^2+y^2\le 1$ e $y\ge 0$, e quindi l'area può essere calcolata con la formula

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_D \sqrt{1+|\nabla f|^2} \ .$$

- Seconda parte, esercizio 1. L'equazione $\dot y = e^y - x^2$ si risolve esplicitamente: moltiplicandola infatti per e^{-y} e facendo poi la sostituzione $z=e^{-y}$ otteniamo infatti l'equazione lineare non omogenea $-\dot z = 1 - x^2 z$. Tenendo conto del dato iniziale $z(0)=e^{-y(0)}=e^{-10}$ otteniamo quindi

$$z(x) = e^{x^3/3}\left(e^{-10} - \int_0^x e^{-t^3/3}\,dt\right)$$

che è definita per ogni $x\in\mathbb{R}$. Quindi

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \log\left(e^{-10} - \int_0^x e^{-t^3/3}\,dt\right) \ .$$

Quest'ultima funzione risulta definita solo quando l'argomento del logaritmo è positivo, ovvero per gli x tali che

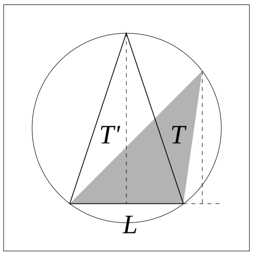
$$e^{-10} > \int_0^x e^{-t^3/3}\,dt \ . \tag{3}$$

Siccome l'integrando è positivo, il termine di destra della (3) è crescente in x e quindi l'insieme delle soluzioni della (3), ovvero il dominio di definizione della y, è una semiretta aperta illimitata a sinistra (non vuota perché contiene almeno 0). Per far vedere che questa semiretta è limitata a destra basta osservare 1 non vi appartiene:

$$\int_0^1 e^{-t^3/3}\,dt > e^{-1/3} > e^{-10} \ .$$

- Seconda parte, esercizio 2a). Molti hanno applicato il metodo dei moltiplicatori di Lagrange imponendo a priori la condizione $< \alpha_i < \pi$. Nessuno ha osservato il fatto che se non si dimostra l'esistenza del massimo di f,il punto critico ottenuto con i moltiplicatori di Lagrange potrebbe non corrispondere ad un massimo ma ad un minimo o altro. Per capire il punto, provate a chiedervi cosa sarebbe successo se la domanda fosse stata trovare il minimo di f.

- Seconda parte, esercizio 2a). Una dimostrazione alternativa è la seguente. Sia T un triangolo che massimizza l'area tra quelli inscritti in una data circonferenza C. Per dimostrare che T è equilatero basta far vedere che preso un qualunque lato L di T, gli altri due sono uguali. Se per assurdo così non fosse, il triangolo isoscele T' di base L ha altezza maggiore di T, e quindi anche area maggiore. Per dimostrare che esiste un triangolo T di area massima si procede come per l'esistenza un tetraedro di volume massimo inscritto nella sfera,



- Seconda parte, esercizio 3. Nessuno si è dato la pena di giustificare il procedimento usato per ottenere l'equazione della superficie toroidale Σ. Quasi tutti ne hanno calcolato l'area utilizzando il Teorema di Guldino.
- Seconda parte, esercizio 4d). Nella nostra dimostrazione abbiamo derivato il prodotto e la composizione di due funzioni utilizzando le solite formule, senza però chiederci se esse valgono anche per funzioni a valori nelle matrici, e non solo per quelle a valori reali. In effetti così è, ma ed essere precisi andrebbe dimostrato.

Scritto del III appello, 10 settembre 2004

Prima parte

1. Siccome $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^3 = 0$, allora $e^A = I + A + \frac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{cases} \dot y = z \\ \dot z = xze^y + y^2 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$.

3. Sia V la palla di centro $(0,0,1)$ e raggio 1: $\displaystyle\int_\Sigma F\cdot\eta = \int_V \nabla\cdot F = 3\,\mathrm{Vol}(V) = 4\pi$.

4. La derivata della funzione $\phi(x,y,z) := (z(x^2+y^2) - e^x, e^z + 1 - e - x - y)$ nel punto $(0,1,1)$ è la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & e \end{pmatrix},$$
che ha rango 2, e quindi lo spazio tangente alla curva in $(0,1,1)$ è l'insieme dei vettori (x,y,z) che risolvono il sistema
$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y + ez = 0 \end{cases},$$
come ad esempio $(2e+1, e-1, 3)$.

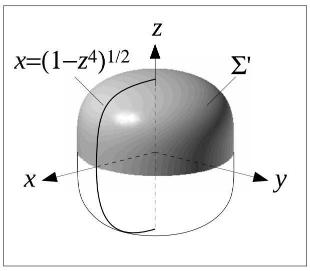
5. La condizione delle derivate incrociate è soddisfatta solo per $a = 1$. In tal caso il potenziale è $V(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + c$ con $c \in \mathbb{R}$.

6. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ deve valere $ae^{ax} \le 2e^{ax} + x^2$, ovvero $(a-2)e^{ax} \le x^2$. Questo si verifica se e solo se $a - 2 \le 0$, ovvero $a \le 2$.

7. $v \times w = (a^2 - 3, -a^2 + a + 1, a^2 - a - 2)$ che non si annulla per alcun $a \in \mathbb{R}$, e quindi i due vettori non sono mai paralleli.

