Corollario Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_N$, con $E_n \subseteq E_{n+1} \subseteq D$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Se f è integrabile su D, allora

$$\int_{\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx.$$

dim omessa (è simile a quella sul comportamento di m_N su successioni di insiemi misurabili crescenti rispetto all'inclusione). □

Proposizione L'integrale è lineare: cioè, se f, g sono sommabili su D e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_D (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_D f(x)dx + \mu \int_D g(x)dx.$$

dim. Lunga anche se concettualmente facile, quindi omessa. □

Osservazione Se f, g sono integrabili in D e se **non** si ha

$$\int_D f(x)dx = -\int_D f(x)dx = \pm\infty,$$

allora

$$\int_D [f(x) + g(x)]\, dx = \int_D f(x)dx + \int_D g(x)dx.$$

Osservazione Per $N=1$, $D=[a,b]$ e $f\in R(a,b)$, facciamo un confronto tra l'integrale di Riemann
$$\int_a^b f(x)dx$$
e l'integrale di Lebesgue
$$\int_{[a,b]} f(x)dx.$$
Ricordiamo che, essendo $f\in R(a,b)$, f è limitata in $[a,b]$.
Supponiamo dapprima $f\geq 0$.
Come sappiamo,
$$\int_a^b f(x)dx = I^+(f) = I^-(f),$$
ove
$$I^+(f)= \inf_\sigma S(f,\sigma), \qquad I^-(f)= \sup_\sigma s(f,\sigma),$$
essendo $\sigma=\{a=t_0<t_1<\dots<t_k=b\}$ una suddivisione di $[a,b]$.
Poniamo $J_i=[t_{i-1},t_i]$, $i=1\dots k$, e $m_i=\inf_{J_i} f$, $M_i=\sup_{J_i} f$. Allora, per ogni suddivisione σ di questo tipo, posto
$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^k m_i I_{J_i}(t), \qquad \psi(t)=\sum_{i=1}^k M_i I_{J_i}(t),$$
le funzioni φ,ψ sono particolari funzioni semplici: sono costanti a tratti, cioè sono combinazioni lineari finite di funzioni indicatrici di intervalli (e non di generici insiemi misurabili). Scriveremo $\varphi,\psi\in CT$.
Per tali φ,ψ si ha
$$s(f,\sigma)=\int_a^b \varphi(x)dx, \quad S(f,\sigma)=\int_a^b \psi(x)dx,$$
ed inoltre $0\leq\varphi\leq f\leq\psi$ in $[a,b]$. Dunque

$$I^-(f) = \sup_\sigma s(f,\sigma) = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : 0 \le \varphi \le f,\ \varphi \in CT\right\},$$

$$I^+(f) = \inf_\sigma S(f,\sigma) = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)\,dx : \psi \ge f,\ \psi \in CT\right\}.$$

Ne segue anzitutto, essendo $CT \subseteq \{\varphi \in S : \varphi = 0 \text{ in } [a,b]^c\}$,

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : 0 \le \varphi \le f,\ \varphi \in CT\right\} \le$$

$$\le \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)\,dx : 0 \le \varphi \le f I_{[a,b]},\ \varphi \in S\right\} = \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

D'altronde, osserviamo che se $\varphi \in CT$, $\varphi = \sum_{i=1}^k \alpha_i I_{J_i}$,

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^k \alpha_i \ell(J_i) = \int_{[a,b]} \varphi(x)\,dx;$$

perciò, per ogni fissata $\psi \in CT$ con $\psi \ge f$ e per ogni $\varphi \in S$ con $0 \le \varphi \le f I_{[a,b]}$ otteniamo, per la monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b \psi(x)\,dx = \int_{[a,b]} \psi(x)\,dx \ge \int_{[a,b]} \varphi(x)\,dx,$$

e per l'arbitrarietà di $\varphi \in S$, $0 \le \varphi \le f I_{[a,b]}$,

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \ge \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

Poiché anche $\psi \in CT$, $\psi \ge f$, è arbitraria, si conclude che

$$I^+(f) \ge \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

Pertanto, se $f \ge 0$ si conclude che $\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

Infine, se $f \in R(a,b)$ ma $f \not\geq 0$, si osserva che

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f^+(x)\,dx - \int_{[a,b]} f^-(x)\,dx\,;$$

poiché $f^+, f^- \in R(a,b)$ e sono non negative, per quanto già visto

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx = \int_a^b [f^+(x) - f^-(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dunque: se $f \in R(a,b)$, allora f è sommabile in $[a,b]$ ed il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann.

Ne segue:

(a) che nei casi concreti di integrandi continui, il calcolo degli integrali si fa nel modo consueto;

(b) che esistono, come abbiamo visto, funzioni sommabili e limitate in $[a,b]$, che non sono Riemann-integrabili (esempio: I_{C_α}, ove C_α è l'insieme di Cantor di parametro $\alpha < \frac{1}{3}$), e pertanto l'integrale di Lebesgue è <u>più generale</u> di quello di Riemann.

La prossima tappa consiste nello studio di alcuni fondamentali teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, molto generali e molto utili anche per stabilire i metodi di calcolo per gli integrali multipli.

Infine, se $f \in R(a,b)$ ma $f \ngeq 0$, si osserva che

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f^+(x)\,dx - \int_{[a,b]} f^-(x)\,dx\,;$$

poiché $f^+, f^- \in R(a,b)$ e sono non negative, per quanto già visto

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx = \int_a^b [f^+(x) - f^-(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dunque: se $f \in R(a,b)$, allora f è sommabile in $[a,b]$ ed il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann.

Ne segue:

(a) che nei casi concreti di integrandi continui, il calcolo degli integrali si fa nel modo consueto;

(b) che esistono, come abbiamo visto, funzioni sommabili e limitate in $[a,b]$, che non sono Riemann-integrabili (esempio: I_{C_α}, ove C_α è l'insieme di Cantor di parametro $\alpha < \frac{1}{3}$), e pertanto l'integrale di Lebesgue è più generale di quello di Riemann.

La prossima tappa consiste nello studio di alcuni fondamentali teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale, molto generali e molto utili anche per stabilire i metodi di calcolo per gli integrali multipli.