Teoria della misura di Lebesgue

Paolo Acquistapace

12 novembre 2013

1 Motivazioni

Questo capitolo è dedicato alla teoria della misura e dell'integrazione secondo Lebesgue in una o più variabili. Si potrebbe, più semplicemente, estendere la nozione di integrale di Riemann, descritta nei corsi del primo anno, al caso di più variabili; tuttavia la teoria di Riemann, seppure concettualmente semplice e soddisfacente per molti aspetti, non è abbastanza flessibile da consentire certe operazioni che pure appaiono naturali: ad esempio, si ha

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

solo se A è un insieme misurabile limitato (ad esempio un intervallo) e se vi è convergenza uniforme delle funzioni f_n a f, ossia quando risulta

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Inoltre, se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi misurabili disgiunti, la loro unione non è necessariamente misurabile (esercizio 1.2) né, tanto meno, vale in generale la relazione

$$m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$$

(qui la misura di A è data dall'integrale della funzione caratteristica, cioè $m(A) = \int_a^b I_A(x)\,dx$, essendo $[a,b]$ un arbitrario intervallo contenente A). Infine, le quantità

$$\int_A |f(x)|dx, \qquad \left[\int_A |f(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

non sono norme sullo spazio $\mathcal{R}(A)$ delle funzioni integrabili secondo Riemann su A, ma solo - quando A è compatto - sullo spazio $C(A)$ delle funzioni continue su A; tuttavia, tale spazio, munito di una qualunque di tali norme, non è completo.
Vi sono poi altre, e più importanti, motivazioni "a posteriori": la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue ha dato l'avvio ad enormi sviluppi nell'analisi funzionale, nella teoria della probabilità, ed in svariatissime applicazioni (risoluzione di equazioni differenziali,

calcolo delle variazioni, ricerca operativa, fisica matematica, matematica finanziaria, biomatematica, ed altre ancora).
Esporremo la teoria della misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, seguendo la presentazione introdotta da Carathéodory, la quale, pur essendo poco intuitiva, semplifica la trattazione.

Esercizi 1

1. Esibire una successione di funzioni $\{f_n\}$ definite su $[a,b]$, Riemann integrabili in $[a,b]$, puntualmente convergenti in $[a,b]$, e tali che
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \neq \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$
2. Esibire una successione di sottoinsiemi $\{A_n\}$ di $\mathbb{R}$, misurabili secondo Riemann e disgiunti, tali che la loro unione non sia misurabile secondo Riemann.

2 Volume dei parallelepipedi

L'integrazione secondo Riemann di funzioni di una variabile si fa usualmente sugli intervalli limitati, o anche sugli intervalli illimitati nel caso di integrali impropri. Per gli integrali di funzioni di più variabili, la scelta degli insiemi sui quali fare l'integrale, che chiameremo insiemi "misurabili", è molto più varia: già nel caso di due variabili è del tutto naturale richiedere che fra essi figurino, ad esempio, poligoni, circonferenze, ellissi, nonché intersezioni ed unioni di questi. Prima di definire l'integrale, quindi, conviene individuare una classe, il più possibile vasta, di insiemi misurabili, ed attribuire ad essi una "misura": la misura secondo Lebesgue. Questa misura dovrà essere dotata di certe proprietà basilari: l'insieme vuoto avrà misura nulla, ci sarà monotonia rispetto all'inclusione, e additività sugli insiemi disgiunti. Come vedremo, non si potrà attribuire una misura a *tutti* i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, ma la classe dei sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue sarà comunque molto ricca: ad esempio, per $N = 1$ essa risulterà molto più ampia di quella degli insiemi misurabili secondo Riemann.
I "mattoni" con i quali si costruisce la misura di Lebesgue sono i parallelepipedi N-dimensionali (intervalli, quando $N = 1$) con facce parallele agli assi coordinati.
Un *parallelepipedo* in $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ è un insieme P della forma
$$P = \prod_{i=1}^{N} I_i = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N\,,$$
ove $I_1, \ldots, I_N$ sono intervalli limitati di $\mathbb{R}$. Ricordando che la lunghezza $\ell(I)$ di un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è la differenza fra i due estremi, ossia
$$\ell(I) = \begin{cases} b-a & \text{se } \;]a,b[\subseteq I \subseteq [a,b], \\ +\infty & \text{se } \; I \; \text{ è illimitato,} \end{cases}$$
è naturale porre la seguente

Definizione 2.1 *Il volume N-dimensionale di un parallelepipedo $P = \prod_{i=1}^{N} I_i$ è*

$$v_N(P) = \prod_{i=1}^{N} \ell(I_i).$$

Possiamo estendere la definizione or ora data anche ai parallelepipedi illimitati di $\mathbb{R}^N$, ossia quelli in cui uno o più degli intervalli I_i è una semiretta o tutto $\mathbb{R}$: occorre solo fare la convenzione $0 \cdot \infty = 0$, che è necessaria nel caso che uno degli I_i sia illimitato ed un altro sia invece costituito da un solo punto: in $\mathbb{R}^2$, ad esempio, è naturale che alla retta $\{1\} \times \mathbb{R}$ venga attribuita area nulla. Denoteremo con $\mathcal{P}_N$ la famiglia dei parallelepipedi, limitati o illimitati, di $\mathbb{R}^N$.

Ricordiamo che se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, la *parte interna* $\overset{\circ}{E}$ di E è l'insieme dei punti *interni* di E, ossia gli $\mathbf{x}$ tali che vi è un'opportuna palla $B(\mathbf{x}, r)$ contenuta in E; la *chiusura* $\overline{E}$ di E è l'insieme dei punti *aderenti* ad E, ossia gli $\mathbf{x}$ tali che ogni palla $B(\mathbf{x}, r)$ interseca E; infine, la *frontiera* ∂E di E è l'insieme degli $\mathbf{x}$ tali che ogni palla $B(\mathbf{x}, r)$ interseca sia E che E^c.

Dalla definizione 2.1 segue subito che per ogni parallelepipedo $P \subset \mathbb{R}^N$ si ha

$$v_N(P) = v_N(\overline{P}) = v_N(\overset{\circ}{P}).$$

Vale inoltre il seguente lemma, semplice ma basilare.