8. $\sin x \cos x = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sin(2x) & \text{serie di Fourier reale,} \\ \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = -\dfrac{i}{4}e^{2ix} + \dfrac{i}{4}e^{-2ix} & \text{serie di Fourier complessa.} \end{cases}$

Seconda parte



1. a) La disequazione $x^2 + y^2 + z^4 \le 1$ implica $x^2 \le 1$, $y^2 \le 1$ e $z^4 \le 1$, per cui A è contenuto nel cubo $[-1,1]^3$; pertanto lo stesso vale per Σ, che è dunque limitata. Inoltre il gradiente della funzione $x^2 + y^2 + z^4$ si annulla solo nell'origine, che non appartiene a Σ, e quindi Σ è una superficie regolare per via del teorema della funzione implicita. Più precisamente, Σ viene ottenuta ruotando attorno all'asse z il grafico della funzione $x = (1-z^4)^{1/2}$ (vedi figura).
b) Il baricentro di A è il punto $P = (x_P, y_P, z_P)$ tale che x_P (risp., y_P, z_P) è la media su A della funzione x (risp., y, z). Siccome x è una funzione dispari ed A è simmetrico rispetto al piano $x = 0$, l'integrale di x su A è zero, e quindi $x_P = 0$; analogamente si ottiene $y_p = 0$ e $z_P = 0$.

Detto $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$ il baricentro di A', otteniamo allo stesso modo che $x_Q = y_Q = 0$. Per determinare z_Q, cominciamo con il calcolare il volume di A': la sezione di A' ad altezza z, detta A_z, è un cerchio di centro l'origine e raggio $(1 - z^4)^{1/2}$ per $0 < z \leq 1$ ed è vuota altrimenti, e quindi

$$\mathrm{Vol}(A') := \int_0^1 \left(\int_{A_z} 1\, dx\, dy \right) dz = \int_0^1 \mathrm{Area}(A_z)\, dz = \int_0^1 \pi(1 - z^4)\, dz = \frac{4\pi}{5} \ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned} z_Q := \frac{1}{\mathrm{Vol}(A')} \int_{A'} z\, dx\, dy\, dz &= \frac{5}{4\pi} \int_0^1 \left(\int_{A_z} z\, dx\, dy \right) dz \\ &= \frac{5}{4\pi} \int_0^1 \mathrm{Area}(A_z)\, z\, dz = \frac{5}{4} \int_0^1 z(1 - z^4)\, dz = \frac{5}{12} \ . \end{aligned}$$

Quindi il baricentro di A' è il punto $Q = (0, 0, 5/12)$.
c) Per il teorema della divergenza si ha che

$$\int_\Sigma F \cdot \eta = \int_A \nabla \cdot F = \int_A z^3\, dx\, dy\, dz = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che la funzione z^3 è dispari e l'insieme A è simmetrico rispetto a piano $z = 0$.
Per calcolare il flusso di F attraverso Σ' applichiamo il teorema della divergenza all'insieme A', osservando che la sua frontiera è data dall'unione di Σ' e del disco D di centro l'origine e raggio 1 che giace sul piano xy:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma'} F \cdot \eta = -\int_D F \cdot \eta + \int_{A'} \nabla \cdot F &= -\int_D -x\, dx\, dy + \int_{A'} z^3\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_{A'} z^3\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 z^3(1 - z^4)\, dz = \frac{\pi}{8} \ . \end{aligned}$$

2. a) Σ è il luogo di zeri della funzione $\phi(x, y, z) := x^2 + y^2 - (1 + z^2)^2$. Siccome il gradiente $D\phi = (2x, 2y, -4(1 + z^2)z)$ si annulla solo nel punto $(0, 0, 0)$, che non appartiene a Σ, quest'ultima è una superficie regolare per il teorema della funzione implicita.
   b) Essendo ϕ una funziona continua, Σ è un insieme chiuso in $\mathbb{R}^3$ ma non limitata (contiene, ad esempio, la successione di punti $(n^2 + 1, 0, n)$). Tuttavia la funzione

   $$f(x, y, z) := (x - 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 \ ,$$

   corrispondente alla distanza (al quadrato) del punto (x, y, z) dal punto $(1, 0, 3)$, tende a $+\infty$ per $|(x, y, z)| \to +\infty$, e dunque ammette minimo su Σ (è un esercizio già svolto in precedenza).
   c) Siccome Σ è definita da un vincolo regolare ed f è di classe C^1, il punto (x, y, z) di Σ che minimizza f deve soddisfare il sistema dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero esiste λ tale che (x, y, z, λ) è un punto critico di $f(x, y, z) - \lambda\phi(x, y, z)$:

   $$\begin{cases} 2(x - 1) - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 2\lambda y = 0 \\ 2(z - 3) + 4\lambda(1 + z^2)z = 0 \\ x^2 + y^2 = (1 + z^2)^2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (1 - \lambda)x = 1 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ 2(z - 3) + 4\lambda(1 + z^2)z = 0 \\ x^2 + y^2 = (1 + z^2)^2 \end{cases} . \qquad (1)$$

