Meccanismi elettorali:
la matematica è un'opinione

Introduzione

Il titolo di queste note si riferisce a due aspetti tipici dei meccanismi elettorali:

(i) i meccanismi elettorali obbediscono a criteri *politici* prima che *matematici*: tipicamente si punta a garantire, molto più che la maggiore equità possibile, l'individuazione di una chiara maggioranza;

(ii) d'altra parte, tutti i meccanismi elettorali, per loro natura, non sono mai perfettamente equi dal punto di vista matematico.

Per cominciare, fissiamo il problema fondamentale: vi è un'elezione che mette in palio un certo numero S di seggi in un consesso, e vi è una popolazione di elettori che esprimono un certo numero V di voti validi (le *schede bianche* e le *schede nulle*, per definizione, non contano), suddivisi fra vari partiti $X_1, \ldots, X_n$, i quali si contendono i seggi disponibili. Per un generico partito X_i, indichiamo con V_i e S_i il numero di voti da esso ottenuti e il numero di seggi ad esso attribuiti. Chiaramente deve essere

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V, \qquad \sum_{i=1}^{n} S_i = S.$$

Il problema è quello di *ripartire i seggi*, cioè di come scegliere la funzione $X_i \mapsto S_i$.
La scelta non può essere arbitraria: ci sono alcune proprietà generali molto ragionevoli, che sarebbero desiderabili per avere un buon meccanismo elettorale, e che andiamo ad elencare.

Proprietà di monotonia rispetto ai voti. Se $V_i > V_j$, allora deve essere $S_i \geq S_j$.
Questo è proprio il minimo che bisogna pretendere!

Proprietà di monotonia rispetto ai seggi. Se il numero totale di seggi nel consesso aumenta, a parità di distribuzione dei voti nessun partito può perdere seggi.

Anche questa condizione è del tutto naturale.

Proprietà di monotonia rispetto al consenso. Se un partito in due elezioni successive mantiene o aumenta i suoi voti, allora non può perdere seggi.

Questa affermazione appare indiscutibile.

Proprietà di maggioranza. Se un partito X_i ottiene la *maggioranza assoluta* dei voti, ossia $V_i > \frac{V}{2}$, allora esso deve ottenere la maggioranza assoluta dei seggi, cioè deve essere $S_i > \frac{S}{2}$, o almeno $S_i \geq \frac{S}{2}$.

Chi potrebbe opporsi a questo requisito?

Proprietà di superadditività. Supponiamo che due partiti X e Y si uniscano in un nuovo partito Z: se, in una nuova votazione, Z ottiene un numero di voti pari alla somma dei voti guadagnati da X e Y nella votazione precedente, allora Z deve ottenere un numero di seggi almeno pari alla somma dei seggi ottenuti da X e Y nella votazione precedente.

Questa proprietà è ritenuta, a torto o a ragione, desiderabile per favorire le aggregazioni di forze e dunque evitare una frammentazione eccessiva della rappresentanza politica.

Metodo proporzionale puro

Il metodo proporzionale è certamente il più naturale: si vuole che a ciascun partito sia assegnato un numero di seggi proporzionale ai voti ottenuti, ossia

$$S_i = \frac{S}{V} V_i.$$

Il guaio, naturalmente, è che questa scelta di S_i non fornisce in generale un numero intero. Dunque, in prima istanza ciascun partito X_i riceverà $\left[\frac{S}{V} V_i\right]$ seggi (ove $[x]$ è la parte intera del numero x). Dopodiché, essendo di solito

$$K = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{S}{V} V_i\right] < S$$

(e non $K = S$), occorre trovare una regola per ripartire gli $S - K$ seggi residui.

A questo scopo, definiamo innanzitutto la *quota Hare* del partito X_i ($1 \leq i \leq n$):

$$Q_i = \frac{S}{V} V_i.$$

Questa quantità prende il nome da Thomas Hare (UK, 1806-1891). Consideriamo gli n resti

$$R_i = Q_i - [Q_i], \qquad i = 1, \ldots, n,$$

e attribuiamo un seggio agli $S - K$ resti maggiori. Si noti che, essendo $0 \leq R_i < 1$, si ha di sicuro

$$\begin{aligned} S - K &= S - \sum_{i=1}^{n} [Q_i] = S - \sum_{i=1}^{n} (Q_i - R_i) = \\ &= S - \sum_{i=1}^{n} \frac{S}{V} V_i + \sum_{i=1}^{n} R_i = S - S + \sum_{i=1}^{n} R_i < n; \end{aligned}$$

quindi il metodo assegna tutti i seggi, perché i seggi finiscono prima dei partiti. Come risultato di questa distribuzione, tutti i partiti ottengono *almeno* $[Q_i]$ seggi (condizione di *Hare minimo*) ed *al più* $[Q_i] + 1$ seggi (condizione di *Hare massimo*).

Esempio 1 Fissiamo $S = 7$, $V = 1.400$, $n = 4$. Abbiamo dunque 4 partiti. Supponiamo che i voti siano stati (caso particolarissimo)

$$V_1 = 400, \quad V_2 = 600, \quad V_3 = 200, \quad V_4 = 200.$$

Allora si trova subito

$$Q_1 = 2, \quad Q_2 = 3, \quad Q_3 = 1, \quad Q_4 = 1$$

e tutto va a posto in modo esatto con $S_i = Q_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.
Supponiamo invece, più realisticamente, che

$$V_1 = 423, \quad V_2 = 532, \quad V_3 = 195, \quad V_4 = 250;$$

allora

$$Q_1 = 2,115, \quad Q_2 = 2,66, \quad Q_3 = 0,975, \quad Q_4 = 1,25.$$

In prima istanza, X_1 prende 2 seggi, X_2 ne riceve 2, X_3 resta a bocca asciutta e 1 seggio va a X_4. Restano 2 seggi da assegnare: poiché

$$R_1 = 0,115, \quad R_2 = 0,66, \quad R_3 = 0,975, \quad R_4 = 0,25,$$

i resti più alti sono quelli di X_3 e di X_2. Conclusione:

$$S_1 = 2, \quad S_2 = 3, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 1.$$

Il sistema sembra funzionare discretamente: certamente, per costruzione, vale la proprietà di monotonia rispetto ai voti. Ma, sorprendentemente, non vale la monotonia rispetto ai seggi, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2 Supponiamo che $V = 180$, $S = 9$, $n = 3$ con $V_1 = 85$, $V_2 = 84$, $V_3 = 11$. Le quote Hare sono

$$Q_1 = 4,25, \qquad Q_2 = 4,2, \qquad Q_3 = 0,55,$$

quindi si assegneranno 4 seggi a X_1, 4 seggi a X_2 e nessun seggio a X_3; resta da attribuire un seggio. Siccome

$$R_1 = 0,25, \quad R_2 = 0,2, \quad R_3 = 0,55,$$

l'ultimo seggio va a X_3, cosicché

$$S_1 = 4, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 1.$$

Adesso manteniamo la precedente distribuzione dei voti, ammettendo però che i seggi a disposizione siano $S = 10$. Stavolta le quote Hare sono

$$Q_1 = 4,7\overline{2}, \qquad Q_2 = 4,\overline{6}, \qquad Q_3 = 0,6\overline{1},$$

quindi si daranno ancora 4 seggi a X_1 e X_2, e ne rimangono 2 da assegnare. Ma visto che i resti sono

$$R_1 = 0,7\overline{2}, \quad R_2 = 0,\overline{6}, \quad R_3 = 0,6\overline{1},$$

gli ultimi due seggi andranno uno a X_1 e uno a X_2. Dunque

$$S_1 = 5, \quad S_2 = 5, \quad S_3 = 0,$$

e pertanto il partito X_3 ha perso il suo seggio.
Un evento di questa natura è accaduto davvero nel 1881, ed è noto come

paradosso dell'Alabama: nel Congresso USA i seggi erano 299 ed all'Alabama, sulla base della propria popolazione, ne spettavano 8. Quando però il totale dei membri del Congresso fu portato a 300, all'Alabama toccarono soltanto 7 seggi.