Lemma 2.2 *Sia $P \in \mathcal{P}_N$ della forma $P = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$. Fissato un indice $i \in \{1, \ldots, N\}$ e scelto $c \in]a_i, b_i[$, siano*

$$P_1 = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x^i < c\}, \quad P_2 = P \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : x^i > c\};$$

allora si ha

$$v_N(P) = v_n(P_1) + v_N(P_2).$$

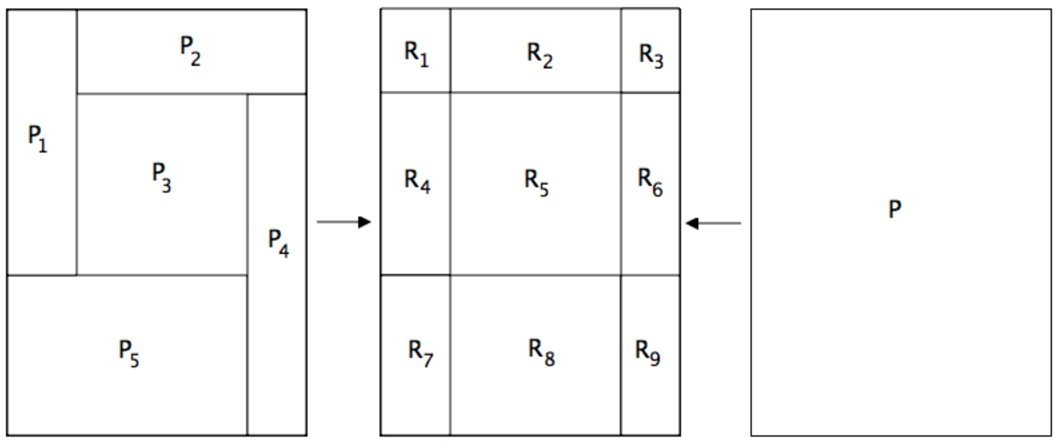
Dimostrazione Basta osservare che

$$\begin{aligned} &v_n(P_1) + v_N(P_2) = \\ &\quad = \left[\prod_{j \neq i} (b_j - a_j)\right] (c - a_i) + \left[\prod_{j \neq i} (b_j - a_j)\right] (b_i - c) = \prod_{j=1}^{N} (b_j - a_j) = v_N(P). \quad \square \end{aligned}$$

Da questo lemma segue facilmente la seguente

Proposizione 2.3 *Se un parallelepipedo P è unione finita di parallelepipedi $P_1, \ldots, P_k$ privi di punti interni comuni, allora*

$$v_N(P) = \sum_{i=1}^{k} v_N(P_i).$$



Dimostrazione Con un numero finito di tagli del tipo descritto nel lemma, tanto P quanto l'unione $\bigcup_{i=1}^k P_i$ si possono ridurre ad una stessa unione $\bigcup_{j=1}^m R_j$ di sotto-parallelepipedi, privi di punti interni comuni, i quali hanno l'ulteriore proprietà di formare una "decomposizione coordinata" di P: con ciò si intende che, posto $P = \prod_{i=1}^N I_i$, ciascun intervallo I_i è decomposto in q_i sottointervalli adiacenti $I_{i,h}$, con $h = 1, \ldots, q_i$, e gli R_j sono tutti e soli i parallelepipedi della forma $I_{1,h_1} \times \ldots \times I_{N,h_N}$ con $h_1 \in \{1, \ldots, q_1\}$, $\ldots$, $h_N \in \{1, \ldots, q_N\}$ (e in particolare $m = \prod_{i=1}^N q_i$). Pertanto, utilizzando il lemma 2.2,

$$\sum_{i=1}^k v_N(P_i) = \sum_{j=1}^m v_N(R_j),$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m v_N(R_j) &= \sum_{h_1=1}^{q_1} \sum_{h_2=1}^{q_2} \ldots \sum_{h_N=1}^{q_N} \prod_{i=1}^N \ell(I_{i,h_i}) = \\ &= \sum_{h_1=1}^{q_1} \ell(I_{1,h_1}) \sum_{h_2=1}^{q_2} \ell(I_{2,h_2}) \ldots \sum_{h_N=1}^{q_N} \ell(I_{N,h_N}) = \\ &= \ell(I_1)\ell(I_2)\ldots\ell(I_N) = v_N(P). \quad \square\end{aligned}$$

La funzione v_N associa ad ogni parallelepipedo di $\mathbb{R}^N$ un numero in $[0, +\infty]$; si noti che, in particolare, $v_N(\emptyset)$ e $v_N(\{\mathbf{a}\})$ valgono 0. Vogliamo estendere tale funzione a sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ più generali, in modo da poterli "misurare". Sarebbe auspicabile poter definire una funzione di insieme m_N che verifichi le seguenti proprietà:

1. $m_N(E)$ è definita per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$;

2. $m_N(P) = v_N(P)$ per ogni parallelepipedo P;

3. (*numerabile additività*) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di insiemi disgiunti, allora

$$m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(E_n);$$

4. (*invarianza per traslazioni*) per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha $m_N(\mathbf{x}+E) = m_N(E)$, ove $\mathbf{x} + E = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{y} - \mathbf{x} \in E\}$.

Sfortunatamente si può dimostrare che non è possibile soddisfare simultaneamente queste richieste: se si vogliono mantenere le proprietà 2, 3 e 4 non si potranno misurare tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$; se, al contrario, si vuole mantenere la proprietà 1, occorrerà indebolire qualcuna delle altre, ad esempio sostituire la 3 con la seguente:

3′. (*numerabile subadditività*) se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, allora

$$m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(E_n).$$

Considerazioni geometriche ci inducono a considerare irrinunciabili le proprietà 2, 3 e 4: di conseguenza, come si vedrà, la classe degli insiemi "misurabili" sarà un sottoinsieme proprio di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Esercizi 2

1. Si provi che la famiglia delle unioni finite di parallelepipedi di $\mathbb{R}^N$ aperti a destra è un'*algebra*, ossia è una classe contenente l'insieme vuoto e chiusa rispetto all'unione ed al passaggio al complementare.

2. Si verifichi che la famiglia delle unioni finite di intervalli aperti di $\mathbb{R}^N$ non è un'algebra.

3 Misura esterna di Lebesgue

Cominciamo ad attribuire ad ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ una "misura esterna" che goda delle proprietà 1, 2, 3′ e 4 del paragrafo 2.

Definizione 3.1 *Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$, la* misura esterna $m_N^*(E)$ *è data da*

$$m_N^*(E) = \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(P_n) : E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n\,,\ P_n \text{ parallelepipedi aperti}\right\}.$$

Dalla definizione seguono subito le seguenti proprietà:

Proposizione 3.2 *Si ha:*

(i) $m_N^*(E) \ge 0 \qquad \forall E \subseteq \mathbb{R}$;

(ii) $m_N^*(\emptyset) = m_N^*(\{\mathbf{x}\}) = 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$;

(iii) (monotonia) *se $E \subseteq F$ allora $m_N^*(E) \le m_N^*(F)$.*

Dimostrazione **(i)** Evidente.
(ii) Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\emptyset \subset \{\mathbf{x}\} \subset \prod_{i=1}^{N}]x^i - \varepsilon, x^i + \varepsilon[$; questo parallelepipedo ha volume $(2\varepsilon)^N$ e ricopre $\{\mathbf{x}\}$ e $\emptyset$. Quindi, per definizione,

$$0 \leq m_N^*(\emptyset) \leq m_N^*(\{\mathbf{x}\}) \leq (2\varepsilon)^N \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui la tesi.
(iii) Se $E \subseteq F$, ogni ricoprimento $\{P_n\}$ di F costituito da parallelepipedi aperti è anche un ricoprimento di E, da cui

$$m_N^*(E) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} v_N(P_n);$$

per l'arbitrarietà del ricoprimento di F, si ottiene $m_N^*(E) \leq m_N^*(F)$. $\square$

Verifichiamo ora la proprietà 2:

Proposizione 3.3 *Se $P \subseteq \mathbb{R}^N$ è un parallelepipedo, allora $m_N^*(P) = v_N(P)$.*