Dalla prima equazione si deduce che $1-\lambda \neq 0$, e quindi la seconda implica $y=0$. A questo punto la prima equazione implica $\lambda = 1 - 1/x$, e la terza $x = \pm(1+z^2)$. Dobbiamo quindi considerare due casi: (i) se $x = 1+z^2$, allora il sistema (1) si riduce a

$$\begin{cases} x = 1+z^2 \\ y = 0 \\ 2z^3 + z - 3 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

L'equazione $2z^3 + z - 3 = 0$ ammette come unica soluzione reale $z = 1$ (che questa sia soluzione lo si vede al volo, inoltre la funzione $2z^3 + z - 3$ ha derivata sempre positiva ed è quindi strettamente crescente). Quindi l'unica soluzione del sistema (2) è $(2,0,1)$.
(ii) Se invece $x = -(1+z^2)$, allora il sistema (1) si riduce a

$$\begin{cases} x = -(1+z^2) \\ y = 0 \\ 2z^3 + 5z - 3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

L'equazione $2z^3+5z-3=0$ ammette un'unica soluzione reale z_0 compresa tra 0 ed 1 (perché la funzione $2z^3+5z-3$ ha derivata sempre positiva ed è quindi strettamente crescente, ed assume un valore negativo in 0 e positivo in 1). Pertanto l'unica soluzione del sistema (3) è $(-1-z_0^2, 0, z_0)$.
Confrontando ora il valore di f nelle due soluzioni così ottenute otteniamo che il punto di minimo deve essere $(2,0,1)$. Infatti

$$f(2,0,1) = 5$$

mentre, ricordando che $z_0 \leq 1$,

$$f(-1-z_0^2, 0, z_0) = z_0^4 + 5z_0^2 + 13 - 6z_0 \geq 13 - 6z_0 \geq 7 \; .$$

3. a) Facendo qualche conto si dimostra che il gradiente della funzione $|x|$ è

$$\nabla|x| = \frac{x}{|x|} \; . \tag{4}$$

Usando la formula per la derivata della funzione composta si vede allora che

$$\nabla V = \nabla(v(|x|)) = \dot{v}(|x|)\,\frac{x}{|x|} \; . \tag{5}$$

b) Si parte dal fatto che $D_i|x| = x_i|x|^{-1}$ per ogni i (cfr. (4)) e si fanno i conti:

$$\begin{aligned} \nabla\cdot F = \sum_i D_i F_i &= \sum_i D_i\big(f(|x|)\,x_i\,|x|^{-1}\big) \\ &= \sum_i D_i\big(f(|x|)\big)\,x_i\,|x|^{-1} + f(|x|)\,D_i(x_i)\,|x|^{-1} + f(|x|)\,x_i\,D_i(|x|^{-1}) \\ &= \sum_i f'(|x|)\,(x_i\,|x|^{-1})^2 + f(|x|)\,|x|^{-1} + f(|x|)\,x_i(-x_i|x|^{-3}) \\ &= \sum_i f'(|x|)\,x_i^2\,|x|^{-2} + f(|x|)\,|x|^{-1}\big(1 - x_i^2\,|x|^{-2}\big) \\ &= f'(|x|) + f(|x|)\frac{n-1}{|x|} \; . \end{aligned} \tag{6}$$

c) Mettendo insieme le formule (5) e (6) si ottiene

$$\Delta V = \nabla \cdot (\nabla V) = \nabla \cdot \Big(\dot v(|x|) \frac{x}{|x|} \Big) = \ddot v(|x|) + \dot v(|x|) \frac{n-1}{|x|} \ . \tag{7}$$

d) Per quanto visto al punto precedente, V ha laplaciano nullo se e solo se v soddisfa l'equazione differenziale

$$\ddot v(t) + \dot v(t) \frac{n-1}{t} = 0 \quad \text{per } t \in (0, +\infty). \tag{8}$$

Tramite la sostituzione $\dot v = u$ otteniamo l'equazione a variabili separabili $\dot u = (1-n)t^{-1}u$ le cui soluzioni sono tutte e sole le funzioni u della forma $u = at^{1-n}$ con $a \in \mathbb{R}$, e pertanto $v = at^{2-n} + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ (tranne che per $n = 2$, allorché $v = a \log t + b$). Dunque le funzioni radiali a laplaciano nullo sono tutte e sole quelle della forma

$$V(x) := \begin{cases} a|x|^{2-n} + b & \text{per } n \geq 3 \\ a \log|x| + b & \text{per } n = 2 \end{cases} \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

COMMENTI

- Seconda parte, esercizio 2c): una dimostrazione alternativa è la seguente: si osserva innanzitutto che $f(x, y, z) \leq f(z, 0, z)$ per ogni (x, y, z), e la disuguaglianza è stretta a meno che $y = 0$. Questo significa che il punto $(x, 0, z)$ è sempre più vicino a $(1, 0, 3)$ del punto (x, y, z), e pertanto il punto di Σ di minima distanza da $(1, 0, 3)$ deve appartenere al piano $y = 0$. Ma allora il problema si riduce a cercare il punto di minima distanza della curva di equazione $x^2 = (1 + z^2)^2$ (nel piano xz) dal punto $(1, 3)$.
  La curva in questione ha due rami: il primo è parametrizzato da $x = 1 + z^2$ e giace nel semipiano $x > 0$, mentre il secondo viene ottenuto per riflessione rispetto all'asse delle z e giace nel semipiano $x < 0$. Chiaramente il punto di minima distanza deve appartenere al primo ramo. Usando la parametrizzazione di questo ramo, non resta che trovare il minimo di $f(z^2 + 1, 0, z) = z^4 + (z - 3)^2$ per $z \in \mathbb{R}$, che si ha appunto per $z = 1$ (e quindi $x = 2$).
- Seconda parte, esercizio 3d): nessuno (!) ha risolto l'equazione differenziale (8).

