

Una fondazione minimalista per la matematica costruttiva

Giovanni Sambin

Dipartimento di Matematica P. e A.,
Università di Padova

Una fondazione della matematica è qui concepita non come una giustificazione a posteriori, ma come una possibile scelta del modo in cui si idealizza la realtà per astrarne concetti matematici, ovvero una scelta di quale tipo di informazione si vuole conservare. La fondazione “classica” (logica classica e teoria assiomatica degli insiemi) è una scelta molto statica, in cui l’informazione che un oggetto è effettivamente costruibile equivale alla non contraddittorietà della sua esistenza e quindi di fatto è una informazione perduta. Tipico esempio è l’equivalenza tra \exists e $\neg\forall\neg$; quindi da un enunciato esistenziale non c’è modo in generale di ottenere un testimone.

Appena si abbandona la visione classica, si apre una varietà di possibilità, usualmente accomunate dalla scelta per la logica intuizionistica ma che differiscono nei principi insiemistici. La distinzione principale è tra una visione in cui il contenuto computazionale è rispettato al massimo grado e in cui di conseguenza l’assioma della potenza non è valido, e una visione in cui si cerca la struttura matematica al di là delle specifiche presentazioni e in cui l’assioma di scelta non è valido. La prima scelta è usualmente espressa tramite una teoria dei tipi, ed è più vicina all’informatica, in particolare è indispensabile per poter implementare la matematica in un linguaggio di programmazione. La seconda è usualmente espressa tramite la teoria delle categorie, ed è più vicina alla matematica, in particolare soddisfa il principio di estensionalità.

Entrambe le visioni sembrano quindi ragionevoli, e anzi irrinunciabili; il guaio è che risultati matematici precisi mostrano che in realtà esse sono inconciliabili. Questa situazione ci costringe a fare un grosso passo in avanti dal punto di vista concettuale, e cioè rinunciare all’idea che debba esserci un’unica visione, comprensiva di tutta la realtà. La comunicazione tra le due visioni non è ottenuta per addizione (questo farebbe tornare alla visione classica) ma per sottrazione, cioè determinando una piattaforma comune, in cui non valgono né l’assioma potenza né l’assioma di scelta. Farò una proposta specifica di un sistema con queste caratteristiche, una teoria dei tipi minimale messa a punto assieme a M. E. Maietti.

Come spesso nella storia della matematica, un indebolimento delle assunzioni porta alla luce nuove strutture. La teoria dei tipi minimale è l’ambiente in cui è nata la “basic picture”, una chiara struttura matematica che sta sotto la topologia e che permette l’esplorazione del lato oscuro del pianeta matematico, cioè la trattazione matematica degli enunciati esistenziali.