Dimostrazione Supponiamo dapprima $P = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$. Per ogni $\varepsilon > 0$ il parallelepipedo $\prod_{i=1}^{N}]a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon[$ ricopre P, e quindi per definizione si ha

$$m_N^*(P) \leq v_N \left(\prod_{i=1}^{N}]a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon[\right) = \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i + 2\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0,$$

da cui $m_N^*(P) \leq \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i) = v_N(P)$.
Per provare la disuguaglianza opposta, sia $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ricoprimento di P costituito da parallelepipedi aperti; poiché P è compatto, esisterà un sottoricoprimento finito $\{P_{n_1}, \dots, P_{n_m}\}$. Definiamo $Q_i = P_{n_i} \cap P$, cosicché si ha

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} P_{n_i} .$$

Dato che i Q_i non sono disgiunti, con un numero finito di tagli paralleli agli assi isoliamo le parti "ridondanti" e costruiamo una decomposizione coordinata $\{R_h\}_{1 \leq h \leq s}$, tale che

$$P = \bigcup_{i=1}^{m} Q_i = \bigcup_{h=1}^{s} R_h \qquad \text{e} \qquad \mathring{R}_h \cap \mathring{R}_{h'} = \emptyset \quad \text{per} \quad h \neq h';$$

in virtù della proposizione 2.3 ricaviamo allora

$$v_N(P) = \sum_{h=1}^{s} v_N(R_h) \leq \sum_{i=1}^{m} v_N(Q_i) \leq \sum_{i=1}^{m} v_N(P_{n_i}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_N(P_n).$$

Per l'arbitrarietà del ricoprimento $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ concludiamo che $v_N(P) \leq m_N^*(P)$, e pertanto si ha $v_N(P) = m_N^*(P)$ quando P è un parallelepipedo compatto.
Sia ora P tale che $\overline{P} = \prod_{i=1}^{N} [a_i, b_i]$. Poiché per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo

si ha $\prod_{i=1}^N [a_i+\varepsilon, b_i-\varepsilon] \subset P \subseteq \prod_{i=1}^N [a_i,b_i]$, dalla monotonia di m_N^* e da quanto già dimostrato segue
$$\prod_{i=1}^N (b_i-a_i-2\varepsilon) \le m_N^*(P) \le \prod_{i=1}^N (b_i-a_i),$$
e usando nuovamente l'arbitrarietà di ε si ottiene $m_N^*(P) = \prod_{i=1}^N (b_i-a_i) = v_N(P)$. Infine, se P è illimitato, ci sono due casi: esso è il prodotto di N intervalli tutti di lunghezza positiva (nel qual caso $v_N(P)=+\infty$), oppure esso è il prodotto di N intervalli, almeno uno dei quali ha lunghezza nulla (e dunque $v_N(P)=0$). Nel primo caso, per ogni $n\in\mathbb{N}$ esiste un parallelepipedo limitato Q_n di volume n contenuto in P: quindi, per monotonia,
$$m_N^*(P) \ge m_N^*(Q_n) = n \qquad \forall n\in\mathbb{N},$$
cioè $m_N^*(P) = +\infty = v_N(P)$. Nel secondo caso, possiamo supporre ad esempio che si abbia $P = \prod_{i=1}^{N-1} I_i \times \{\mathbf{a}\}$; osserviamo allora che, grazie all'esercizio 3.2,
$$\begin{aligned} m_n^*(P) &= \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty v_N(P_n) : P \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n\,,\ P_n \text{ parallelepipedi chiusi}\right\} \le \\ &\le \inf\left\{\sum_{n=1}^\infty v_N(Q_n) : Q_n = R_n\times\{\mathbf{a}\},\ \prod_{i=1}^{N-1} I_i \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n\,,\ R_n \text{ parallelepipedi chiusi}\right\} = \\ &= 0. \end{aligned}$$
Ciò prova che $m_N^*(P) = v_N(P) = 0$. $\square$

Verifichiamo ora che m_N^* gode della proprietà $3'$ del paragrafo 2.

Proposizione 3.4 *La misura esterna m_N^* è numerabilmente subadditiva.*

Dimostrazione Sia $\{E_n\}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$: dobbiamo provare che
$$m_N^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N^*(E_n).$$
Ciò è ovvio se la serie a secondo membro è divergente; supponiamo quindi che essa sia convergente, cosicché in particolare $m_N^*(E_n) < \infty$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Per definizione di misura esterna, fissato $\varepsilon>0$ esiste un ricoprimento $\{P_{kn}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di E_n costituito da parallelepipedi aperti, tale che
$$\sum_{k\in\mathbb{N}} v_N(P_{kn}) < m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$
La famiglia $\{P_{kn}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ è allora un ricoprimento di $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ costituito da parallelepipedi aperti, e si ha
$$m_N^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \le \sum_{k,n\in\mathbb{N}} v_N(P_{kn}) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \left[m_N^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N^*(E_n) + \varepsilon\,;$$

dall'arbitrarietà di ε segue la tesi. $\square$

Infine osserviamo che m_N^* verifica anche la proprietà 4 del paragrafo 2: infatti il volume dei parallelepipedi è ovviamente invariante per traslazioni; ne segue facilmente, usando la definizione, che anche m_N^* è invariante per traslazioni.
Come vedremo in seguito, la misura esterna *non* verifica invece la proprietà 3 del paragrafo 2, ed anzi non è nemmeno finitamente additiva su $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ (esercizio 8.4). Sarà però numerabilmente additiva su una sottoclasse molto vasta di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Esercizi 3

1. Sia $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Posto $tE = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \frac{\mathbf{x}}{t} \in E\}$, si provi che
$$m_N^*(tE) = |t|^N m_N^*(E).$$

2. Dimostrare che la funzione di insieme m_N^* non cambia se nella definizione 3.1 si fa uso, anziché di parallelepipedi P_n aperti, di parallelepipedi P_n di uno dei seguenti tipi:

   (a) parallelepipedi P_n chiusi;

   (b) parallelepipedi P_n aperti sui lati destri;

   (c) parallelepipedi P_n qualunque;

   (d) parallelepipedi P_n con vertici di coordinate razionali.

3. Si dimostri che ogni intervallo di $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti.

4. Si provi che ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$ ha misura esterna strettamente positiva.

5. Si provi che ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}^N$ ha misura esterna nulla.

6. Per ogni $\varepsilon > 0$ si costruisca un aperto $A \subset \mathbb{R}^N$, denso in $\mathbb{R}^N$, tale che $m_N^*(A) < \varepsilon$.

4 Insiemi misurabili secondo Lebesgue

Introduciamo adesso una classe di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ sulla quale la funzione m_N^* è numerabilmente additiva (proprietà 3 del paragrafo 2).

Definizione 4.1 *Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è detto* misurabile *(secondo Lebesgue) se per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha*
$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c).$$

Un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ è dunque misurabile se, fissato un arbitrario "insieme test" $A \subseteq \mathbb{R}^N$, esso viene "decomposto bene" da E, nel senso che la misura esterna di A è additiva sulle due parti $A \cap E$ e $A \cap E^c$. Si noti che per la subadditività di m_N^* si ha sempre

$$m_N^*(A) \leq m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c),$$

quindi la disuguaglianza significativa è quella opposta. Indicheremo con $\mathcal{M}_N$ la classe dei sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$.