Prima parte

1. F ha potenziale $V(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x}$ e quindi $\displaystyle\int_\gamma F\cdot\tau = V(\gamma(2)) - V(\gamma(1)) = (\log 2)^2$.

2. La prima identità è falsa, perché le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non commutano.

   La seconda identità è falsa perché $\exp\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix}$, e non $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$.

3. $\nabla\times F = (D_yF_z - D_zF_y, D_zF_x - D_xF_z, D_xF_y - D_yF_x) = (-y, x, -1)$.

4. Ponendo $x = -\ddot{y}$ il sistema si riduce all'equazione $D^4y + D^2y + y = 0$ con le condizioni iniziali $y(0) = D^2y(0) = 0$, $Dy(0) = D^3y(0) = -1$.

5. Posto $\Phi(x,y,z) = (x^2 - y^2 + z^2, x^3 + y^3)$ si ottiene $D\Phi(1,1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   Questa matrice ha rango 2 e quindi le ipotesi del teorema della funzione implicita sono soddisfatte. Inoltre il suo kernel contiene il vettore $(1,-1,2)$, che è quindi tangente a C nel punto $(1,1,-1)$.

6. Il vincolo non è degenere, ed il sistema dei moltiplicatori di Lagrange (escluso il vincolo) è

$$\begin{cases} 2x - \lambda yz^2 = 0 \\ 2y - \lambda xz^2 = 0 \\ 4z - 2\lambda xyz = 0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 2x^2 = \lambda xyz^2 = 2z^2 \\ 2y^2 = \lambda xyz^2 = 2z^2 \\ 2 = \lambda xy \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 = y^2 = z^2$$

   (si ricordi che x, y, z devono essere tutti diversi da 0). I punti di questo tipo che soddisfano il vincolo sono $(1,1,\pm1)$ e $(-1,-1,\pm1)$, e per tutti è quattro si ha $f = 4$. Questo è il valore minimo di f.

7. Essendo $\cos(x/2)$ una funzione pari, la sua serie di Fourier contiene solo i termini in coseno, ovvero

$$\cos(x/2) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_1^{+\infty} \alpha_n \cos(nx) \quad \text{dove} \quad \alpha_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x/2)\cos(nx)\,dx\ .$$

   Integrando due volte per parti si ottiene $\alpha_n = \dfrac{4(-1)^n}{\pi(1+4n^2)}$.

Seconda parte

1. Indichiamo con $2x$ la base del triangolo isoscele, con y la sua altezza, e con z l'altro lato del rettangolo. Allora

$$\text{Area}(P) = 2xz + xy \quad \text{e} \quad \text{Per}(P) = 2\big(x + z + \sqrt{x^2+y^2}\big)\ .$$

   Cerchiamo il massimo di $f(x,y,z) := 2xz + xy$ sull'insieme X dei punti (x,y,z) con coordinate non negative tali che $g(x,y,z) := x + z + \sqrt{x^2+y^2} = p/2$ (vedremo alla fine che il massimo viene raggiunto in un punto con coordinate strettamente positive, che quindi corrisponde ad un pentagono vero e proprio).

   L'insieme X è chiaramente chiuso (intersezione di controimmagini di chiusi e il vincolo sul perimetro e la positività di x, y, z implicano che X è limitato. Pertanto X è compatto, e la funzione f, essendo continua, ammette un punto di massimo. Si vede che $\nabla g(x,y,z)$ esiste

e non si annulla mai nei i punti con coordinate strettamente positive, ovvero il vincolo è non degenere; quindi se il punto di massimo è di questo tipo lo possiamo individuare tramite il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Considereremo in un secondo momento la possibilità che una delle coordinate di questo punto di massimo sia zero.
Cerchiamo i punti critici di $F(x, y, z, \lambda) := f(x, y, z) - \lambda(g(x, y, z) - p/2)$:

$$\begin{cases} 2z + y - \lambda\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = 0 \\ x - \lambda\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ 2x - \lambda = 0 \\ x + z + \sqrt{x^2 + y^2} = p/2 \end{cases}$$

la terza equazione implica $\lambda = 2x$, e sostituendo nella seconda otteniamo $\sqrt{x^2 + y^2} = 2y$ e quindi $x = \sqrt{3}y$. Dalla prima equazione otteniamo $z = (\sqrt{3} + 1)y$, ed infine dalla quarta otteniamo infine $y = p/(4\sqrt{3} + 6)$. Per tale punto, il valore di f è

$$f = (6 + 3\sqrt{3})y^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}p^2 \simeq 6,70 \cdot 10^{-2}p^2 \ . \tag{1}$$