Nemmeno vale la monotonia rispetto al consenso. Infatti, supponiamo che sia $V = 100$, $S = 10$, $n = 3$ con $V_1 = 53$, $V_2 = 33$, $V_3 = 14$. Le quote Hare sono

$$Q_1 = 5,3, \qquad Q_2 = 3,3, \qquad Q_3 = 1,4,$$

e quindi daremo 5 seggi a X_1, 3 seggi a X_2, 1 seggio a X_1; con i resti,

$$S_1 = 5, \qquad S_2 = 3, \qquad S_3 = 2.$$

Supponiamo che in una nuova elezione risulti $V_1 = 49$, $V_2 = 36$, $V_3 = 15$: allora stavolta si ha

$$Q_1 = 4,9, \qquad Q_2 = 3,6, \qquad Q_3 = 1,5,$$

e tenendo conto dei resti

$$S_1 = 5, \qquad S_2 = 3, \quad S_3 = 1.$$

Come si vede, il partito X_3, pur aumentando i suoi voti, ha perso un seggio. Questo è il *paradosso dell'Oklahoma*: il Congresso USA contava 386 membri; nel 1907 il nuovo stato dell'Oklahoma entrò a far parte degli USA, e gli vennero attribuiti 5 seggi, da aggiungere ai 386 degli altri stati. Alla prima elezione, il ricalcolo dei seggi secondo la popolazione di ciascuno stato confermò i 5 seggi all'Oklahoma, ma gli stati di New York e del Maine, a cui in precedenza toccavano 38 e 3 seggi rispettivamente, a parità di popolazione si videro assegnare 37 e 4 seggi.

Abbastanza sorprendentemente, il metodo proporzionale puro non rispetta nemmeno la proprietà di maggioranza.

Esempio 3 Siano $V = 39$, $S = 3$, $n = 3$, con $V_1 = 20$, $V_2 = 9$ e $V_3 = 10$: dunque X_1 ha la maggioranza assoluta dei voti. Le quote Hare sono

$$Q_1 = 1,538, \qquad Q_2 = 0,692, \qquad Q_3 = 0,769;$$

quindi si assegna 1 seggio a X_1 e, coi resti, 1 seggio a X_2 e 1 seggio a X_3. Pertanto

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1, \quad S_3 = 1,$$

e X_1 non ha la maggioranza assoluta dei seggi.

E per finire, il metodo proporzionale puro non verifica nemmeno la proprietà di superadditività, come era da aspettarsi.

Esempio 4 Consideriamo la situazione del precedente esempio: $V = 39$, $S = 3$, $n = 3$, con $V_1 = 20$, $V_2 = 9$ e $V_3 = 10$. Supponiamo che X_2 e X_3 si coalizzino formando un unico partito X, e che si abbia, in una nuova votazione, la medesima distribuzione dei voti, ossia $V_1 = 20$ e $V_X = 19$. Allora si ottiene

$$Q_1 = 1,538, \qquad Q_X = 1,462;$$

dunque X_1 e X ottengono entrambi un seggio, e con i resti X_1 ne ottiene un secondo. Si ha dunque

$$S_1 = 2, \quad S_X = 1 < 2 = S_2 + S_3 \,.$$

In definitiva, il metodo proporzionale puro non verifica tre delle quattro proprietà desiderabili enunciate all'inizio.

Metodo proporzionale corretto

Viste le mediocri prestazioni del metodo proporzionale puro, ne sono state proposte diverse correzioni. La più efficace è quella che utilizza il *metodo d'Hondt*, dal nome del suo ideatore Victor d'Hondt (Belgio, 1841-1901). Si procede in questo modo semplicissimo: si considerano gli $n \cdot S$ quozienti

$$\frac{V_i}{h}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad h = 1, \ldots, S,$$

e si assegna un seggio ai partiti che hanno gli S quozienti più grandi. In caso di due quozienti uguali, si assegna prima il seggio al partito che ha il maggior numero di voti. Nel caso che per l'assegnazione dell'ultimo seggio vi siano uguali quozienti ed un ugual numero di voti, si fa un sorteggio (l'unica soluzione equa in questo caso estremo).
Si noti che il metodo d'Hondt è estremamente proporzionale: per esempio si ha $\frac{V_i}{4} > \frac{V_j}{3}$, cosicché la lista X_i vince il quarto seggio prima che la lista X_j conquisti il terzo, se e solo se $V_i > \frac{4}{3} V_j$.

Esempio 5 Siano $V = 120$, $S = 5$, $n = 3$ con $V_1 = 65$, $V_2 = 30$, $V_3 = 25$. La tabella dei quozienti è la seguente:

divisore	X_1	X_2	X_3
1	$\boxed{65}$	$\boxed{30}$	$\boxed{25}$
2	$\boxed{32{,}5}$	15	12,5
3	$\boxed{21,\overline{6}}$	10	...
4	16,25	8,5	...
5	13	...	...

e dunque

$$S_1 = 3, \qquad S_2 = 1, \qquad S_3 = 1.$$

Se avessimo avuto 6 seggi anziché 5, il sesto seggio sarebbe andato a X_1; con 7 seggi, l'ultimo sarebbe toccato a X_2.

Il metodo d'Hondt è monotono rispetto ai voti, rispetto ai seggi e rispetto al consenso (per costruzione). È anche superadditivo: per dimostrarlo, osserviamo anzitutto che, per un generico partito X_h, gli S_h seggi da esso ottenuti corrispondono ai rapporti

$$V_h, \quad \frac{V_h}{2}, \quad \frac{V_h}{3}, \quad \dots, \quad \frac{V_h}{S_h};$$

Quindi, per ogni altro partito X_k si ha

$$\frac{V_h}{S_h} > \frac{V_k}{S_k+1} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{V_h}{S_h} = \frac{V_k}{S_k+1} \quad \text{e} \quad V_h \geq V_k$$

(altrimenti l'ultimo seggio attribuito a X_h sarebbe invece andato a X_k). Fissiamo allora due partiti X_i e X_j: per ogni altro partito X_k, posto

$$C_k = \frac{V_k}{S_k+1},$$

risulta per quanto detto

$$\begin{aligned} &V_i > C_k\, S_i, \qquad \text{oppure} \qquad V_i = C_k\, S_i \quad \text{e} \quad V_i \geq V_k, \\ &V_j > C_k\, S_j, \qquad \text{oppure} \qquad V_j = C_k\, S_j \quad \text{e} \quad V_j \geq V_k, \end{aligned}$$

da cui

$$V_i + V_j > C_k(S_i + S_j) \quad \text{oppure} \quad V_i + V_j = C_k(S_i + S_j),$$

e in quest'ultimo caso, certamente, $V_i + V_j \geq 2\,V_k > V_k$.
Ciò premesso, supponiamo che X_i e X_j si coalizzino in un nuovo partito X e che in una nuova elezione si abbia $V_X = V_i + V_j$: allora, per ogni $k \neq i, j$,

$$\frac{V_X}{S_i + S_j} = \frac{V_i + V_j}{S_i + S_j} > C_k = \frac{V_k}{S_k + 1}$$

oppure

$$\frac{V_X}{S_i + S_j} = \frac{V_i + V_j}{S_i + S_j} = C_k = \frac{V_k}{S_k + 1} \quad \text{e} \quad V_X = V_i + V_j > V_k.$$

Quindi nessun partito X_k con $k \neq i, j$ può contendere al neonato partito X gli $S_i + S_j$ seggi che erano stati conquistati separatamente da X_i e X_j: ne segue che

$$S_X \geq S_i + S_j,$$

ossia vale la subadditività.
Il metodo d'Hondt, per giunta, rispetta la proprietà di maggioranza. Per verificare questo fatto osserviamo dapprima che, in ogni caso, vale la relazione

$$\frac{V_i}{S_i} \geq \frac{V_k}{S_k + 1} \qquad \forall k, i = 1, \ldots, n,$$

da cui

$$V_i \geq S_i\,\frac{V_k}{S_k + 1} \qquad \forall k, i = 1, \ldots, n.$$

Sommando rispetto all'indice i per $i \neq k$, troviamo

$$\sum_{i \neq k} V_i \geq \sum_{i \neq k} S_i\,\frac{V_k}{S_k + 1} \qquad \forall k = 1, \ldots, n.$$