Osservazione 4.2 Dalla definizione segue subito che E è misurabile se e solo se lo è E^c; quindi la classe $\mathcal{M}_N$ è chiusa rispetto al passaggio al complementare. Inoltre è facile vedere che $\mathbb{R}^N$ e $\emptyset$ sono insiemi misurabili.

Più in generale:

Proposizione 4.3 *Se $E \subset \mathbb{R}^N$ e $m_N^*(E) = 0$, allora E è misurabile.*

Dimostrazione Per ogni insieme test $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c)$$

in quanto $m_N^*(A \cap E) \leq m_N^*(E) = 0$. Ne segue la tesi. $\square$

La classe $\mathcal{M}_N$ è chiusa anche rispetto all'unione; si ha infatti:

Proposizione 4.4 *Se $E, F \subseteq \mathbb{R}^N$ sono misurabili, allora $E \cup F$ è misurabile.*

Dimostrazione Sia A un insieme test. Poiché E è misurabile,

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c);$$

poiché F è misurabile, scelto come insieme test $A \cap E^c$ si ha

$$\begin{aligned} m_N^*(A \cap E^c) &= m_N^*(A \cap E^c \cap F) + m_N^*(A \cap E^c \cap F^c) = \\ &= m_N^*(A \cap E^c \cap F) + m_N^*(A \cap (E \cup F)^c), \end{aligned}$$

e dunque

$$m_N^*(A) = m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c \cap F) + m_N^*(A \cap (E \cup F)^c);$$

d'altra parte, essendo

$$(A \cap E) \cup (A \cap E^c \cap F) = A \cap (E \cup F),$$

la subadditività di m_N^* implica che

$$m_N^*(A \cap E) + m_N^*(A \cap E^c \cap F) \geq m_N^*(A \cap (E \cup F)),$$

da cui finalmente

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap (E \cup F)) + m_N^*(A \cap (E \cup F)^c).$$

Ciò prova la misurabilità di $E \cup F$. $\square$

Corollario 4.5 *Se $E, F \subseteq \mathbb{R}^N$ sono misurabili, allora $E \cap F$ ed $E \setminus F$ sono misurabili.*

Dimostrazione Se $E, F \in \mathcal{M}_N$, allora $E^c, F^c \in \mathcal{M}_N$; per la proposizione precedente, $E^c \cup F^c \in \mathcal{M}_N$ e quindi $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{M}_N$. Di qui segue $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{M}_N$. $\square$

La classe $\mathcal{M}_N$ contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto alle operazioni di unione, intersezione e differenza; in particolare, $\mathcal{M}_N$ è un'algebra (v. esercizio 2.1).

Osservazione 4.6 Se E, F sono insiemi misurabili e disgiunti, si ha

$$m_N^*(E \cup F) = m_N^*(E) + m_N^*(F),$$

come si verifica applicando la definizione 4.1 ad E e scegliendo come insieme test $E \cup F$. Di conseguenza, se $E, F \in \mathcal{M}_N$ ed $E \subseteq F$, vale l'uguaglianza

$$m_N^*(F \setminus E) + m_N^*(E) = m_N^*(F),$$

e, se $m_N^*(E) < \infty$,

$$m_N^*(F \setminus E) = m_N^*(F) - m_N^*(E).$$

Nel caso di N insiemi misurabili disgiunti si ha, più generalmente:

Lemma 4.7 *Siano $E_1, \ldots, E_n$ misurabili e disgiunti. Allora per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ si ha*

$$m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{n} E_h\right) = \sum_{h=1}^{n} m_N^*(A \cap E_h).$$

Dimostrazione Ragioniamo per induzione. Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo che la tesi sia vera per n insiemi misurabili disgiunti, e consideriamo $n+1$ insiemi $E_1, \ldots, E_{n+1} \in \mathcal{M}_N$ fra loro disgiunti. Poiché E_{n+1} è misurabile, scegliendo come insieme test $A \cap \bigcup_{h=1}^{n+1} E_h$, si ha

$$\begin{aligned} m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{n+1} E_h\right) &= \\ &= m_N^*\left(A \cap \left(\bigcup_{h=1}^{n+1} E_h\right) \cap E_{n+1}\right) + m_N^*\left(A \cap \left(\bigcup_{h=1}^{n+1} E_h\right) \cap E_{n+1}^c\right) = \\ &= m_N^*(A \cap E_{n+1}) + m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{n} E_h\right); \end{aligned}$$

ma, per ipotesi induttiva,

$$m_N^*\left(A \cap \bigcup_{h=1}^{n} E_h\right) = \sum_{h=1}^{n} m_N^*(A \cap E_h),$$

da cui

$$m_N^*\left(A\cap\bigcup_{h=1}^{n+1}E_h\right)=m_N^*(A\cap E_{n+1})+\sum_{h=1}^{n}m_N^*(A\cap E_h)=\sum_{h=1}^{n+1}m^*(A\cap E_h).\quad\square$$

Grazie al lemma precedente, siamo in grado di provare che la classe $\mathcal{M}_N$ è chiusa rispetto all'unione numerabile (e quindi rispetto all'intersezione numerabile).

Proposizione 4.8 *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{M}_N$, *allora* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n\in\mathcal{M}_N$.

Dimostrazione Anzitutto, scriviamo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ come unione numerabile di insiemi misurabili e *disgiunti*: basta porre

$$F_0=E_0,\qquad F_{n+1}=E_{n+1}\setminus\bigcup_{k=0}^{n}F_k\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

per avere che gli F_n sono disgiunti, appartengono a $\mathcal{M}_N$ e verificano

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n.$$

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^N$ un insieme test: per ogni $p\in\mathbb{N}$ possiamo scrivere, grazie al lemma precedente,

$$\begin{aligned}
m_N^*(A) &= m_N^*\left(A\cap\bigcup_{n=0}^{p}F_n\right)+m_N^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=0}^{p}F_n\right)^c\right)=\\
&=\sum_{n=0}^{p}m_N^*(A\cap F_n)+m_N^*\left(A\cap\bigcap_{n=0}^{p}F_n^c\right)\geq\\
&\geq\sum_{n=0}^{p}m_N^*(A\cap F_n)+m_N^*\left(A\cap\bigcap_{n=0}^{\infty}F_n^c\right)=\\
&=\sum_{n=0}^{p}m_N^*(A\cap F_n)+m_N^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n\right)^c\right).
\end{aligned}$$

Se $p\to\infty$, in virtù della numerabile subadditività di m_N^* otteniamo

$$\begin{aligned}
m_N^*(A) &\geq \sum_{n=0}^{\infty}m_N^*(A\cap F_n)+m_N^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n\right)^c\right)\geq\\
&\geq m_N^*\left(A\cap\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n\right)+m^*\left(A\cap\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}F_n\right)^c\right).
\end{aligned}$$

Ciò prova che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}E_n$ è misurabile. $\square$

Dunque la classe $\mathcal{M}_N$ contiene l'insieme vuoto ed è chiusa rispetto all'unione numerabile ed al passaggio al complementare. Una famiglia di insiemi dotata di queste proprietà si chiama σ-*algebra*, o *tribù*; $\mathcal{M}_N$ è pertanto una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Proviamo finalmente che m_N^* è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}_N$.