Per essere certi che il valore in (1) è il massimo di f su X non ci resta che verificare che f non assume valori maggiori quando una delle coordinate si annulla. Il caso $x = 0$ è immediato perché $f = 0$. Per $y = 0$ dobbiamo trovare il massimo di $2xz$ con il vincolo $2x + z = p/2$, ovvero $2x = p/2 - z$: tale massimo si ha per $2x = z = p/4$ e vale $p^2/16 \simeq 6,25 \cdot 10^{-2}p^2$ che è inferiore al valore in (1). Infine, per $z = 0$ dobbiamo trovare il massimo di xy con il vincolo $x + \sqrt{x^2 + y^2} = p/2$: tale massimo si ha per $x = p/6$ e $y = \sqrt{3}p/6$, e vale $\sqrt{3}p^2/36 \simeq 4,81 \cdot 10^{-2}p^2$ che pure è inferiore al valore in (1).

2. a) Supponiamo per assurdo che a_α sia finito. Allora y_α deve avere limite $+\infty$ oppure $-\infty$ per $x \to a_\alpha^+$. Nel primo caso si ottiene $\lim \dot y_\alpha = \lim(y_\alpha^3 - x^3) = +\infty$, ma questo è assurdo, perché $\dot y_\alpha$ dovrebbe essere positiva in un intorno di a_α e quindi y_α crescente, nel qual caso il limite non può essere $+\infty$. Un discorso analogo vale nel caso che il limite di y_α è $-\infty$.
b) Dallo studio della funzione $y^3 - x^3$, si vede che $\dot y_\alpha \geq 0$ quando $y_\alpha(x) \geq x$ e $\dot y_\alpha < 0$ altrimenti. Per far vedere che y_α è crescente per x sufficientemente piccolo basta quindi dimostrare che $y_\alpha(x) \geq x$ per x sufficientemente piccolo. Siccome x è una soprasoluzione dell'equazione $\dot y = y^3 - x^3$ per $x \leq 0$, basta mostrare che esiste un x_0 tale che $y_\alpha(x_0) \geq x_0$ per dedurne che $y_\alpha(x) \geq x$ per ogni $x \leq x_0$. Supponiamo ora per assurdo che $y_\alpha(x) < x$ per ogni $x \leq 0$: allora avremmo che $\dot y_\alpha < 0$, ovvero che y_α è decrescente, ma questo contraddice l'ipotesi $y_\alpha(x) < x$.
c) Siccome $\dot y_\alpha = y_\alpha^3 - x^3 \leq y_\alpha^3$ per $x \geq 0$, y_α è una sottosoluzione dell'equazione $\dot y = y^3$ per $x \geq 0$, ed in particolare è maggiorata dalla soluzione di tale equazione che assume lo stesso valore in 0. Questa soluzione la si calcola esplicitamente (l'equazione è a variabili separabili):
$$y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha^2 x}}$$
e quando $\alpha < 0$ tende a $-\infty$ per $x \to 1/(2\alpha^2)$.
d) Supponiamo $\alpha > 1$. La funzione $\alpha(x+1)$ è una sottosoluzione dell'equazione $\dot y = y^3 - x^3$ per $x \geq 0$ (infatti $\alpha^3(x + 1)^3 - x^3 \geq \alpha^3 \geq \alpha$). Siccome $y_\alpha(0) = \alpha$, ne segue che

$$y_\alpha \geq \alpha(x + 1) \quad \text{per ogni } x \geq 0,$$

ed in particolare $y_\alpha \geq \alpha x$. Pertanto

$$\dot y_\alpha = y_\alpha^3 - x^3 \geq (1 - 1/\alpha^2)y_\alpha \quad \text{per ogni } x \geq 0,$$

ovvero y_α è una soprasoluzione di $\dot y = \beta y^3$ per $\beta := 1 - 1/\alpha^3$. Ne consegue che y_α è minorata dalla soluzione di tale equazione che assume lo stesso valore in 0. Questa soluzione la si calcola esplicitamente,

$$y(x) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha^2\beta x}} \ ,$$

e tende a $+\infty$ per $x \to 1/(2\alpha^2\beta)$.

e) Dati $\alpha_1 > \alpha_2$, indichiamo con y_1 e y_2 le corrispondenti soluzioni; siccome $y_1(0) > y_2(0)$, si ha $y_1 > y_2$ ovunque. Poniamo ora $\bar y := y_1 - y_2$. Allora

$$\dot{\bar y} = \dot y_1 - \dot y_2 = (y_1^3 - x^3) - (y_2^3 - x^3) = y_1^3 - y_2^3 \ge (y_1 - y_2)^3 = \bar y^3$$

(il penultimo passaggio segue dalla disuguaglianza $a^3 - b^3 \ge (a-b)^3$ per $a \ge b$, che si dimostra sviluppando il cubo del binomio). Dunque $\bar y$ è una soprasoluzione dell'equazione $\dot y = y^3$, ed in particolare e minorata per $x \ge 0$ dalla soluzione di tale equazione che assume lo stesso valore in 0. Siccome $\bar y(0) > 0$, un facile conto mostra che tale soluzione tende a $+\infty$ in tempo finito, e quindi lo stesso succede a $\bar y$. In particolare, y_2 e y_1 non possono essere definite entrambe per ogni $x > 0$.

