Esercizi

- $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

La convergenza è uniforme in $\mathbb{R}$ perché, per $n \to \infty$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big| f_n(x) - |x| \big| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left[\sqrt{x^2+\tfrac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right] = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + |x|} \leq$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0.$$

- $f_n(x) = \min\{|x|, n\}$.

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$ (definitivamente si ha $n > |x|$ e dunque $f_n(x) = |x|$).

La convergenza non è uniforme in $\mathbb{R}$, perché

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \big| f_n(x) - |x| \big| \geq \sup_{|x|\geq n} \big| f_n(x) - |x| \big| = \sup_{|x|\geq n} \big| n - |x| \big| = +\infty,$$

però vi è convergenza uniforme in $[-M, M]$ per ogni $M > 0$: infatti, appena $n > M$, si ha $f_n(x) = |x|$ e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\leq M} \big| f_n(x) - |x| \big| = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$

La convergenza assoluta e puntuale si ha per $x \neq 0$, per confronto asintotico con $\sum \frac{1}{n^2}$. La convergenza totale si ha per $|x| \geq \delta$, con $\delta > 0$: infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x| \geq \delta} \frac{1}{1+n^2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2\delta^2} < \infty .$$

In tali intervalli si ha anche la convergenza uniforme.

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n}\right)^n I_{[-n,n]}(x)$

si ha convergenza assoluta e puntuale in $\mathbb{R}$, per confronto con $\sum \frac{|x|^n}{n^n}$, serie convergente per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Si ha anche convergenza totale e uniforme in $\mathbb{R}$: infatti

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \operatorname{arctg} \frac{x}{n} \right|^n I_{[-n,n]}(x) = (\operatorname{arctg} 1)^n = \left(\frac{\pi}{4}\right)^n \to 0 .$$

- $f_n(x) = \dfrac{nx+1}{n^2x^2+1}$

Si ha convergenza puntuale in R alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

La convergenza è uniforme per $|x| \geq \delta$, con $\delta > 0$: infatti

$$\sup_{|x|\geq\delta} \frac{|nx+1|}{n^2x^2+1} \leq \sup_{|x|\geq\delta} \frac{|nx|+1}{n^2x^2+1} \leq \sup_{|x|\geq\delta}\left(\frac{1}{n|x|}+\frac{1}{n^2x^2}\right)=\frac{1}{n\delta}+\frac{1}{n^2\delta^2},$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{|x|\geq\delta} \frac{|nx+1|}{n^2x^2+1}=0.$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin e^{-nx^2}$

La convergenza puntuale e assoluta si ha per ogni $x\neq0$, per confronto con $\sum e^{-nx^2}$. Per $x=0$ la serie diverge a $+\infty$, essendo $\sin 1>0$. Si ha convergenza uniforme e totale per $|x|\geq\delta$, con $\delta>0$: infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x|\geq\delta} \sin e^{-nx^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\delta^2}<\infty.$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$

La serie non converge assolutamente in alcun $x\in\mathbb{R}$, però converge puntualmente per ogni $x\in\mathbb{R}$, essendo $\frac{x^2+n}{n^2}$ decrescente e infinitesima per ogni $x\in\mathbb{R}$. Non si ha mai convergenza totale, mentre vi è convergenza uniforme in $[-M,M]$, con $M>0$, in virtù del criterio di Leibniz:

$$\sup_{|x|\leq M} \left|\sum_{n=N}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}\right| \leq \frac{x^2+N}{N^2} \leq \frac{M^2+N}{N^2} \to 0 \text{ per } N\to\infty.$$

- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-\sqrt{n}}$$

Il raggio di convergenza di questa serie di potenze è 1. La serie converge assolutamente in $]-1,1[$, e puntualmente in $[-1,1[$, essendo $\frac{1}{n-\sqrt{n}}$ decrescente e infinitesima.
Si ha convergenza totale in $[-1+\delta, 1-\delta]$, con $\delta>0$, mentre la convergenza è uniforme in $[-1, 1-\delta]$, grazie alla stima

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^n}{n-\sqrt{n}}\right| \leq \frac{|x|^N}{N-\sqrt{N}} \leq \frac{1}{N-\sqrt{N}} \quad \forall x\in[-1,0],\ \forall N\geq 2.$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n+1}$$

Si ha convergenza assoluta per $|2x-1|<3$, cioè $x\in]-1,2[$.
La convergenza puntuale si ha nello stesso intervallo. Si ha convergenza uniforme e totale in $[-1+\delta, 2-\delta]$ per $\delta>0$: infatti

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[-1+\delta,2-\delta]} \frac{|2x-1|^n}{3^n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3-\delta)^n}{3^n+1} < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3-\delta}{3}\right)^n < \infty.$$

- $f_n(x) = \min\left\{\sqrt{n}, \max\left\{|x|, \frac{1}{\sqrt{n}}\right\}\right\}$.