Proposizione 4.9 *Se* $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N$ *e gli* E_n *sono fra loro disgiunti, allora si ha*

$$m_N^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N^*(E_n).$$

Dimostrazione Poiché m_N^* è numerabilmente subadditiva, la disuguaglianza ($\leq$) è evidente; proviamo l'altra. Per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha, utilizzando la monotonia di m_N^* ed il lemma 4.7 con $A = \mathbb{R}^N$,

$$m_N^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq m_N^*\left(\bigcup_{n=0}^{p} E_n\right) = \sum_{n=0}^{p} m_N^*(E_n),$$

da cui per $p \to \infty$

$$m_N^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \geq \sum_{n=0}^{\infty} m^*(E_n). \quad \square$$

Esercizi 4

1. Per ogni $\alpha \in [0,\infty]$ si determini una successione di aperti $\{A_n\}$ di $\mathbb{R}^N$ tali che

$$A_n \supseteq A_{n+1}, \quad m_N^*(A_n) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m_N^*\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \alpha.$$

2. Sia $E \subset \mathbb{R}$ con $m_1^*(E) = 0$ e sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata limitata. Si provi che $f(E)$ ha misura esterna nulla. Si provi poi lo stesso risultato supponendo $f \in C^1(\mathbb{R})$.

3. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. La *densità di* E *nel punto* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ è il limite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{m_N^*(E \cap B(\mathbf{x},h))}{m_N^*(B(\mathbf{x},h))}.$$

   (i) Tale limite esiste sempre?

   (ii) Si provi che per $N = 1$ l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \cos\frac{1}{x} > \frac{1}{2}\right\}$$

   ha densità $\frac{1}{3}$ nel punto $x = 0$.

   [**Traccia:** per (i) si consideri, con $N = 1$, $E = \bigcup_{n=0}^{\infty}[2^{-2n-1}, 2^{-2n}]$; per (ii), detto E l'insieme in questione, si verifichi che $\frac{1}{h}m_1^*(E\cap[0,h[\,)$ è uguale a $\frac{1}{6h\pi}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/36}$ quando $\frac{3}{\pi(6k+5)} < h < \frac{3}{\pi(6k+1)}$, mentre è uguale a $\frac{1}{6h\pi}\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n^2-1/36} + 1 - \frac{3}{h\pi(6k+1)}$ quando $\frac{3}{\pi(6k+1)} \leq h \leq \frac{3}{\pi(6k-1)}$. Se $h \to 0^+$ (e quindi $k \to \infty$), si provi che il termine con la serie tende a $\frac{1}{3}$.]

4. Sia $\mathcal{F}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Si provi che $\mathcal{F}$ è finita, oppure $\mathcal{F}$ contiene una infinità più che numerabile di elementi.
[**Traccia:** se, per assurdo, fosse $\mathcal{F} = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con gli E_n tutti distinti, si costruisca una successione $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ di insiemi disgiunti; dopodiché, posto $\mathcal{F}' = \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si metta $\mathcal{P}(\mathcal{F}')$ in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.]

5 Misurabilità dei parallelepipedi

La classe degli insiemi misurabili non avrebbe l'importanza che ha, se non contenesse i parallelepipedi di $\mathbb{R}^N$: questo è ciò che andiamo a dimostrare.

Proposizione 5.1 *I parallelepipedi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili secondo Lebesgue.*

Dimostrazione Sappiamo già che $\mathbb{R}^N = \emptyset^c$ è misurabile. Osserviamo poi che ogni paarllelepipedo *non* aperto è l'unione di un parallelepipedo aperto e di un numero finito di sottoinsiemi di facce $(N-1)$-dimensionali, dunque di misura nulla, e pertanto esso è misurabile se lo sono tutti i parallelepipedi *aperti*. Sia dunque P un parallelepipedo aperto e sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme test. Se $m_N^*(A) = \infty$, la disuguaglianza da provare, ossia

$$m_N^*(A) \geq m_N^*(A \cap P) + m_N^*(A \cap P^c),$$

è evidente. Se invece $m_N^*(A) < \infty$, per definizione, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento $\{P_n\}$ di A, fatto di parallelepipedi aperti, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(P_n) < m_N^*(A) + \varepsilon.$$

Notiamo che la famiglia di parallelepipedi $\{P_n \cap P\}$ è un ricoprimento aperto di $A \cap P$; inoltre, ciascun insieme $P_n \setminus \overline{P}$ può essere decomposto con un numero finito di tagli in una unione finita $\bigcup_{j=1}^{k_n} R_{jn}$ di parallelepipedi privi di punti interni comuni. Dunque per la proposizione 2.3 si ha

$$v_N(P_n) = v_N(P_n \cap P) + \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_{jn}).$$

Ne segue

$$\begin{aligned} m_N^*(A) &> -\varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(P_n) = -\varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(P_n \cap P) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} v_N(R_{jn}) = \\ &= -\varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(P_n \cap P) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{k_n} m_N^*(R_{jn}) \geq \\ &\geq -\varepsilon + m_N^*(A \cap P) + m_N^*(A \setminus \overline{P}). \end{aligned}$$

D'altra parte, si ha $A \setminus P = (A \setminus \overline{P}) \cup (\overline{P} \setminus P) \subseteq (A \setminus \overline{P}) \cup \partial P$, da cui $m_N^*(A \setminus P) = m_N^*(A \setminus \overline{P})$; ne segue

$$m_N^*(A) > -\varepsilon + m_N^*(A \cap P) + m_N^*(A \setminus P),$$

e la tesi segue per l'arbitrarietà di ε. □

Corollario 5.2 *Gli aperti ed i chiusi di $\mathbb{R}^N$ sono misurabili secondo Lebesgue.*

Dimostrazione È sufficiente provare che ogni aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$ è unione numerabile di parallelepipedi aperti. A questo scopo, definiamo per $n \in \mathbb{N}^+$ gli insiemi

$$A_n = \left\{\mathbf{x} \in A : d(\mathbf{x}, \partial A) > \frac{1}{n}\right\} \cap B(\mathbf{0}, n),$$

ove la distanza $d(\mathbf{x}, \partial A)$ di $\mathbf{x}$ da ∂A è definita da

$$d(\mathbf{x}, \partial A) = \inf_{\mathbf{y} \in \partial A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|_N .$$