3. a) Supponiamo che la densità ρ sia uniforme in tutto il recipiente, e che quindi dipenda solo dal tempo t. Fissato t e preso un'intervallo di tempo Δt piccolo, sappiamo per ipotesi che

$$\rho(t) - \rho(t + \Delta t) = \sigma \cdot \rho(t) \cdot \Delta t \ .$$

Dividendo per Δt e prendendo il limite per $\Delta t \to 0$ otteniamo quindi

$$\dot\rho(t) = -\sigma\, \rho(t) \ . \tag{2}$$

In particolare, detta ρ_0 la densità all'istante t_0 di inizio della reazione, si ha

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\sigma(t - t_0)} \ .$$

b) Prendiamo t e Δt come prima. Siccome l'incremento di temperature è proporzionale alla quantità di energia liberata dalla razione per unità di volume, per ipotesi esiste una costante fisica γ tale che

$$T(t + \Delta t) - T(t) = \gamma \cdot \big(\rho(t) - \rho(t + \Delta t)\big) \ .$$

Dividendo per Δt e prendendo il limite per $\Delta t \to 0$ otteniamo quindi $\dot T = -\gamma\, \dot\rho$. Detta dunque T_0 la temperatura all'istante t_0, abbiamo che

$$T(t) = T_0 + \gamma(\rho(t) - \rho_0)$$

e dunque l'equazione (2) diventa

$$\dot\rho(t) = -\sigma(T_0 - \gamma\rho_0 + \gamma\rho(t))\, \rho(t) \ .$$

Scritto del quinto appello, 8 febbraio 2005

Prima parte

1. a) Sì; b) No; c) Sì.

2. $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -2I + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ implica $\exp\left(t\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
   Quindi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2t}\sin t \\ e^{-2t}\cos t \end{pmatrix}$.

3. Parametrizzando γ come $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$ con θ che va da $\pi/4$ a 0 si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\cdot\tau &= \int_{\pi/4}^0 \Big(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}, 1\Big)\cdot(-\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^0 \frac{\cos\theta\, d\theta}{1+\sin\theta} = \Big|\log(1+\sin\theta)\Big|_{\pi/4}^0 = \log(2-\sqrt{2})\ .\end{aligned}$$

4. Abbiamo $\begin{cases} x = e^{-\theta}\cos\theta \\ y = e^{-\theta}\sin\theta \end{cases}$ e quindi $L = \int_0^{+\infty} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, d\theta = \int_0^{+\infty} \sqrt{2}\, e^{-\theta}\, d\theta = \sqrt{2}$.

5. Si ha $\nabla\cdot F = 3$, e per il teorema della divergenza il flusso uscente da S è pari a 3 per il volume della sfera stessa, ovvero 4π.

6. Deve essere $\dot{z} \le z + x^2$, ovvero $(1-\alpha)e^{\alpha x} + x^2 \ge 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ponendo $x = 0$ si ottiene la condizione necessaria $1-\alpha \ge 0$, ovvero $\alpha \le 1$. Tale condizione è, ovviamente, anche sufficiente.

7. Sviluppiamo u in serie di Fourier (reale) rispetto alla variabile x, ponendo cioè

$$u(t,x) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_1^\infty a_n(t)\, cos(nx) + b_n(t)\, \sin(nx)\ .$$

   Trascrivendo l'equazione ed il dato iniziale in termini dei coefficienti, si ottengono problemi di Cauchy che hanno soluzioni nulle tranne che nel caso di a_2 e b_1, ed in particolare

$$\begin{cases} \dot{a}_2 = -5a_2 - 5 \\ a_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_2 = e^{-5t} - 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} \dot{b}_1 = -2b_1 \\ b_1(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow b_1 = e^{-2t}$$

   ovvero $u(t,x) = e^{-2t}\sin x + (e^{-5t}-1)\cos(2x)$.

Seconda parte

1. a) Il punto $(1,0,1,1)$ appartiene a C, che quindi non è vuoto. Il secondo vincolo $x_1^4+x_2^4+x_3^4 = 2$ implica $|x_i| \le \sqrt[4]{2}$ per $i = 1,2,3$, e quindi il primo vincolo $x_2^2 + x_4^2 = x_1^2 + x_3^2 - 1$ implica $|x_4| \le \sqrt{2\sqrt{2}-1}$.
   b) Verifichiamo che in tutti i punti di C sono verificate le ipotesi del teorema della funzione implicita, ovvero che la derivata di $\Phi(x) := (x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2, x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$ ha rango 2. Infatti

$$D\Phi(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 & 2x_3 & -2x_4 \\ 4x_1^3 & 4x_2^3 & 4x_3^3 & 0 \end{pmatrix}$$

e questa matrice ha rango inferiore a 2 se e solo se tutti i determinanti dei minori 2×2 sono nulli, ovvero se x soddisfa il sistema

$$\begin{cases} x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) = 0 \\ x_1 x_3 (x_1^2 - x_3^2) = 0 \\ x_1^3 x_4 = 0 \\ x_2^3 x_4 = 0 \\ x_3^3 x_4 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