Supponiamo adesso che il partito X_k abbia ottenuto la maggioranza assoluta dei voti, ossia che $V_k \geq \frac{V}{2}$ e $\sum_{i \neq k} V_i \leq \frac{V}{2}$. Allora possiamo scrivere

$$\frac{V}{2} \geq \sum_{i \neq k} V_i \geq \sum_{i \neq k} S_i\,\frac{V_k}{S_k + 1} > \sum_{i \neq k} S_i \frac{V}{2(S_k + 1)},$$

ovvero

$$S_k + 1 > \sum_{i \neq k} S_i,$$

e sommando S_k ad entrambi i membri,

$$2S_k + 1 > S.$$

Ora, se S è pari, $S = 2m$, questo implica $S_k > m - \frac{1}{2}$ e quindi $S_k \geq m = \frac{S}{2}$; se S è dispari, $S = 2m + 1$, si deduce invece $S_k > m$ e dunque $S_k \geq m + 1 > \frac{S}{2}$. In ogni caso, quindi, se $V_k \geq \frac{V}{2}$ si ha $S_k \geq \frac{S}{2}$.
Il metodo d'Hondt, in definitiva, appare pienamente soddisfacente. Vale la pena di osservare, per concludere, che esso rispetta anche la condizione di Hare minimo: infatti, partendo dalla relazione già incontrata

$$V_i \geq S_i \frac{V_k}{S_k + 1} \qquad \forall k, i = 1, \ldots, n,$$

che almeno in corrispondenza dell'indice $i = k$ è una disuguaglianza *stretta*, sommando rispetto all'indice i ricaviamo

$$V > S \frac{V_k}{S_k + 1},$$

ossia $S_k > \frac{S}{V} V_k - 1 = Q_k - 1$ e quindi $S_k \geq [Q_k]$.

Non è invece rispettata la condizione di Hare massimo:

Esempio 6 Siano $V = 240$, $S = 6$, $n = 6$ con $V_1 = 115$, $V_2 = 27$, $V_3 = 26$, $V_4 = 25$, $V_5 = 24$ e $V_6 = 23$: la tabella dei quozienti è allora la seguente:

divisori	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	$\boxed{115}$	$\boxed{27}$	$\boxed{26}$	25	24	23
2	$\boxed{57{,}5}$	13,5	13	12,5	12	11,5
3	$\boxed{38,\overline{3}}$	9	$8,\overline{6}$	...	...	...
4	$\boxed{28{,}75}$	6,75	...	...	...	...
5	23	...	...	...	...	...

e si conclude che

$$S_1 = 4, \quad S_2 = 1, \quad S_3 = 1, \quad S_4 = 0, \quad S_5 = 0, \quad S_6 = 0.$$

In particolare, risulta

$$Q_1 = \frac{6}{240} \cdot 115 = 2,875, \qquad [Q_1] = 2,$$

da cui $S_1 = 4 > 3 = [Q_1] + 1$.
Si noti anche che il partito X_1 ottiene la maggioranza assoluta dei seggi, pur non avendo totalizzato la maggioranza assoluta dei voti.

In sostanza, possiamo affermare che il metodo d'Hondt è il miglior metodo proporzionale in circolazione ma favorisce i partiti più grandi: se questo sia un bene od un male è opinabile, ma sicuramente non è il male peggiore.

Metodo uninominale

Il sistema uninominale, o maggioritario, è molto semplice e draconiano; è usato in molti Paesi, primo fra tutti il Regno Unito, ed ha avuto un ruolo rilevante anche in Italia, prima del 2005 e anche adesso con la legge attuale, la cosiddetta legge *Rosatellum bis* (legge 3 novembre 2017, n. 165). Tuttavia, dal punto di vista matematico, esso è la negazione dell'equità, come adesso vedremo.
Si suddividono i votanti in S circoscrizioni elettorali, o *collegi*, individuati su base geografica (e anche su questo faremo qualche osservazione). In ciascun collegio viene eletto un candidato fra gli n proposti, in quel collegio, dagli n diversi partiti concorrenti: vince colui che ottiene la *maggioranza relativa* dei voti di quel collegio.

Esempio 7 Consideriamo 3 partiti che concorrono fra loro in 3 collegi con 1.000 votanti in ciascuno di essi. Supponendo che il voto dia i seguenti risultati

collegio	X_1	X_2	X_3
I	450	400	150
II	410	350	240
III	50	360	590

si vede subito che X_1 vince nei collegi I e II, mentre X_3 vince nel collegio III.
Si può notare che

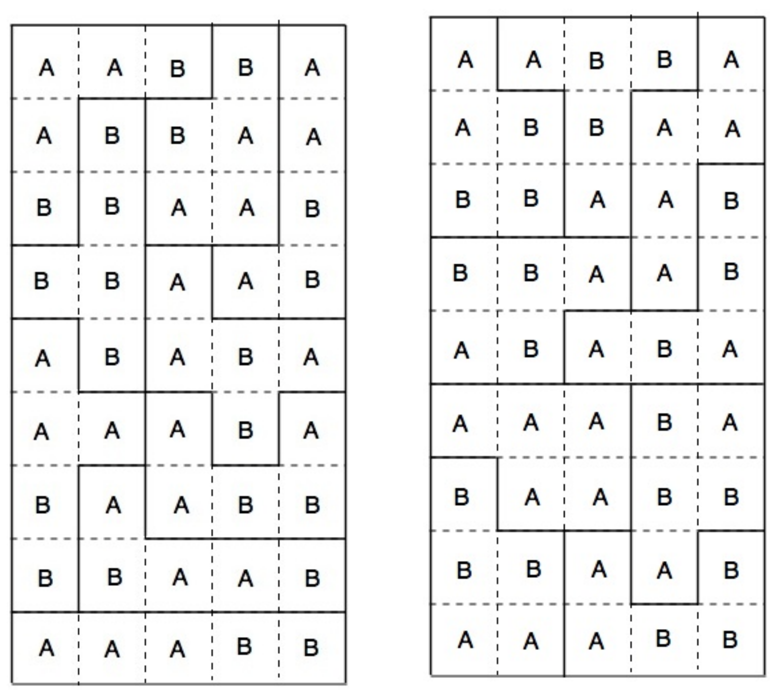
$$V_1 = 910, \qquad V_2 = 1.110, \qquad V_3 = 980,$$

eppure

$$S_1 = 2, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 1;$$

dunque il partito X_2, pur avendo conquistato la maggioranza relativa dei voti, non prende alcun seggio, ed il partito X_1, che ha ottenuto meno voti di tutti, ha più seggi di tutti. In particolare, non è rispettata la monotonia rispetto ai voti, né la proprietà di maggioranza.

C'è un altro aspetto che influisce sull'esito elettorale in un sistema maggioritario: la configurazione dei collegi. Consideriamo il caso di due partiti, A e B, che siano ben radicati in certe parti di territorio e molto meno in altre (come ad esempio accadeva in Italia per la Lega Nord, prima delle ultime elezioni). Due suddivisioni in collegi tra loro differenti possono portare, a parità di distribuzione del voto, ad esiti molto diversi. Le due tabelle sottostanti mostrano cosa può succedere con 9 collegi, ognuno dei quali ha 5 sottocircoscrizioni (ad esempio, comuni o quartieri di città), in ciascuna delle quali la maggioranza è quella indicata.



Come si può constatare, il partito A ha la maggioranza in 24 comuni e B ha la maggioranza in 21 comuni, cosicché la situazione appare abbastanza equilibrata; eppure, i due modi di raggruppare i 45 comuni in 9 collegi da 5 comuni ciascuno forniscono due risultati elettorali totalmente difformi: nel primo caso, $S_A = 8$, $S_B = 1$, mentre nel secondo caso $S_A = 2$, $S_B = 7$.

Considerazioni matematiche

Concludiamo questa prima parte con due enunciati importanti, i quali indicano che non esiste un meccanismo elettorale “perfetto”, ossia dotato di tutte le proprietà desiderabili segnalate all'inizio. Il primo enunciato è di tipo “positivo”, il secondo è di tipo “negativo”.