Gli A_n sono aperti limitati, con $A_n \subseteq A_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Consideriamo i compatti

$$\overline{A_1},\ \overline{A_2} \setminus A_1,\ \ldots,\ \overline{A_n} \setminus A_{n-1},\ \ldots,$$

la cui unione è ancora A. Indichiamo con $Q(\mathbf{x}, r)$ il cubo di centro $\mathbf{x}$ inscritto nella palla $B(\mathbf{x}, r)$: nel compatto $\overline{A_1}$ il ricoprimento $\{Q(\mathbf{x}, \frac{1}{2})\}_{\mathbf{x} \in \overline{A_1}}$ ha un sottoricoprimento finito $\{Q_1^{(1)}, \ldots, Q_{k_1}^{(1)}\}$. Iterando, nel compatto $\overline{A_n} \setminus A_{n-1}$ il ricoprimento $\{Q(\mathbf{x}, \frac{1}{n+1})\}_{\mathbf{x} \in \overline{A_n} \setminus A_{n-1}}$ ha un sottoricoprimento finito $\{Q_1^{(n)}, \ldots, Q_{k_n}^{(n)}\}$. La scelta dei lati dei cubi fa sì che tutti i cubi $Q_j^{(n)}$ siano contenuti in A: pertanto

$$A = \overline{A_1} \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} (\overline{A_n} \setminus A_{n-1}) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{k_n} Q_j^{(n)} \subseteq A$$

e pertanto A è l'unione dei cubi $Q_j^{(n)}$. $\square$

Naturalmente, oltre agli aperti ed ai chiusi, la σ-algebra $\mathcal{M}_N$ contiene molti altri insiemi: indicando con $\mathcal{A}_N$ la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^N$, dovrà appartenere a $\mathcal{M}_N$ tutto ciò che si ottiene da $\mathcal{A}_N$ con unioni ed intersezioni numerabili. La *più piccola* σ-algebra che contiene $\mathcal{A}_N$ (esercizio 5.5) si indica con $\mathcal{B}_N$ ed i suoi elementi si chiamano *boreliani*. Si dice che $\mathcal{B}_N$ è la σ-algebra *generata* da $\mathcal{A}_N$. Vedremo in seguito che $\mathcal{M}_N$ contiene propriamente $\mathcal{B}_N$.

Esercizi 5

1. Si verifichi che la funzione distanza da un insieme è continua, e che anzi

$$|d(\mathbf{x}, E) - d(\mathbf{x}', E)| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|_N \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N.$$

2. Si verifichi che l'insieme

$$\left\{x \in \left]0, \frac{1}{\pi}\right] : \sin\frac{1}{x} > 0\right\}$$

è misurabile in $\mathbb{R}$; se ne calcoli la misura esterna.

3. Sia E l'insieme dei numeri di $[0,1]$ che possiedono uno sviluppo decimale ove non compare mai la cifra 9. Si dimostri che E è misurabile in $\mathbb{R}$ e se ne calcoli la misura esterna.

4. Per ogni $x \in [0,1]$ sia $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ la successione delle cifre decimali di x (scegliendo lo sviluppo infinito nei casi di ambiguità). Si calcoli la misura di Lebesgue m_1 dei seguenti insiemi:

   (a) $E = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n$ è dispari per ogni $n \in \mathbb{N}^+\}$,

   (b) $F = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n$ è definitivamente dispari$\}$,

   (c) $G = \{x \in [0,1] : \ \alpha_n$ è dispari per infiniti indici $n \in \mathbb{N}^+\}$.

5. Sia X un insieme, e sia $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ un'arbitraria famiglia di σ-algebre di sottoinsiemi di X. Si provi che $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ è una σ-algebra. Se ne deduca che, data una famiglia qualunque $\mathcal{G}$ di sottoinsiemi di X, esiste la *minima* σ-algebra contenente $\mathcal{G}$ (essa si chiama la σ-algebra *generata* da $\mathcal{G}$).

6. Sia f una funzione non negativa, intgrabile secondo Riemann su $[a,b]$. Si provi che il sottografico di f, ossia l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$$

   è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^2$, con $m_2(A) = \int_a^b f(x)\,dx$. Si provi inoltre che il grafico di f è anch'esso misurabile in $\mathbb{R}^2$ con misura nulla.

6 Insieme di Cantor

Per rendersi conto di quanto la nozione di misurabilità secondo Lebesgue sia generale, e di quanto la misura esterna si discosti dall'idea intuitiva di "estensione" di un insieme, è utile considerare l'esempio che segue.
Sia $\xi \in]0, \frac{1}{3}]$. Dall'intervallo $[0,1]$ togliamo i punti dell'intervallo aperto I_1^1 di centro $\frac{1}{2}$ e ampiezza ξ; dai due intervalli chiusi rimasti togliamo i due intervalli aperti I_1^2, I_2^2 che hanno come centri i punti medi e ampiezza ξ^2; dai quattro intervalli chiusi residui togliamo i quattro intervalli aperti $I_1^3, I_2^3, I_3^3, I_4^3$ con centri nei punti medi ed ampiezza ξ^3; al passo k-simo toglieremo dai 2^{k-1} intervalli chiusi residui le 2^{k-1} parti centrali aperte di ampiezza ξ^k. Procedendo in questa maniera per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, ciò che resta "alla fine" è l'insieme

$$C_\xi = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} I_j^k \,,$$

il quale è chiuso, quindi misurabile; la sua misura è (proposizione 4.9)

$$m(C_\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{k-1}} \xi^k = 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (2\xi)^k = \frac{1-3\xi}{1-2\xi}.$$

Si noti che C_ξ è privo di punti interni: infatti per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ esso non può contenere intervalli di ampiezza superiore a 2^{-k} (perché con il solo passo k-simo si lasciano 2^k intervalli disgiunti di uguale ampiezza che non ricoprono $[0,1]$: tale ampiezza quindi è minore di 2^{-k}). In particolare, C_ξ è totalmente sconnesso, cioè la componente connessa di ogni punto $x \in C_\xi$ è $\{x\}$. Inoltre C_ξ è perfetto, ossia tutti i suoi punti sono punti d'accumulazione per C_ξ: infatti se $x \in C_\xi$ allora per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ il punto x sta in uno dei 2^k intervalli residui del passo k-simo, per cui gli estremi di tale intervallo sono punti di C_ξ che distano da x meno di 2^{-k}.
Per $\xi = 1/3$, l'insieme $C_{1/3}$ (che è quello effettivamente introdotto da Cantor) ha misura nulla. Esso si può costruire anche nel modo seguente: per ogni $x \in [0,1]$ consideriamo lo sviluppo ternario

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \qquad \alpha_k \in \{0,1,2\}.$$

Tale sviluppo non è sempre unico: ad esempio, $\frac{1}{3}$ si scrive come $0.0\overline{2}$ oppure come 0.1. È facile verificare che $C_{1/3}$ è costituito dai numeri $x \in [0,1]$ che ammettono uno sviluppo ternario in cui non compare mai la cifra 1. Così, $\frac{1}{3} \in C_{1/3}$ mentre $\frac{1}{2} = 0.\overline{1} \notin C_{1/3}$ (perché lo sviluppo di $\frac{1}{2}$ è unico).
L'insieme $C_{1/3}$, pur avendo misura esterna nulla, è più che numerabile: se infatti si avesse $C_{1/3} = \{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, con

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{3^k}, \qquad \alpha_k^{(n)} \in \{0,2\},$$

allora scegliendo

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k}, \qquad \alpha_n = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 2 \\ 2 & \text{se } \alpha_n^{(n)} = 0, \end{cases}$$

avremmo $y \in C_{1/3}$ ma $y \neq x^{(n)}$ per ogni n, dato che la n-sima cifra ternaria di y è diversa da quella di $x^{(n)}$ (per una stima della distanza $|y - x^{(n)}|$ si veda l'esercizio 6.1). Ciò è assurdo.
Una versione N-dimensionale dell'insieme ternario di Cantor, che ne eredita le stesse proprietà, si ottiene togliendo dal cubo N-dimensionale $[0,1]^N$ il cubo centrale di lato $\frac{1}{3}$, poi togliendo dai $3^N - 1$ cubi residui di lato $\frac{1}{3}$ il cubo centrale di lato $\frac{1}{9}$, e iterando il procedimento. Si ottiene alla fine un chiuso di misura N-dimensionale nulla.