In tal caso deve essere $x_4 = 0$, altrimenti le ultime tre equazioni implicherebbero $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, cosa che non è verificata da alcun punto di C per via del secondo vincolo $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2$. Rimangono le prime tre equazioni del sistema (1), che possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \text{ oppure } x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \text{ oppure } x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \text{ oppure } x_3 = 0 \text{ oppure } x_3 = \pm x_1 \end{cases}$$

Ne consegue che le soluzioni di (1) sono della forma $(t, 0, 0, 0)$, $(0, t, 0, 0)$, $(0, 0, t, 0)$ oppure $(t, 0, \pm t, 0)$ con $t \in \mathbb{R}$, e si verifica facilmente che nessuno di questi punti soddisfa i vincoli che definiscono C.

c) Il minimo di R coincide con l'estremo superiore di $|x|$ per $x \in C$. Per semplificare i conti, cerchiamo l'estremo superiore di

$$f(x) := |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2(x_1^2 + x_3^2) - 1$$

(l'ultima uguaglianza segue dall'equazione $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1$). Siccome questa funzione è continua e C è chiuso e limitato, ovvero compatto, tale estremo superiore viene effettivamente raggiunto in qualche punto di C, che può quindi essere trovato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Cerchiamo quindi i punti critici della funzione ausiliaria

$$F(x, \lambda, \mu) := 2(x_1^2 + x_3^2) - 1 - \lambda(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 1) - \mu(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2) \ .$$

Il sistema consiste delle due equazioni che definiscono C e delle seguenti:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2\lambda x_1 - 4\mu x_1^3 = 0 \\ 2\lambda x_2 - 4\mu x_2^3 = 0 \\ 4x_3 - 2\lambda x_3 - 4\mu x_3^3 = 0 \\ 2\lambda x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (2 - \lambda - 2\mu x_1^2) x_1 = 0 \\ (2 - \lambda - 2\mu x_3^2) x_3 = 0 \\ (\lambda - 2\mu x_2^2) x_2 = 0 \\ \lambda x_4 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

L'ultima equazione ammette due soluzioni: (A) $\lambda = 0$ e (B) $x_4 = 0$. Esaminiamo prima il caso (A). Il sistema (2) si riduce a

$$\begin{cases} (1 - \mu x_1^2) x_1 = 0 \\ (1 - \mu x_3^2) x_3 = 0 \\ \mu x_2^3 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

L'ultima equazione dà luogo a due soluzioni: (AA) $\mu = 0$ e (AB) $x_2 = 0$. Nel caso (AA) le rimanenti equazioni diventano $x_1 = x_3 = 0$, per cui il vincolo $x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 1$ non può essere mai soddisfatto. Nel caso (AB) abbiamo tre possibilità: (AAA) $x_1 = 0$, per cui il secondo vincolo si riduce a $x_3^4 = 2$, e quindi $f = 2\sqrt{2} - 1$. (AAB) $x_3 = 0$, per cui,

analogamente al caso precedente, $f = 2\sqrt{2} - 1$; (AAC) $x_1^2 = x_3^2$ per cui il secondo vincolo implica $x_1^2 = x_3^2 = 1$ e quindi $f = 3$.
Esaminiamo ora il caso (B), e cioè $x_4 = 0$. Il sistema (2) si riduce a

$$\begin{cases} (2-\lambda-2\mu x_1^2)x_1 = 0 \\ (2-\lambda-2\mu x_3^2)x_3 = 0 \\ (\lambda - 2\mu x_2^2)x_2 = 0 \end{cases}$$

Abbiamo allora tre possibilità: (BA) se x_1, x_3 sono entrambe diverse da 0, allora le prime due equazioni in (3) implicano $x_1^2 = x_3^2$, e quindi i due vincoli si riducono a $2x_1^2 - x_2^2 = 1$ e $2x_1^4 + x_2^4 = 2$, da cui segue $x_1^2 = (2+\sqrt{10})/6$, e dunque $f = (1+2\sqrt{10})/3$. (BB) se $x_1 = 0$, allora i due vincoli si riducono a $x_3^2 - x_2^2 = 1$ e $x_3^4 + x_2^4$, da cui si deduce $x_1^2 = (1+\sqrt{3})/2$, e quindi $f = \sqrt{3}$. (BC) se $x_3 = 0$, analogamente al caso precedente si ottiene $f = \sqrt{3}$.
Confrontando i diversi valori ottenuti si vede che il massimo di f è 3, quindi il valore minimo di R è $\sqrt{3}$.

2. Il campo F è definito su tutto il piano tranne l'origine, e soddisfa ovunque la condizione delle derivate incrociate (cioè $D_xF_y = D_yF_x$). Tuttavia, siccome il piano meno un punto non è semplicemente connesso, non è detto che F ammetta potenziale su tutto il dominio (anzi, si può verificare che non lo ammette).
Siccome $t + \log t \geq 1$ per $t \geq 0$, l'immagine della curva γ è contenuta nel semipiano $x > 0$, e quindi per calcolare l'integrale di F lungo γ basta trovare un potenziale di F in tale semipiano (che esiste perché questo insieme è semplicemente connesso). Per fare questo, integriamo F_y rispetto alla variabile y:

$$V(x,y) := \int \frac{-x^3}{y^2+x^6}\,dy = -\arctan(y/x^3) + a(x) \ ;$$

derivando questa espressione rispetto ad x si vede che V è un potenziale di F per ogni a costante, ed in particolare per $a = 0$. Quindi

$$\int_\gamma F\cdot\tau = \lim_{t\to+\infty} V(\gamma(t)) - V(\gamma(1)) = -\arctan\left(\lim_{t\to+\infty}\frac{t^3+\sin(\pi t)}{(t+\log t)^3}\right) + \frac{\pi}{4} = 0 \ .$$