Proposizione 8 Un meccanismo elettorale monotono rispetto ai voti e dotato della proprietà superadditiva gode anche della proprietà di maggioranza.

Dimostrazione Supponiamo che per un partito X si abbia $V_X \geq \frac{V}{2}$. Se tutti gli altri partiti X_j, $1 \leq j \leq n-1$, si coalizzassero in un partito Y, avremmo necessariamente, in una nuova votazione con gli stessi risultati,

$$V_Y = V - V_X \leq \frac{V}{2} \leq V_X,$$

da cui, per monotonia, $S_Y \leq S_X$. D'altronde, per superadditività,

$$S_Y \geq \sum_{j=1}^{n-1} S_j = S - S_X;$$

quindi otteniamo $S_X \geq S_Y \geq S - S_X$, ossia $S_X \geq \frac{S}{2}$. $\square$

Proposizione 9 Per un meccanismo elettorale monotono rispetto ai voti, la condizione di Hare massimo e la proprietà di superadditività sono indipendenti, nel senso che nessuna delle due implica l'altra.

Dimostrazione Consideriamo un meccanismo elettorale monotono rispetto ai voti, e supponiamo che si verifichi il seguente risultato particolarmente equilibrato: $V = 190$, $S = 7$, $n = 5$ con $V_1 = 40$, $V_2 = 39$, $V_3 = 38$, $V_4 = 37$, $V_5 = 36$. Per monotonia, si ha

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3 \geq S_4 \geq S_5.$$

Proviamo che deve essere

$$S_1 + S_2 \geq 4:$$

infatti se fosse $S_1 + S_2 \leq 3$ avremmo $S_2 = \min\{S_1, S_2\} \leq 1$ ed anche

$$S_3 + S_4 + S_5 = 7 - S_1 - S_2 \geq 7 - 3 = 4,$$

quindi troveremmo $S_3 = \max\{S_3, S_4, S_5\} \geq 2$, ed a maggior ragione $S_3 \geq 2 > 1 \geq S_2$, il che è assurdo. Dunque $S_1 + S_2 \geq 4$.

Ciò premesso, supponiamo che X_1 e X_2 si coalizzino nel partito Y. A parità di distribuzione dei voti si ha $V_Y = 79$, con quota Hare $Q_Y = \frac{7}{190} \cdot 79 = 2,91$, da cui $[Q_Y] + 1 = 3$.
Concludiamo: se nel nostro meccanismo elettorale vale la condizione di Hare massimo, deve essere $S_Y \leq [Q_Y] + 1 = 3$; se vale la superadditività, deve invece essere $S_Y \geq S_1 + S_2 \geq 4$. Quindi le due proprietà in questo esempio sono incompatibili e pertanto sono fra loro indipendenti. $\square$

Leggi elettorali italiane

È importante ricordare i fatti seguenti:

(i) i criteri su cui si basano le leggi elettorali sono, come già osservato, *politici* prima che *matematici*. Non si cerca la maggior equità possibile, ma si punta piuttosto a raggiungere alcuni obiettivi pratici: garantire stabilità a chi governerà, impedire che vengano rappresentate le *liste* (ossia i partiti) che hanno ottenuto pochissimi voti, eccetera;

(ii) d'altra parte, le leggi elettorali, che sono opera non di scienziati ma di giuristi e di rappresentanti politici eletti, spesso presentano veri e propri *bachi* matematici, o perlomeno inutili complicazioni formali.

Per cominciare, osserviamo che negli enti locali la composizione dei consigli comunali (il numero dei *seggi*) dipende dalla *popolazione* residente, calcolata sulla base dell'ultimo censimento. Sui censimenti sorgono subito due obiezioni:

(1) non sono mai esatti;

(2) si svolgono ogni 10 anni.

Cosa si potrebbe fare? Dato che le *liste elettorali* (cioè gli elenchi di coloro che hanno diritto di voto) sono aggiornate con precisione ogni semestre, si potrebbe legare il *numero dei seggi* nei consigli al *numero degli aventi diritto al voto*, così come risultano dalle liste elettorali.
Ricordiamo che l'*elettorato attivo* (cioè l'insieme dei cittadini che possono votare) è composto dai cittadini di almeno 18 anni, ad eccezione del Senato: sono elettori del Senato tutti i cittadini che abbiano compiuto 25 anni. Naturalmente, bisogna essere "bravi cittadini": infatti, non hanno diritto al voto:

- coloro che sono dichiarati falliti, finché dura lo stato di fallimento e comunque non oltre i 5 anni dalla sentenza che dichiara il fallimento;
- coloro che, ritenuti persone pericolose per la sicurezza e per la pubblica moralità, siano sottoposti a misure di sicurezza;
- coloro che sono sottoposti a misure di sicurezza detentive, o a libertà vigilata, o al divieto di soggiorno in uno o più comuni od in una o più province, per tutta la durata del provvedimento;
- coloro che sono condannati all'interdizione perpetua o temporanea dai pubblici uffici, per tutta la durata dell'interdizione.

Elezioni comunali

Indichiamo con S il numero di seggi nel consiglio comunale per cui si vota e con V il numero dei voti *validi* espressi. Infatti possono esserci *schede bianche* e *schede nulle*, le quali non contano per l'elezione del consiglio comunale.

Comuni con meno di 15.000 abitanti. Vi è un criterio politico molto rozzo: ogni lista deve essere collegata ad un candidato sindaco; la lista del candidato sindaco che vince si assicura $\frac{2}{3}S$ seggi, mentre le altre liste si spartiscono gli $\frac{S}{3}$ seggi restanti. Per vincere, è sufficiente la *maggioranza relativa* dei voti. In altre parole, supponiamo che n liste, collegate ad altrettanti candidati sindaci, prendano rispettivamente $V_1, \ldots, V_n$ voti, con $\sum_{i=1}^n V_i = V$; se $V_j = \max_i V_i$, la lista X_j prende due terzi dei seggi e tutte le altre si dividono (proporzionalmente, col metodo d'Hondt) il residuo terzo dei seggi.
Nel caso vi sia una sola lista, essa raccoglie tutti i seggi, purché abbia ottenuto almeno il 50% di voti validi e purché il numero dei votanti sia stato almeno il 50% degli aventi diritto.

Obiezioni al metodo:

(1) se tre liste ottengono rispettivamente il 34%, il 33% e il 33% dei voti, il 66% degli elettori è rappresentato solo dal 33% dei seggi;

(2) la legge dice che, a parità di voti tra due candidati sindaci, si va ad un *ballottaggio*, ossia ad una nuova votazione fra i due, e che in caso di ulteriore parità vince il più anziano, ma non specifica come procedere

nel caso improbabile, ma possibile, in cui due candidati siano esattamente coetanei ed ottengano lo stesso numero di voti, oppure vi siano tre candidati alla pari (ma qui la giurisprudenza afferma che vince il candidato più anziano, sempre che non siano tutti e tre coetanei!).

Comuni con più di 15.000 abitanti. In questo caso le cose sono più complicate. Ci sono ancora i candidati sindaci con una o più liste collegate, però i votanti possono scegliere un candidato sindaco ed una lista non a lui collegata (*voto disgiunto*).
Per semplificare il discorso, supporremo di avere una sola lista collegata con ciascun candidato sindaco, e che non vi siano voti disgiunti.
Sia V_j il numero dei voti ottenuti dalla lista di maggioranza relativa. Se $V_j > \frac{V}{2}$, il sindaco è eletto; se invece $V_j \leq \frac{V}{2}$, si fa un secondo turno di ballottaggio fra i due candidati migliori (in caso di parità di voti tra il secondo e il terzo, va al ballottaggio col primo classificato il più anziano dei due, se c'è...): a parità di voti nel ballottaggio, vince colui che aveva ottenuto più voti al primo turno (e se erano pari anche nel primo turno?).
Una volta eletto il sindaco, bisogna attribuire i seggi alle liste (sulla base dei voti ottenuti al primo turno). Si fa una prima assegnazione provvisoria col metodo d'Hondt, escludendo però dalla ripartizione dei seggi le liste che hanno totalizzato meno del 3% dei voti (*soglia di sbarramento*). Dunque, a questo stadio la lista del sindaco ha S_j seggi. Poi si fa l'assegnazione definitiva: se $S_j \geq 60\%S$, oppure $S_j < 40\%S$, si lasciano le cose come stanno; se invece $40\%S \leq S_j < 60\%S$, si dà il *premio di maggioranza*, decidendo d'ufficio che $S_j = 60\%S$. I restanti $S - S_j$ seggi si assegnano alle altre liste col metodo d'Hondt.
In questa procedura non ci sono pecche matematiche da segnalare, salvo una: cosa succede se *tutte* le liste, inclusa quella che vince, totalizzano meno del 3% dei voti?