Esercizi 6

1. Con riferimento all'argomentazione che mostra la non numerabilità di $C_{1/3}$, si provi che $|y - x^{(n)}| \geq 3^{-n}$.

2. Si costruisca un insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^N$, tale che

$$0 < m_N^*(E) < \infty, \qquad m^*(E \cap P) < v_N(P)$$

per ogni parallelepipedo aperto non vuoto P.

3. Si mostri che $\mathcal{M}_N$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

4. La funzione caratteristica χ_{C_ξ} degli insiemi di Cantor C_ξ, definita da

$$\chi_{C_\xi}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C_\xi \\ 0 & \text{se } x \notin C_\xi \,, \end{cases}$$

è Riemann integrabile su $[0,1]$?

7 Proprietà della misura di Lebesgue

Anzitutto, definiamo la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$:

Definizione 7.1 *La funzione di insieme*

$$m_N = m_N^*|_{\mathcal{M}_N} : \mathcal{M}_N \to [0, +\infty]$$

si chiama misura di Lebesgue*.*

Dalle proposizioni 3.2 e 4.9 segue che m_N è monotona, numerabilmente additiva ed invariante per traslazioni, con $m_N(\emptyset) = 0$.
Vediamo adesso come si comporta la misura di Lebesgue rispetto alle successioni monotone di insiemi misurabili.

Proposizione 7.2 *Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili.*

(i) *Se $E_n \subseteq E_{n+1}$, allora*

$$m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m_N(E_n).$$

(ii) *Se $E_n \supseteq E_{n+1}$ e se esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m_N(E_{n_0}) < \infty$, allora*

$$m_N\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m_N(E_n).$$

Dimostrazione **(i)** Poniamo

$$F_0 = E_0, \qquad F_{n+1} = E_{n+1} \setminus E_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora si ha

$$E_p = \bigcup_{n=0}^{p} F_n \quad \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \,,$$

e gli F_n sono misurabili e disgiunti. Quindi, usando la numerabile additività di m_N,

$$\begin{aligned} m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) &= m_N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(F_n) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p} m_N(F_n) = \\ &= \lim_{p\to\infty} m_N\left(\bigcup_{n=0}^{p} F_n\right) = \lim_{p\to\infty} m_N(E_p). \end{aligned}$$

(ii) Poniamo $F_n = E_{n_0} \setminus E_n$ per ogni $n > n_0$. Allora gli F_n sono misurabili e $F_n \subseteq F_{n+1}$; inoltre

$$\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n = E_{n_0} \setminus \bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n \,.$$

Per (i) e per l'osservazione 4.6 abbiamo

$$m_N(E_{n_0}) - m_N\left(\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n\right) = m_N\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} F_n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} m_N(F_n) = \lim_{n\to\infty} [m_N(E_{n_0}) - m_N(E_n)] = m_N(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} m_N(E_n).$$

Ne segue la tesi poiché, ovviamente,

$$\bigcap_{n=n_0}^{\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \,. \quad \square$$

Osserviamo che l'ipotesi che esista $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $m_N(E_{n_0}) < \infty$ è essenziale nell'enunciato (ii): se ad esempio $N = 1$ e $E_n = [n, \infty[$, si ha $E_n \supset E_{n+1}$, $m_1(E_n) = \infty$ per ogni n, ma l'intersezione degli E_n, essendo vuota, ha misura nulla.

Diamo ora un'importante caratterizzazione degli insiemi misurabili: sono quegli insiemi E che differiscono poco, in termini di m_N^*, sia dagli aperti (contenenti E), sia dai chiusi (contenuti in E).

Proposizione 7.3 *Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. Sono fatti equivalenti:*

(i) $E \in \mathcal{M}_N$;

(ii) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m_N^*(A \setminus E) < \varepsilon$;*

(iii) *esiste un boreliano $B \supseteq E$ tale che $m_N^*(B \setminus E) = 0$;*

(iv) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $C \subseteq E$ tale che $m_N^*(E \setminus C) < \varepsilon$;*

(v) *esiste un boreliano $D \subseteq E$ tale che $m_N^*(E \setminus D) = 0$.*

Dimostrazione Proveremo le due catene di implicazioni

$$(\mathbf{i}) \Longrightarrow (\mathbf{ii}) \Longrightarrow (\mathbf{iii}) \Longrightarrow (\mathbf{i}), \qquad (\mathbf{i}) \Longrightarrow (\mathbf{iv}) \Longrightarrow (\mathbf{v}) \Longrightarrow (\mathbf{i}).$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supponiamo dapprima $m_N(E) < \infty$. Per definizione di m_N^*, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento $\{P_n\}$ di E fatto di parallelepipedi aperti, tale che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} v_N(P_n) < m_N(E) + \varepsilon;$$

dunque, posto $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$, l'aperto A verifica, per subadditività numerabile,

$$m_N(A) < m_N(E) + \varepsilon,$$

e dal fatto che $m_N(E) < \infty$ segue allora (osservazione 4.6)

$$m_N(A \setminus E) = m_N(A) - m_N(E) < \varepsilon.$$

Sia ora $m_N(E) = \infty$. Scriviamo $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E \cap Q_n$, ove $\{Q_n\}$ è una famiglia di parallelepipedi privi di punti interni comuni, la cui unione sia $\mathbb{R}^N$. Dato che $m_N(E\cap Q_n) < \infty$, per quanto già dimostrato esistono degli aperti $A_n \supseteq E \cap Q_n$ tali che

$$m(A_n \setminus (E \cap Q_n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

L'insieme $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un aperto contenente E, e poiché

$$A \setminus E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (E \cap Q_k) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus (E \cap Q_n)),$$

si conclude che

$$m_N(A \setminus E) < \sum_{n\in\mathbb{N}} m_N(A_n \setminus (E \cap Q_n)) < \varepsilon.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia A_n un aperto contenente E, tale che

$$m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1};$$

l'insieme $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è un boreliano contenente E e si ha, per monotonia,

$$m_N^*(B \setminus E) \le m_N^*(A_n \setminus E) < \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

cioè $m_N^*(B \setminus E) = 0$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Scrivendo $E = B \setminus (B \setminus E)$, la tesi segue dal fatto che l'insieme B è misurabile perché boreliano, mentre l'insieme $B \setminus E$ è misurabile avendo, per ipotesi, misura esterna nulla (proposizione 4.3). Dunque E è misurabile.

(i) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (i) Queste implicazioni si dimostrano facilmente applicando ad E^c gli enunciati già dimostrati. □

Le proprietà **(ii)** $\mapsto$ **(v)** della proposizione precedente si sintetizzano dicendo che la misura di Lebesgue è una misura *regolare*.

