Analisi matematica 2

Primo compitino - 25 novembre 2019

Esercizio 1 Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{\sqrt{x^2+n^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

(i) Determinare in quali sottointervalli di $\mathbb{R}$ vi è convergenza puntuale e calcolare la funzione limite.

(ii) Determinare in quali sottointervalli di $\mathbb{R}$ vi è convergenza uniforme.

Esercizio 2 Sia $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ F(x,y) = 0\}$, ove

$$F(x,y) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{y}{1+y^2} + e^x - e^{3y} - (x+1)y.$$

(i) Verificare che $(0,0) \in Z$ e che esiste un intorno U di $(0,0)$ tale che $Z \cap U$ è grafico di una funzione $y = g(x)$ di classe C^∞.

(ii) Provare che per ogni $x_0 > 0$ esiste un unico $y_0 > 0$ tale che $(x_0, y_0) \in Z$, e dedurre che la funzione g ha un'estensione $G : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, tale che

$$G(x) > 0 \quad \forall x > 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} G(x) = \infty.$$

Esercizio 3 Trovare il massimo ed il minimo della funzione

$$f(x,y) = y\, e^{\frac{x^2}{2}} - x\, e^{\frac{y^2}{2}}$$

nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$.

Risoluzione

Esercizio 1 (i) Poiché
$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}},$$
la successione converge puntualmente in $\mathbb{R}$ alla funzione $f(x) = x$.

(ii) Risulta
$$|f_n(x) - x| = |x| \left[\frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} - 1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}} \right] = \frac{\frac{x^2}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} \left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}} + 1 \right)},$$
da cui
$$|f_n(x) - x| \leq \frac{\frac{x^2}{n^2}}{1+\frac{x^2}{n^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$
Da questa stima segue che vi è convergenza uniforme in ogni intervallo del tipo $[-M, M]$ con $M > 0$:
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\leq M} |f_n)(x) - x| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M^2}{n^2} = 0.$$
Non vi è invece convergenza uniforme su $\mathbb{R}$, in quanto
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - x| \geq \lim_{|x|\to\infty} |f_n(x) - x| = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{x^2}{n^2}}{1+\frac{x^2}{n^2} + \sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}} = 1.$$

Esercizio 2 (i) La funzione F è di classe C^∞ ed è evidente che $F(0,0) = 0$. Inoltre
$$F_x(x,y) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + e^x - y, \qquad F_x(0,0) = 2,$$
$$F_y(x,y) = -\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} - 3e^{3y} - x - 1, \quad F_y(0,0) = -5,$$
dal teorema del Dini segue che esiste un intorno U di $(0,0)$ tale che $Z \cap U$ è grafico di una funzione $y = g(x)$ di classe C^∞, tale che $g(0) = 0$ e $g'(0) = \frac{2}{5}$.

(ii) Sia $x_0 > 0$. Notiamo che, essendo $\frac{|t|}{1+t^2} \le \frac{1}{2}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, risulta

$$\lim_{y\to+\infty} F(x_0,y) = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{x_0}{1+x_0^2} - \frac{y}{1+y^2} + e^{x_0} - e^{3y} - (x_0+1)y\right) = -\infty,$$
$$\lim_{y\to-\infty} F(x_0,y) = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{x_0}{1+x_0^2} - \frac{y}{1+y^2} + e^{x_0} - e^{3y} - (x_0+1)y\right) = +\infty,$$

cosicché l'equazione $F(x_0,y) = 0$ ha almeno una soluzione y_0. Inoltre tale soluzione è unica: infatti, dato che $\frac{|1-y^2|}{(1+y^2)^2} < 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, si ha

$$F_y(x_0,y) = -\frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} - 3e^{3y} - x_0 - 1 < 0 \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