Osservazione 10 La possibilità del voto disgiunto altera lievemente l'assegnazione dei seggi. Può succedere infatti che una lista, non collegata col candidato sindaco vincente, ottenga tramite il voto disgiunto più del 50% dei voti. In tal caso si assegnano i seggi a tutte le liste col metodo D'Hondt. Se invece, tra le liste non collegate col candidato sindaco vincente, nessuna raggiunge il 50% dei voti, la distribuzione dei seggi segue le regole descritte in precedenza.

Elezioni regionali

Ci riferiamo alla Toscana, dove la situazione è governata dalla legge regionale 26/9/14, n. 51. Anche qui la matematica c'entra poco.
La votazione si volge in uno o due turni. Si eleggono 40 consiglieri, più il presidente della Giunta regionale. Ci sono 13 circoscrizioni regionali, una per provincia ad eccezione di quella di Firenze, che è suddivisa in 4 circoscrizioni. Ogni partito presenta, in ciascuna circoscrizione, da 0 a 3 *candidati regionali*, nonché una lista ordinata di *candidati circoscrizionali*, la quale ha un numero minimo di nominativi, proporzionale alla popolazione della circoscrizione, e un numero massimo, pari al doppio del numero minimo. Ogni lista, o coalizione di liste, è collegata ad un candidato *"governatore"* (termine impreciso, ma di uso giornalistico comune, che sta a indicare il presidente della regione). È possibile il voto disgiunto, ossia votare per un candidato presidente e per una lista a lui non collegata.
Viene eletto governatore al primo turno il candidato che ottiene il maggior numero di voti validi, purché questo numero rappresenti almeno il 40% dei voti complessivi. Se nessun candidato ottiene tale percentuale, si va al turno di ballottaggio, in cui competono i due candidati che hanno avuto al primo turno il maggior numero di voti. In caso di parità, sia nell'ammissione al ballottaggio, sia nel ballottaggio, vince colui il quale era collegato alla coalizione che ha riportato il maggior numero di voti (ciò non è automatico, perché vi è la possibilità del voto disgiunto); in caso di ulteriore, improbabile, parità, vince il più anziano di età.
Sono previsti:

- un *premio di maggioranza*: la coalizione che vince, cioè quella collegata al presidente eletto, ottiene il $57,5\%$ dei seggi (23 seggi) se il candidato presidente aveva vinto al primo turno con almeno il 40% dei voti, oppure ha vinto dopo il ballottaggio, mentre ottiene addirittura il 60% (24 seggi) se il candidato presidente aveva vinto al primo turno con almeno il 45% dei voti;

- una *soglia di garanzia*: se la coalizione che vince ottiene più del 65% dei voti, le si assegna soltanto il 65% dei seggi (26 seggi), lasciando i rimanenti 14 alle altre liste;

- una complicata *soglia di sbarramento*, che consiste nell'ammettere alla distribuzione dei seggi solamente:

– le coalizioni che ottengono almeno il 10% dei voti, purché contengano almeno una lista che ha ottenuto almeno il 3%;

– le liste, facenti parte di coalizioni che hanno totalizzato almeno il 10% dei voti, le quali abbiano ottenuto almeno il 3% dei voti;

– le liste non facenti parte di coalizioni, oppure facenti parte di coalizioni che hanno totalizzato meno del 10% dei voti, le quali abbiano ottenuto almeno il 5% dei voti.

Una volta proclamato il presidente eletto, si ripartiscono i 40 seggi. Riportiamo la tabella dei *seggi teorici* (come vedremo subito, questi numeri all'atto pratico possono cambiare):

circoscrizione	seggi	circoscrizione	seggi
Arezzo	4	Lucca	4
Firenze 1	4	Massa-Carrara	2
Firenze 2	3	Pisa	4
Firenze 3	2	Pistoia	3
Firenze 4	2	Prato	3
Grosseto	2	Siena	3
Livorno	4		

Si parte da un'assegnazione provvisoria alle varie liste, secondo il metodo d'Hondt, e poi si applicano i correttivi necessari a rispettare le prescrizioni sopra viste. I candidati presidenti che non hanno vinto acquisiscono un seggio, a patto che la loro lista abbia superato la soglia di sbarramento. Ad ogni circoscrizione elettorale è garantito almeno un rappresentante in consiglio (*clausola di rappresentanza*); quindi i seggi alle varie circoscrizioni non sono fissati a priori. Si noti che l'elezione dei candidati regionali delle varie liste avviene secondo l'ordine di lista: agli elettori è data la facoltà di esprimere una *preferenza* solo per la scelta dei candidati circoscrizionali, scrivendo sulla scheda il nome del proprio candidato favorito. Ma non è detto che vi siano abbastanza seggi per questi ultimi, a causa della distorsione della proporzionalità legata al premio di maggioranza.

Esempio 11 Supponiamo che vi siano tre liste A, B, C, e che dopo l'elezione del presidente si abbia $S_A = 24$, $S_B = 14$, $S_C = 2$. I candidati governatori perdenti hanno diritto a un seggio: si assegna dunque un seggio a quelli di B e di C, per cui adesso B deve avere ancora 13 seggi e C 1 seggio, mentre A ha sempre i suoi 24 seggi. Supponiamo che i candidati regionali presentati

da A, B e C siano stati rispettivamente 3, 2 e 1. Allora essi vengono eletti per primi: quindi per i candidati circoscrizionali restano disponibili 21 seggi per A, 11 seggi per B e nessun seggio per C. Vediamo come si dividono i seggi della generica lista X_i nelle varie circoscrizioni.
Se V_i è il numero di voti ottenuti da X_i nella regione, e V_i^r è il numero di voti ottenuti da X_i nella circoscrizione r, i seggi di X_i nella regione r sono dati, al solito, dalla formula

$$S_i^r = \left[\frac{V_i^r}{Q_i} \right], \quad \text{con} \quad Q_i = \frac{V_i}{S_i},$$

(ove $S_A = 21$, $S_B = 11$, mentre C non concorre) completando poi la distribuzione con i resti migliori.
Vi è però da rispettare la clausola di rappresentanza: se la circoscrizione r non ha rappresentanti, ossia risulta $S_i^r = 0$ per ogni $i = 1, \ldots, n$, allora si considera la lista che in r ha avuto la maggioranza relativa e le si assegna 1 seggio in r (dunque, adesso $S_i^r = 1$ per un certo i); tale seggio viene tolto, a quella stessa lista, in un'altra provincia nella quale tale lista ha il resto minore fra quelli utilizzati per l'ottenimento di un seggio. Infine, se questa procedura fa perdere ad un'altra provincia la sua rappresentanza, si ripete il procedimento in quella provincia.

Questa legge elettorale, complicata e politicamente discutibile, ha anche qualche piccola pecca matematica: che succederebbe se vi fossero 21 o più liste, ognuna con un diverso candidato governatore, le quali prendono tutte meno del 5% dei voti? Oppure: che succederebbe se vi fosse una lista che vince con il 60% dei voti, e tutte le altre liste, collegate a un antagonista perdente, prendessero meno del 3%?