Esercizi 7

1. Dimostrare che se E, F sono sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$, si ha

$$m_N(A \cup B) + m_N(A \cap B) = m_N(A) + m_N(B).$$

2. Si provi che per ogni successione $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ tale che $E_n \subseteq E_{n+1}$ risulta

$$m_N^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m_N^*(E_n).$$

[**Traccia:** una disuguaglianza è banale. Per l'altra, possiamo senz'altro supporre che $\lim_{n\to\infty} m_N^*(E_n) < \infty$; scelto un aperto $A_n \supseteq E_n$ in modo che $m_N(A_n) < m_N^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon$, sia $F_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$; si mostri per induzione che $m_N(F_n) < m_N^*(E_n) + \varepsilon \sum_{k=0}^n 2^{-k-1}$. Poiché $m_N(F_n) \longrightarrow m_N\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$, se ne deduca che $m_N^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \le \lim_{n\to\infty} m_N^*(E_n) + \varepsilon$.]

3. Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. L'insieme E' degli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ tali che $\mathbf{x} \in E_n$ per infiniti valori di n si chiama *massimo limite* della successione $\{E_n\}$ e si scrive $E' = \limsup_{n\to\infty} E_n$, mentre l'insieme E'' degli $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ tali che $\mathbf{x} \in E_n$ definitivamente si chiama *minimo limite* di $\{E_n\}$ e si scrive $E'' = \liminf_{n\to\infty} E_n$.

   (i) Si verifichi che
   $$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} E_m , \qquad \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} E_m .$$

   (ii) Si provi che
   $$m_N\left(\liminf_{n\to\infty} E_n\right) \le \liminf_{n\to\infty} m_N(E_n),$$
   e che se $m_N\left(\bigcup_{n=0}^\infty E_n\right) < \infty$ allora
   $$m_N\left(\limsup_{n\to\infty} E_n\right) \ge \limsup_{n\to\infty} m_N(E_n).$$

   (iii) Si mostri che la seconda disuguaglianza è in generale falsa se $m_N\left(\bigcup_{n=0}^\infty E_n\right) = \infty$.

   (iv) Si verifichi che $\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n$ e si provi che se la successione $\{E_n\}$ è monotona rispetto all'inclusione, allora $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$.

4. Provare che se $E \in \mathcal{M}_N$ è un insieme di misura positiva, allora per ogni $t \in [0, m_N(E)]$ esiste un insieme boreliano $B_t \subseteq E$ tale che $m_N(B_t) = t$.

5. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$. Si provi che esiste un boreliano B, intersezione numerabile di aperti, che contiene E ed è tale che $m_N(B) = m_N^*(E)$.

6. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ con $m_N^*(E) < \infty$. Si provi che E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se
   $$m_N^*(E) = \sup\{m_N(B) : B \in \mathcal{B}, B \subseteq E\}.$$
   Si mostri anche che se $m_N^*(E) = \infty$ l'enunciato precedente è falso.

7. Sia $N = 1$ e sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme tale che $m_1^*(E) < \infty$. Si provi che E è misurabile secondo Lebesgue se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita di intervalli disgiunti $I_1, \ldots, I_p$ tali che
   $$m_1^*\left(E \triangle \bigcup_{i=1}^p I_i\right) < \varepsilon,$$

ove $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è la *differenza simmetrica* fra gli insiemi A, B. [**Traccia:** per la necessità, approssimare E con aperti dall'esterno e ricordare che ogni aperto è unione al più numerabile di intervalli disgiunti. Per la sufficienza: dapprima selezionare un aperto $A \supseteq E$ tale che $m_1(A) < m_1^*(E) + \varepsilon$; poi, posto $F = A \cap (\bigcup_{i=1}^p I_i)$, verificare che $m_1^*(F \triangle E) < \varepsilon$; infine, utilizzando le inclusioni $A \setminus E \subseteq (A \setminus F) \cup (F \setminus E)$ e $E \subseteq F \cup (E \setminus F)$, provare che $m_1^*(A \setminus E) < 3\varepsilon$.]

8 Un insieme non misurabile

La σ-algebra $\mathcal{M}_N$ degli insiemi Lebesgue misurabili è molto vasta, ma non esaurisce la classe di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$. Tuttavia, per esibire un insieme non misurabile non si può fare a meno del seguente

Assioma della scelta *Per ogni insieme non vuoto X esiste una* funzione di scelta *$f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ tale che $f(E) \in E$ per ogni $E \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.*

In altre parole, l'assioma della scelta dice che è possibile selezionare, per mezzo della funzione f, esattamente un elemento da ciascun sottoinsieme di X. La cosa sarebbe banale se X avesse cardinalità finita, e facile se X fosse numerabile (esercizio 8.6), ma per insiemi di cardinalità più alta questa proprietà non è altrimenti dimostrabile.

L'insieme che andiamo a costruire fu introdotto da Vitali. Sia $N = 1$. Consideriamo in $[0, 1]$ la relazione di equivalenza

$$x \simeq y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Vi è un'infinità più che numerabile di classi di equivalenza, ognuna delle quali contiene un'infinità numerabile di elementi. Costruiamo un insieme V prendendo, grazie all'assioma della scelta, esattamente un elemento da ciascuna classe di equivalenza: V è un sottoinsieme più che numerabile di $[0, 1]$.
Sia ora $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una numerazione di $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, e sia $V_n = V + q_n$. Notiamo che $V_n \cap V_m = \emptyset$ se $n \neq m$: infatti se $x \in V_n \cap V_m$ allora $x = a + q_n = b + q_m$ con $a, b \in V$; di qui segue $a - b = q_m - q_n \in \mathbb{Q}$, da cui (per come è stato costruito V) $a = b$. Ne deduciamo $q_n = q_m$, ed infine $n = m$. Notiamo anche che valgono le inclusioni

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \subseteq [-1, 2],$$

e quindi, per la monotonia di m_1^*,

$$1 \leq m_1^*\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n\right) \leq 3.$$

Se V fosse misurabile secondo Lebesgue, anche i suoi traslati V_n sarebbero misurabili ed avrebbero la stessa misura; per l'additività numerabile di m si ricaverebbe

$$m_1\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1(V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} m_1(V) = \begin{cases} 0 & \text{se } m_1(V) = 0 \\ +\infty & \text{se } m_1(V) > 0, \end{cases}$$

e ciò contraddice il fatto che la misura di $\bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ è compresa fra 1 e 3. Pertanto V non può essere misurabile.

Esercizi 8

1. Dimostrare che per ogni $\lambda \in]0,+\infty]$ esiste un sottoinsieme $U \subset [0,\infty[$, non misurabile secondo Lebesgue, tale che $m_1^*(U) = \lambda$.

2. Dato un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}$ di misura positiva, si provi che esiste un sottoinsieme $W \subset E$ che non è Lebesgue misurabile.

3. Sia $V_n = V + q_n$, come nella costruzione dell'insieme non misurabile di Vitali. Posto $E_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} V_m$, si provi che
$$m_1^*(E_n) < \infty, \quad E_n \supset E_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to\infty} m_1^*(E_n) > m_1^*\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} E_n\right).$$

4. Siano V, W sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non misurabili, disgiunti e tali che $V \cup W$ sia misurabile. Si provi che se $m_1(V \cup W) < \infty$ allora
$$m_1(V \cup W) < m_1^*(V) + m_1^*(W).$$

5. Si costruisca un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, $N > 1$, non misurabile secondo Lebesgue.

6. Dato un insieme numerabile X, si costruisca una funzione di scelta per X.