3. Ricordo che H, essendo simmetrica e semidefinita positiva, è invertibile e diagonalizzabile con tutti gli autovalori positivi.
Indichiamo con C l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano il vincolo $\langle Hx; x\rangle = 1$. Osserviamo che C è chiuso, in quanto controimmagine di un punto secondo una funzione continua. Inoltre C non è vuoto, infatti, dato un qualunque vettore $x \neq 0$, si ha che tx soddisfa il vincolo per $t := 1/\sqrt{\langle Hx; x\rangle}$. Infine C è limitato, infatti, indicando con λ_0 il minimo autovalore di H, si ha $\lambda_0|x| \leq \langle Hx; x\rangle = 1$, da cui segue che $|x| \leq 1/\lambda_0$ per ogni $x \in C$. Pertanto C è compatto, e la funzione $\langle Mx; x\rangle$, essendo continua, assume il valore massimo in almeno un punto.
Osserviamo ora che il vincolo che definisce C è regolare, infatti il gradiente di $\langle Hx; x\rangle$ è $2Hx$ (conto svolto a lezione) e quindi si annulla solo per $x = 0$, che non appartiene a C. Ne consegue che il punto di massimo cercato può essere ottenuto tramite il sistema dei moltiplicatori di Lagrange, ovvero cercando i punti critici della funzione ausiliaria

$$F(x,\lambda) := \langle Mx; x\rangle - \lambda(\langle Hx; x\rangle - 1) \ .$$

Il sistema corrispondente è dato dal vincolo $\langle Hx; x\rangle = 1$ e dall'equazione

$$2Mx - 2\lambda Hx = 0 \quad \text{ovvero} \quad H^{-1}Mx = \lambda x \ .$$

In particolare tale x deve essere un autovettore di $H^{-1}M$, corrispondente all'autovalore λ. Inoltre
$$\langle Mx; x\rangle = \langle \lambda Hx; x\rangle = \lambda \ .$$
Quindi il valore massimo di $\langle Mx; x\rangle$ su C è uguale al massimo autovalore λ di $H^{-1}M$.
Quando H non è definita positiva, l'insieme C è vuoto (quando tutti gli autovalori di H sono negativi) oppure illimitato (H ha autovalori sia negativi che positivi). In quest'ultimo caso può succedere che l'estremo superiore di $\langle Mx; x\rangle$ su C sia uguale a $+\infty$ (anzi, ciò capita di sicuro se M è l'identità o anche una matrice definita positiva). Il fatto che C non sia limitato è noto dalla geometria; volendolo dimostrare, si osservi innanzitutto che esiste $x \neq 0$ tale che $\langle Hx; x\rangle = 0$ (basta prendere un'opportuna combinazione lineare di due autovettori di H corrispondenti ad autovalori di segno opposto). Quindi si prende una successione di vettori x_n tali che $x_n \to x$ e $\langle Hx_n; x_n\rangle \neq 0$: allora i vettori $t_n x_n$ con $t_n := 1/\sqrt{\langle Hx_n; x_n\rangle}$ appartengono a C e sono illimitati in modulo perché $\langle Hx_n; x_n\rangle \to \langle Hx; x\rangle = 0$, ovvero $t_n \to +\infty$.

Commenti

- Seconda parte, esercizio 1c). Si può determinare il massimo di $f(x)$ su C in modo molto più semplice usando una disuguaglianza nota. Dall'equazione $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2$ si ottiene infatti
$$2 \geq x_1^4 + x_3^4 = (x_1^2)^2 + (x_3^2)^2 \geq \frac{(x_1^2 + x_3^2)^2}{2} \tag{4}$$
(l'ultimo passaggio segue dalla disuguaglianza $a^2 + b^2 \geq (a+b)^2/2$). Dunque $(x_1^2 + x_3^2)^2 \leq 4$, ovvero $x_1^2 + x_3^2 \leq 2$, da cui segue
$$f(x) := 2(x_1^2 + x_3^2) - 1 \leq 3 \quad \text{per ogni } x \in S,$$
ovvero 3 è un maggiorante dei valori assunti da f su C.
Per dimostrare che è il massimo dobbiamo far vedere che esiste almeno un punto di C in cui f vale 3. Osserviamo dunque che la prima disuguaglianza in (4) è un uguaglianza se (e solo se) $x_2 = 0$, mentre la seconda lo è se (e solo se) $x_1^2 = x_3^2$. Ne consegue che $f(x) = 3$ se (e solo se) $x_2 = 0$ e $x_1^2 = x_3^2$; tra questi punti, quelli che appartengono a C sono tutti e soli quelli tali che $x_2 = 0$ e $x_1^2 = x_3^2 = x_4^2 = 1$, ovvero $x = (\pm 1, 0, \pm 1\ \pm 1)$.