Elezioni del Senato

A partire dal 2018, sia per il Senato che per la Camera è in vigore la legge 3 novembre 2017, n. 165, comunemente nota come *Rosatellum bis*. Questa legge assegna, sia al Senato che alla Camera, il 37% dei seggi col sistema maggioritario e il 61% dei seggi col metodo proporzionale, mentre il residuo 2% dei seggi è attribuito alle circoscrizioni estere; sono presenti varie soglie di sbarramento.
Analizziamo la situazione al Senato. Secondo la Costituzione (art. 57), il numero dei seggi del Senato è $S = 315$. In più c'è un certo numero di *senatori*

a vita, gli ex-Presidenti della Repubblica e quelli nominati per speciali meriti dal Presidente della Repubblica: attualmente sono 6 (Elena Cattaneo, Mario Monti, Giorgio Napolitano, Renzo Piano, Carlo Rubbia, Liliana Segre).
Sempre secondo la Costituzione, i senatori sono eletti *su base regionale*: nessuna regione può avere un numero di senatori inferiore a 7, tranne la Val d'Aosta che ne ha 1 ed il Molise che ne ha 2. A parte questi vincoli, il numero di senatori di una regione è proporzionale alla rispettiva popolazione.
Anzitutto vi sono 6 seggi riservati alle circoscrizioni estere. Degli altri 309 seggi, 7 sono assegnati con metodo maggioritario, 1 in Val d'Aosta e 6 in Trentino-Alto-Adige; nelle restanti regioni, 109 seggi sono assegnati in altrettanti collegi uninominali col sistema maggioritario, mentre i restanti 193 seggi sono attribuiti nei cosiddetti *collegi plurinominali* col metodo proporzionale puro.
La tabella che segue riporta il numero di seggi assegnati col sistema maggioritario (sm) e col sistema proporzionale (sp) in ciascuna regione.

regione	sm	sp	regione	sm	sp
Piemonte	8	14	Marche	3	5
Valle d'Aosta	1	0	Lazio	10	18
Lombardia	18	31	Abruzzo	2	5
Trentino-Alto Adige	6	1	Molise	1	1
Veneto	9	15	Campania	11	18
Friuli Venezia Giulia	2	5	Puglia	8	12
Liguria	3	5	Basilicata	1	6
Emilia-Romagna	8	14	Calabria	4	6
Toscana	7	11	Sicilia	9	16
Umbria	2	5	Sardegna	3	5

Nella tabella seguente riportiamo i voti ed i seggi ottenuti dai raggruppamenti di liste CD, 5S, CS, LeU nelle elezioni del 2018. Hanno votato 35.257.690 elettori, pari al $69,49\%$ degli aventi diritto. Fra essi, coloro che hanno votato scheda bianca o nulla sono 395.904 (lo $0,8\%$ degli elettori e l'$1,1\%$ dei votanti).

	CD	5S	CS	LeU	altri	tot.
% voti 2018	37,50	32,22	23,00	3,28	4,00	100,00
seggi maggioritario	58	44	14	0	0	116
seggi proporzionale	81	68	46	4	0	199
totale seggi	139	112	60	4	0	315
% seggi	44,12	35,56	19,05	1,27	0,00	100,00

Legenda:

CD = Centro-destra, 5S = Movimento 5 stelle,
CS = Centro-sinistra, LeU = Liberi e uguali.

In realtà, i seggi assegnati al Senato sono stati 314 e non 315, perché nella circoscrizione Sicilia il Movimento 5 stelle ha ottenuto un seggio in più del totale dei suoi candidati nei collegi plurinominali: quel seggio è attualmente vacante e tale resterà, visto che la legge non prevede alcun modo alternativo di attribuzione.
Calcolando quanti hanno votato nel 2018 per i vari partiti (sul totale degli elettori e non su quello dei votanti) abbiamo le seguenti percentuali più veritiere:

CD: 25,76, 5S: 22,13, CS: 15,80, LeU: 2,25.

E magari, la prossima volta, a parità di percentuali, si potrebbe assegnare solo il $69,49\%$ dei seggi disponibili, cioè 438 su 630, lasciando gli altri vacanti....

Elezioni della Camera dei Deputati

Secondo la citata legge *Rosatellum bis*, i seggi da assegnare sono 630: di questi, 12 vengono assegnati nelle circoscrizioni estere con il sistema proporzionale puro. Degli altri 618 seggi, 232 sono assegnati in altrettanti collegi uninominali nelle varie regioni, col sistema maggioritario: la Val d'Aosta ha 1 collegio uninominale, il Molise 2, il Trentino-Alto Adige 6 e le altre regioni ne hanno un numero proporzionale alla popolazione. Per gli altri 386 seggi, il territorio nazionale, Val d'Aosta esclusa, è suddiviso in 28 circoscrizioni corrispondenti alle regioni o a parti di esse, e ciascuna di esse è suddivisa in 63 collegi plurinominali (decr. leg. 12 dicembre 2017, n. 189).
L'assegnazione dei seggi *non è*, come accade per il Senato, su base regionale: tuttavia, un apposito decreto del Presidente della Repubblica (l'ultimo:

D.P.R. 28 dicembre 2017) stabilisce ad ogni elezione, sulla base dei dati dell'ultimo censimento, il numero dei seggi assegnati a ciascuna circoscrizione ed a ciascun collegio plurinominale di questa. In altre parole, è come se venisse stabilito che anche la Camera viene eletta su base regionale!
Vi è inoltre una *soglia di sbarramento*:

- per essere ammessa alla ripartizione dei seggi, una coalizione di liste deve avere, su base nazionale, almeno il 10% dei voti;
- per essere ammessa alla ripartizione dei seggi, una singola lista deve avere, su base nazionale, almeno il 3% dei voti;
- vi sono alcune eccezioni per le liste rappresentative di minoranze linguistiche;
- i voti delle liste, collegate con una coalizione, che riportino su base nazionale meno dell'1% dei voti, non vengono sommati al totale della coalizione, ma suddivisi fra le liste della coalizione ammesse alla ripartizione dei seggi, in proporzione ai voti da queste ottenuti.

Riportiamo, anche per la Camera, il numero di seggi da assegnare col sistema maggioritario (sm) e col sistema proporzionale (sp) in ciascuna regione.

regione	sm	sp	regione	sm	sp
Piemonte	17	28	Marche	6	10
Valle d'Aosta	1	0	Lazio	21	37
Lombardia	37	65	Abruzzo	5	9
Trentino-Alto Adige	6	5	Molise	2	1
Veneto	19	31	Campania	22	38
Friuli Venezia Giulia	5	8	Puglia	16	26
Liguria	6	10	Basilicata	2	4
Emilia-Romagna	17	28	Calabria	8	12
Toscana	14	24	Sicilia	19	33
Umbria	3	6	Sardegna	6	11

L'attribuzione dei seggi avviene nel modo che andiamo a descrivere.

1. Si assegnano i seggi attribuiti nei vari collegi uninominali con il metodo naggioritario.
2. Si applicano le varie soglie di sbarramento.

3. Si ripartiscono su base nazionale fra le varie liste o coalizioni, col metodo proporzionale puro, i 386 seggi relativi ai vari collegi plurinominali.

4. Si ripartiscono circoscrizione per circoscrizione, proporzionalmente ai voti ivi ottenuti, i seggi conquistati a livello nazionale dalle varie liste. Questo passaggio costituisce il *problema dell'allocazione biproporzionale*, ed è il punto più delicato e controverso.

Ma andiamo per ordine, descrivendo anzitutto in che modo la legge prescrive di fare la prima suddivisione dei seggi. Supponiamo di avere n liste e V voti validi, e per semplicità supponiamo che tutte le liste abbiano superato la soglia di sbarramento. Detti V_i i voti ottenuti dalla lista X_i, con $\sum_{i=1}^n V_i = V$, dobbiamo assegnare S_i seggi alla lista X_i, in modo che $\sum_{i=1}^n S_i = S$.
Si comincia con la definizione della *cifra elettorale nazionale* come il totale V dei voti validi ottenuti dalla lista X_i; la quantità $Q = \left[\frac{V}{S}\right]$ è il *quoziente elettorale nazionale*, che è dunque non un vero quoziente, ma la parte intera di un quoziente. Infine, il numero V_i dei voti ottenuti dalla lista X_i si chiama *cifra elettorale nazionale della lista* X_i. Ebbene: alla lista X_i sono provvisoriamente attribuiti $S_i = \left[\frac{V_i}{Q}\right]$ seggi (un'altra parte intera, qui certamente necessaria).
A questo punto, il legislatore dà per scontato che i numeri S_i così ottenuti soddisfino la relazione $\sum_{i=1}^n S_i \leq S$ e specifica che gli $S - \sum_{i=1}^n S_i$ seggi residui vengano attribuiti secondo i maggiori resti, cioè secondo l'ordine decrescente dei numeri $R_i = \frac{V_i}{Q} - S_i$: come sappiamo, questo si può sempre fare.
Ma è sempre vero, come crede il legislatore, che $\sum_{i=1}^n S_i \leq S$, ossia che esistano seggi residui? La risposta è no!