D'altra parte, essendo $x_0 > 0$, vale

$$F(x_0,0) = \frac{x_0}{1+x_0^2} + e^{x_0} - 1 > 0,$$

e dunque la relazione $F(x_0,y_0) = 0$ implica, per decrescenza, che $y_0 > 0$. Dunque, per ogni $x_0 > 0$ esiste un unico $y_0 > 0$ per il quale $F(x_0,y_0) = 0$ e $F_y(x_0,y_0) < 0$; quindi esiste un intorno V di (x_0,y_0) tale che $Z \cap V$ è grafico di una funzione $y = g_1(x)$. L'unione di tutti questi intorni forma un "tubo" intorno all'insieme Z, nel quale i grafici delle funzioni g_1 si raccordano fra loro, per continuità, e formano il grafico di un'unica funzione $G(x)$, definita per $x \ge 0$ (anzi, per $x \in [-\delta, +\infty[$, con un certo $\delta > 0$), che estende la $g(x)$ del punto **(i)**, che era definita in $[-\delta, \delta]$. Tale $G(x)$ assume valori positivi per $x > 0$.
Inoltre, poiché

$$F(x,G(x)) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{G(x)}{1+G(x)^2} + e^x - e^{3G(x)} - (x+1)G(x) = 0 \quad \forall x > 0,$$

si ricava

$$e^{3G(x)} + (x+1)G(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{G(x)}{1+G(x)^2} + e^x \ge -\frac{1}{2} + e^x \quad \forall x > 0,$$

e a maggior ragione

$$e^{3G(x)} + \frac{G(x)^2}{2} + \frac{(x+1)^2}{2} \ge -\frac{1}{2} + e^x \quad \forall x > 0,$$

ovvero
$$e^{3G(x)} + \frac{G(x)^2}{2} \geq -\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{1}{2} + e^x \quad \forall x > 0,$$
il che implica
$$\lim_{x\to\infty} \left(e^{3G(x)} + \frac{G(x)^2}{2} \right) = +\infty.$$
Infine, osservando che
$$e^{3t} + \frac{t^2}{2} \to +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad t \to +\infty,$$
si conclude che deve essere
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = +\infty.$$

Esercizio 3 La funzione f è di classe C^∞. Cerchiamo i punti stazionari interni: si ha
$$f_x(x,y) = xy\, e^{\frac{x^2}{2}} - e^{\frac{y^2}{2}}, \qquad f_y(x,y) = e^{\frac{x^2}{2}} - xy\, e^{\frac{y^2}{2}},$$
e dunque i punti stazionari risolvono il sistema
$$\begin{cases} xy\, e^{\frac{x^2}{2}} - e^{\frac{y^2}{2}} = 0 \\ e^{\frac{x^2}{2}} - xy\, e^{\frac{y^2}{2}} = 0. \end{cases}$$
Inserendo la prima equazione nella seconda si trova
$$e^{\frac{y^2}{2}} = xy\, e^{\frac{x^2}{2}} = x^2y^2\, e^{\frac{y^2}{2}},$$
da cui $xy > 0$ e $x^2y^2 = 1$, ossia $xy = 1$. Sostituendo $y = \frac{1}{x}$ nella seconda equazione, ricaviamo
$$e^{\frac{x^2}{2}} - e^{\frac{1}{2x^2}} = 0.$$
L'unica soluzione è data da $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2x^2}$, ossia $x^4 = 1$: dato che $x \in [0,1]$, si ricava $x = 1$; quindi $y = 1$. Si trova così il punto stazionario $(1,1)$, che non è interno al quadrato, ma ne è un vertice: in esso si ha
$$f(1,1) = 0.$$
Negli altri vertici del quadrato si ha
$$f(0,0) = 0, \quad f(0,1) = 1, \quad f(1,0) = -1.$$
Restano i quattro lati:

- Su $]0,1[\times\{0\}$ si ha $f(x,0)=-x$, con derivata -1: nessun punto stazionario vincolato;
- Su $]0,1[\times\{1\}$ si ha $f(x,1)=e^{\frac{x^2}{2}}-x\,e^{\frac{1}{2}}$, con derivata $x\,e^{\frac{x^2}{2}}-e^{\frac{1}{2}}<0$ per ogni $x\in]0,1[$: nessun punto stazionario vincolato;
- Su $\{0\}\times]0,1[$ si ha $f(0,y)=y$, con derivata 1: nessun punto stazionario vincolato;
- Su $\{1\}\times]0,1[$ si ha $f(1,y)=y\,e^{\frac{1}{2}}-e^{\frac{y^2}{2}}$, con derivata $e^{\frac{1}{2}}-y\,e^{\frac{y^2}{2}}>0$ per ogni $y\in]0,1[$: nessun punto stazionario vincolato.

In conclusione, confrontando i valori trovati, si ottiene

$$\max_{[0,1]\times[0,1]} f = f(0,1) = 1, \qquad \min_{[0,1]\times[0,1]} f = f(1,0) = -1.$$