Poichè

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{se } |x|<\frac{1}{\sqrt{n}} \\ |x| & \text{se } \frac{1}{\sqrt{n}}\leq |x| \leq \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \text{se } |x|>\sqrt{n}, \end{cases}$$

si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |x|$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. La convergenza è uniforme in $[-M, M]$, con $M>0$: se $n>M$, $|f_n(x)-|x||=0$.

Altri esercizi

- $\begin{cases} u' = 0 \\ v' = 1 \\ w' = u + v + w \end{cases}$

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) = 0$$

se e solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_2 = 1$. Gli autovalori: per l'autovalore 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se, ad esempio,

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1, \end{cases} \quad \text{ossia } \underline{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per $\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se e solo se, ad esempio, $x = y = 0$ e $z = 1$. Dunque $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Perciò

$$V_0 = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice

$$W(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & e^t \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a $-e^t$, e la sua inversa è

$$W(t)^{-1} = -e^{-t} \begin{pmatrix} 0 & -e^t & 0 \\ -e^t & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ e^{-t} & -e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$\underline{v}(t) = \int_0^t W(s)^{-1} \underline{f}(s)\, ds = \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Perciò

$$V_f = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1-e^{-t} \end{pmatrix} \right\}.$$

- Sia $F(x,y) = e^{-x^2} - e^{-y^2} - x^2 + e^{2y} - e^x + y$. Posto $Z = \{(x,y) : F(x,y) = 0\}$, si provi che:
  - (i) $(0,0) \in Z$ ed esiste un intorno U di $(0,0)$ tale che $Z \cap U$ è grafico di una funzione $y = g(x)$;
  - (ii) per ogni $x_0 > 0$ esiste un unico $y_0 > 0$ tale che $F(x_0, y_0) = 0$,
  - (iii) esiste una estensione $G : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ di g, tale che $G(x) > 0$ per ogni $x > 0$, e $\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$.

È chiaro che $F(0,0) = 0$. Poi,

$$F_x(x,y) = y\cos xy - y\sin xy + e^x - y, \quad F_x(0,0) = 1$$
$$F_y(x,y) = x\cos xy - x\sin xy - x, \quad F_y(0,0) = 0.$$

Quindi, per il teorema del Dini, esiste un intorno U di $(0,0)$ tale che $U \cap Z = \{(x,y) : x = h(y)\}$, con h funzione di classe C^∞ per la quale

$$h(0) = 0, \quad h'(x) = -\frac{F_y(h(y), y)}{F_x(h(y), y)}, \quad h'(0) = 0.$$

Ciò prova (i).

Per (ii), sia $y_0 < 0$. Per $F(x, y_0) = \sin xy_0 - \cos xy_0 + e^x - xy_0$, risulta

$$\lim_{x \to +\infty} F(x, y_0) = +\infty$$

per la presenza di e^x; inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y_0) = -\infty,$$

grazie all'addendo $-xy_0$. Dunque, per continuità, esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $F(x_0, y_0) = 0$. Ciò prova (ii).

- Trovare il massimo e il minimo di $f(x,y) = ye^x - xe^y$ su $[0,1] \times [0,1]$.

La f è di classe C^∞ e i punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} ye^x - e^y = 0 \\ e^x - xe^y = 0, \end{cases}$$

la 1ª equazione, inserita nella seconda, dà

$$e^y = ye^x = yxe^y,$$

da cui

$$1 = xy;$$

sostituendo $y = \frac{1}{x}$ nella 2ª,

$$e^x - xe^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Una soluzione è $x=1$; non ce ne sono altre in $[0,1]$, perché

$$\frac{d}{dx}\left(e^x - xe^{\frac{1}{x}}\right) = e^x - e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}-1\right)e^{\frac{1}{x}} + e^x > 0 \quad \forall x \in]0,1].$$

All'ascissa $x=1$ corrisponde l'ordinata $y=1$. In realtà $(1,1)$ non è interno a $[0,1]\times[0,1]$, ma è un vertice, e si ha

$$f(1,1) = 0.$$

Negli altri vertici si ha

$$f(0,0)=0, \quad f(0,1)=1, \quad f(1,0)=-1.$$

Lungo i 4 lati, si ha:

$]0,1[\times\{0\}$: $f(x,0) = -x$, nessun punto interessante;

$]0,1[\times\{1\}$: $f(x,1) = e^x - ex$, derivata $e^x - e$ negativa, nessun punto interessante;

$\{0\}\times]0,1[$: $f(0,y) = y$, nessun punto interessante;

$\{1\}\times]0,1[$: $f(1,y) = ye - e^y$, derivata positiva, nessun punto interessante.

Conclusione: $\max f = 1$, $\min f = -1$.