Esempio 12 Supponiamo che (in un piccolo Paese) i seggi da assegnare siano $S = 40$, che le liste siano 2 e che i voti validi siano $V = 1559$. Ammettiamo che le 2 liste abbiano ottenuto rispettivamente $V_1 = 799$ e $V_2 = 760$ voti. Poiché $\frac{V}{S} = 38,975$, il quoziente elettorale nazionale è $Q = \left[\frac{V}{S}\right] = 38$. Essendo poi $\frac{V_1}{Q} \simeq 21,026$ e $\frac{V_2}{Q} = 20,00$, i seggi attribuiti provvisoriamente alle liste sono $S_1 = \left[\frac{V_1}{Q}\right] = 21$ e $S_2 = \left[\frac{V_2}{Q}\right] = 20$. Come si vede, si ha $S_1 + S_2 = 41 > 40 = S$.

La legge elettorale italiana ha dunque una grave incongruenza matematica. Fortunatamente per il legislatore, l'inconveniente sopra descritto, cioè l'eventualità che risulti $\sum_{i=1}^n S_i > S$, non può mai verificarsi se il numero dei voti validi V è sufficientemente grande, come ora verificheremo. Supponiamo che si abbia

$$\frac{V}{S} = Q + 1 - \varepsilon, \qquad \text{con } 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\frac{V_i}{Q} = S_i + 1 - \varepsilon_i \qquad \text{con } 0 < \varepsilon_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Allora

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} S_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{V_i}{Q} - 1 + \varepsilon_i \right) = \frac{V}{Q} - n + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = \\ &= \frac{V}{\frac{V}{S} - 1 + \varepsilon} - n + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \leq \frac{VS}{V - S + \varepsilon S} < \frac{VS}{V - S}; \end{aligned}$$

quindi se $\frac{VS}{V-S} \leq S + 1$ abbiamo la certezza che l'intero $\sum_{i=1}^{n} S_i$ non può superare S. La condizione $\frac{VS}{V-S} \leq S + 1$, che equivale a $S^2 + S \leq V$, ci dice che l'Italia riuscirà sempre ad eleggere tutti i 386 deputati "proporzionali", purché i voti validi siano almeno $V = 386^2 + 386 = 149.382$ (il che appare, anche se non del tutto certo, estremamente probabile).
Osserviamo che il legislatore avrebbe potuto evitare questa brutta figura in modo molto semplice: sarebbe bastato definire il quoziente elettorale nazionale $Q = \frac{V}{S}$, senza arrotondare alla parte intera, e poi definire

$$S_i = \left[\frac{V_i}{Q} \right] = \left[\frac{V_i}{V} S \right].$$

Con questa scelta avremmo ottenuto

$$\sum_{i=1}^{n} S_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{V_i}{V} S_i = \frac{V}{V} S = S$$

e tutto sarebbe andato liscio.
Torniamo all'assegnazione provvisoria dei seggi, supponendo di essere nella situazione in cui $\sum_{i=1}^{n} S_i < S$. In questo caso restano seggi non assegnati: la legge prescrive che essi vadano attribuiti alle liste per le quali i numeri $R_i = \frac{V_i}{Q} - S_i$ sono maggiori; si usa cioè il metodo proporzionale puro. In questo modo, ciascuna lista ottiene i suoi S_i seggi definitivi su base nazionale.

Adesso c'è il passaggio più importante: per ogni lista X_i occorre spezzettare la dotazione nazionale di seggi S_i nelle 28 circoscrizioni (le regioni sono 20,

ma alcune, le più popolose, sono suddivise in più d'una circoscrizione) in modo proporzionale ai voti ottenuti da ciascuna lista in ognuna di esse. Qui sta il punto.
Nella circoscrizione r i voti complessivi sono V^r, la lista X_i ha V_i^r voti, ove naturalmente $\sum_{r=1}^{28} V_i^r = V_i$, e dobbiamo calcolare il numero S_i^r dei seggi circoscrizionali della lista X_i, in modo da rispettare la condizione $\sum_{r=1}^{28} S_i^r = S_i$.
Ammesso che risulti $\sum_{i=1}^{n} S_i^r \leq S^r$, si completa l'assegnazione considerando i migliori resti $R_i = \frac{V_i^r S^r}{V^r} - S_i^r$: osserviamo che, così facendo, in ogni circoscrizione r ciascuna lista acquisisce con i resti al più un altro seggio.
A questo punto, per costruzione, vale $\sum_{i=1}^{n} S_i^r = S^r$, e quindi

$$\sum_{r=1}^{28} \sum_{i=1}^{n} S_i^r = \sum_{r=1}^{28} S^r = S;$$

dunque sono stati assegnati, circoscrizione per circoscrizione, tutti i seggi disponibili a livello nazionale.
Ma siamo sicuri che, per ciascuna lista X_i, la somma dei seggi S_i^r di tutte le circoscrizioni dia come risultato il numero S_i dei seggi attribuiti alla lista X_i nazionalmente? Ossia, siamo sicuri che si abbia

$$\sum_{r=1}^{28} S_i^r = S_i \qquad \text{per ogni } i = 1, \ldots, n?$$

La risposta, in generale, è no. È vero che

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{28} S_i^r = \sum_{r=1}^{28} \sum_{i=1}^{n} S_i^r = S = \sum_{i=1}^{n} S_i\,,$$

e che dunque

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{r=1}^{28} S_i^r - S_i \right] = 0\,:$$

ma questa relazione, naturalmente, può valere anche nel caso in cui per certe liste si abbia $\sum_{r=1}^{28} S_i^r < S_i$, per certe altre si abbia $\sum_{r=1}^{28} S_i^r > S_i$, e gli addendi si bilancino fra loro. Dunque, in generale, si avrà

$$\sum_{r=1}^{28} S_i^r \neq S_i \qquad \text{per qualche } i \text{ fra 1 e } n;$$

questo è il problema dell'allocazione biproporzionale.

Esempio 13 Consideriamo il caso di due sole circoscrizioni I e II di pari popolazione, con $V^I = 500$, $V^{II} = 500$ e $S^I = 5$, $S^{II} = 5$. Supponiamo che in lizza vi siano soltanto due partiti A e B con i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} &\text{circoscrizione I:} \quad V_A^I = 324, \quad V_B^I = 176, \\ &\text{circoscrizione II:} \quad V_A^{II} = 327, \quad V_B^{II} = 173. \end{aligned}$$

In particolare, $V_A = 651$ e $V_B = 349$. Poiché $V = 1000$ e $S = 10$, il quoziente elettorale nazionale è già intero: $Q = \frac{V}{S} = 100$. I seggi attribuiti nazionalmente sono

$$S_A = \frac{V_A}{Q} = [6,51] = 6, \quad S_B = \frac{V_B}{Q} = [3,49] = 3;$$

utilizzando i resti, si ottiene

$$S_A = 7, \quad S_B = 3.$$

Vediamo cosa succede nelle due circoscrizioni: notiamo che $\frac{S^I}{V^I} = \frac{S^{II}}{V^{II}} = 0,01$. Ne segue

$$S_A^I = \left[\frac{V_A^I S^I}{V^I}\right] = [3,24] = 3, \quad S_B^I = \left[\frac{V_B^I S^I}{V^I}\right] = [1,76] = 1,$$

e con i resti

$$S_A^I = 3, \qquad S_B^I = 2.$$

Similmente

$$S_A^{II} = \left[\frac{V_A^{II} S^{II}}{V^{II}}\right] = [3,27] = 3, \quad S_B^{II} = \left[\frac{V_B^{II} S^{II}}{V^{II}}\right] = [1,73] = 1,$$

e con i resti

$$S_A^{II} = 3, \qquad S_B^{II} = 2.$$

Come si vede, risulta

$$S_A^I + S_A^{II} = 6 < 7 = S(A), \qquad S_B^I + S_B^{II} = 4 > 3 = S(B)$$

e fra assegnazione dei seggi su base nazionale ed assegnazione dei seggi su base circoscrizionale i conti non tornano.

Il legislatore ha presente questo problema, e quindi nella legge si forniscono complicate regole per togliere alle liste i seggi che hanno in eccesso a livello circoscrizionale, assegnandoli ad altre che invece ne hanno troppo pochi, e dando per scontato che queste operazioni siano sempre possibili. Le regole sono queste, esemplificate nel caso di due sole liste A e B, con A lista *deficitaria* e B lista *eccedentaria*, per usare la terminologia della legge.

- Si cerca la circoscrizione, tra quelle in cui B ha preso il suo ultimo seggio con i resti, in cui (i) il resto utilizzato da B è il più piccolo, e (ii) A abbia resti inutilizzati: vale a dire, lì A abbia preso il suo ultimo seggio senza usare i resti; in quella circoscrizione si toglie un seggio a B e lo si regala ad A.

- Se ciò non è possibile, perché A non ha resti inutilizzati in quella circoscrizione, ossia lì A ha preso il suo ultimo seggio per mezzo dei resti, si prova a trasferire il seggio da B ad A in un'altra circoscrizione (dove B ha ottenuto il suo ultimo seggio con il secondo resto in ordine crescente), sempre che A abbia resti inutilizzati anche in tale circoscrizione.

- Se non si riesce a trovare una circoscrizione in cui B ha ottenuto il suo ultimo seggio con il resto mentre A ha resti inutilizzati, si toglie il seggio a B nella circoscrizione dove lo ha ottenuto con il resto minore, e lo si regala ad A nella circoscrizione dove A ha il più alto resto inutilizzato.

Si noti che questa procedura va comunque ad alterare in quelle circoscrizioni la proporzionalità fra voti e seggi delle varie liste.

Esempio 13 bis Tornando all'esempio 13, occorre "restituire" al partito A un seggio. La lista B ne ha uno eccedente: da quale circoscrizione lo prendiamo? Secondo le regole sopra elencate, da quella in cui il seggio di B è stato ottenuto col resto minore. I resti della lista B erano $R^I(B) = 0,76$ e $R^{II}(B) = 0,73$; quindi il seggio va tolto a B nella circoscrizione II, sempre che in II A abbia resti non utilizzati. In II, A ha il resto inutilizzato di $0,27$, e pertanto possiamo spostare il seggio da B ad A, ottenendo

$$S_A^{II} = 4, \qquad S_B^{II} = 1.$$

La distribuzione finale dei seggi sarà allora

$$S_A^I = 3, \quad S_A^{II} = 4, \qquad S_B^I = 2, \quad S_B^{II} = 1:$$

I vincoli $S^I = S^{II} = 5$ e $S_A = 7$, $S_B = 3$ sono rispettati e abbiamo finito.

Tuttavia, non è detto che questo tipo di compensazione sia sempre possibile! Ecco ciò che può accadere in un esempio del tutto realistico, fornito nel 2005 da A. Pennisi, F. Ricca e B. Simeone e qui parzialmente modificato.

Esempio 14 Consideriamo uno Stato con popolazione pari all'incirca a metà di quella italiana, con territorio diviso in 5 circoscrizioni elettorali I, II, III, IV, V. Supponiamo che la distribuzione degli $S = 630$ seggi nelle 5 circoscrizioni sia:

$$S^I = 121, \quad S^{II} = 121, \quad S^{III} = 121, \quad S^{IV} = 122, \quad S^V = 145;$$

Immaginiamo che ad una elezione abbiano concorso tre partiti A, B, C, e che i risultati siano i seguenti:

r	V_A^r	V_B^r	V_C^r	V^r
I	1.700.000	1.396.140	853.140	3.949.280
II	1.824.000	1.326.430	877.990	4.028.420
III	1.816.710	1.347.060	837.360	4.001.130
IV	1.972.120	3.264.500	810.000	6.046.620
V	1.999.890	3.288.770	2.613.330	7.901.990
V_i	9.312.720	10.622.900	5.991.820	25.927.440

Applicando le indicazioni della legge, determiniamo la distribuzione dei seggi su base nazionale, calcolando dapprima

$$Q = \frac{V}{S} = 41154, \overline{6},$$

e successivamente

$$\begin{aligned} S_A &= \left[\frac{V_A}{[Q]}\right] = \left[\frac{9.312.720}{41154}\right] = [226, 29] = 226, \\ S_B &= \left[\frac{V_B}{[Q]}\right] = \left[\frac{10.622.900}{41154}\right] = [258, 12] = 258, \\ S_C &= \left[\frac{V_C}{[Q]}\right] = \left[\frac{5.991.820}{41154}\right] = [145, 59] = 145; \end{aligned}$$

con i resti si assegna il 630° seggio a C, ottenendo

$$S_A = 226, \qquad S_B = 258, \qquad S_C = 146.$$

Adesso proviamo a suddividere i seggi circoscrizione per circoscrizione: dalla formula $S_i^r = \left[\frac{V_i^r}{Q_i}\right]$, ove $Q_i = \left[\frac{S_i}{V_i}\right]$, si ottiene

r	S_A^r	S_B^r	S_C^r
I	[52,08]	[42,77]	[26,13]
II	[54,78]	[39,84]	[26,37]
III	[54,93]	[40,73]	[25,32]
IV	[39,79]	[65,86]	[16,34]
V	[36,69]	[60,34]	[47,95]

e con i resti

r	S_A^r	S_B^r	S_C^r	S^r
I	52	43	26	121
II	55	40	26	121
III	55	41	25	121
IV	40	66	16	122
V	37	60	48	145
S_i	239	250	141	630
invece di	226	258	146	630

Come si vede, la lista A è eccedentaria di ben 13 seggi, dovendone dare 8 a B e 5 a C. Tale lista ha ottenuto seggi con i resti nelle circoscrizioni II, III, IV e V, quindi può cedere al più 4 seggi, uno per ognuna di queste quattro circoscrizioni. Pertanto, la procedura di assegnazione si intoppa, e la legge non è in grado di distribuire tutti i seggi.

Modesta proposta

Concludiamo con una ricetta per evitare il problema dell'allocazione biproporzionale. Come al solito, indichiamo con V e V^r rispettivamente il totale dei voti validi nazionali e il totale dei voti validi nella regione r, mentre con S e S^r indichiamo rispettivamente il totale dei seggi da assegnare su base nazionale e il numero di seggi da assegnare nella regione r.
Il decreto del Presidente della Repubblica suddivide i 386 seggi fra le regioni in misura proporzionale alla popolazione, stabilendo quindi i numeri S^r, $r = 1 \ldots, r$. Allora, per ciascuna circoscrizione r, si potrebbero semplicemente spartire gli S^r seggi fra le varie liste secondo il consueto sistema proporzionale, ottenendo i numeri S_i^r per $i = 1, \ldots n$ e $r = 1, \ldots, 28$; infine si potrebbe *definire* la quota di seggi nazionale di ciascuna lista come

$$S_i := \sum_{r=1}^{28} S_i^r \, .$$

Procedendo in questo modo il problema dell'allocazione biproporzionale non si pone, e risulta

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{28} S_i^r = \sum_{r=1}^{28} \sum_{i=1}^{n} S_i^r = \sum_{r=1}^{28} S^r = S.$$

Esempio 15 Nell'esempio 14, dove la legge si blocca, basterebbe stabilire per valida la distribuzione regione per regione, e definire le quote nazionali di voti come

$$S_A = 239, \quad S_B = 250, \quad S_C = 141.$$