Premettiamo la definizione di differenziabilità per funzioni vettoriali.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, sia $\underline{f}: A \to \mathbb{R}^p$; dunque

$$\underline{f}(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_p(\underline{x})), \quad \underline{x} \in A.$$

Def. Diciamo che $\underline{f}$ è differenziabile nel punto $\underline{x}_0 \in A$ se esiste una matrice A, $p \times N$, tale che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{|\underline{f}(\underline{x}) - \underline{f}(\underline{x}_0) - A \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)|_p}{|\underline{x} - \underline{x}_0|_N} = 0$$

ove $A \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$ è il prodotto riga per colonna. La matrice A è detta matrice Jacobiana di $\underline{f}$ in $\underline{x}_0$.

Si può osservare che $\underline{f}$ è differenziabile in $\underline{x}_0$ se e solo se le funzioni $f_1, \dots, f_p$ sono tutte differenziabili in $\underline{x}_0$; di conseguenza la riga i-sima di A è costituita dal vettore $\nabla f_i(\underline{x}_0)$, e dunque

$$A = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0) \right\}_{i=1..p,\ j=1,\dots,N}.$$

La funzione $\underline{f}$ si dirà di classe C^1 se tutte le $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sono funzioni continue.

Sia $N > p$; per una funzione $\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^p$ scriviamo

$$\underline{x} = (\underline{u}, \underline{y}) \quad \text{con} \quad (\underline{u}, \underline{y}) \in A, \ \underline{u} \in \mathbb{R}^{N-p}, \ \underline{y} \in \mathbb{R}^p,$$

e indichiamo con $\underline{F}_{\underline{u}}$, $\underline{F}_{\underline{y}}$ le matrici

$$F_{\underline{u}}(\underline{u}, \underline{y}) = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial u_j}(\underline{u}, \underline{y}) \right\}_{i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,N-p} = \big(p \times (N-p)\big)$$

$$F_{\underline{y}}(\underline{u}, \underline{y}) = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\underline{u}, \underline{y}) \right\}_{i=1,\dots,p,\ j=N-p+1,\dots,N} \quad (p \times p).$$

<u>Teo. (del Dini, caso generale)</u> Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, sia $\underline{F} : A \to \mathbb{R}^p$ (con $p < N$) di classe C^1. Poniamo

$$Z = \{ (\underline{u}, \underline{y}) \in A : \underline{F}(\underline{u}, \underline{y}) = \underline{0} \}.$$

Sia $(\underline{u}_0, \underline{y}_0) \in Z$. Se la matrice $F_{\underline{y}}(\underline{u}_0, \underline{y}_0)$ è non singolare, ossia det $F_{\underline{y}}(\underline{u}_0, \underline{y}_0)$, allora esistono un intorno U di $\underline{u}_0$ in $\mathbb{R}^{N-p}$, un intorno V di $\underline{y}_0$ in $\mathbb{R}^p$, ed una funzione $\underline{g} : U \to V$, di classe C^1, tali che

$$\begin{cases} (\underline{u}, \underline{y}) \in U \times V \\ \underline{F}(\underline{u}, \underline{y}) = \underline{0} \end{cases} \iff \left\{ \underline{y} = \underline{g}(\underline{u}), \ \underline{u} \in U. \right.$$

Inoltre

$$\underline{g}_{\underline{u}}(\underline{u}) = -F_{\underline{y}}(\underline{u}, \underline{g}(\underline{u}))^{-1} F_{\underline{u}}(\underline{u}, \underline{g}(\underline{u})) \quad \forall \underline{u} \in U$$

(prodotto riga per colonna, è una matrice $p \times (N-p)$).

la dimostrazione di questo enunciato è più complicata che nel caso $N=2$, e viene omessa. □

<u>Osservazione (il caso $N=3$)</u> Se $N=3$, nel teorema del Dini può essere $p=1$ e $p=2$.

Se $p=1$, la F è a valori reali, definita in $A \subseteq \mathbb{R}^3$, e le ipotesi sono

$$F(x_0,y_0,z_0)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

La conclusione è che esiste $g: U \to V$, con U intorno di (x_0,y_0) in $\mathbb{R}^2$, V intorno di z_0 in $\mathbb{R}$, tale che

$$\begin{cases} (x,y,z)\in U\times V \\ F(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=g(x,y), \ (x,y)\in U, \end{cases}$$

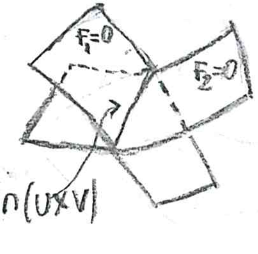
e la dimostrazione funzionerebbe come nel caso $N=2$.

Se $p=2$, la $\underline{F}$ ha due componenti e le ipotesi sono

$$\begin{cases} F_1(x_0,y_0,z_0)=0 \\ F_2(x_0,y_0,z_0)=0, \end{cases} \qquad \det\begin{pmatrix} (F_1)_y(x_0,y_0,z_0) & (F_1)_z(x_0,y_0,z_0) \\ (F_2)_y(x_0,y_0,z_0) & (F_2)_z(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}\neq 0$$

Si conclude che esiste $\underline{g}: U \to V$, con U intorno di x_0 in $\mathbb{R}$, V intorno di (y_0,z_0) in $\mathbb{R}^2$, tale che

$$\begin{cases} (x,y,z)\in U\times V \\ F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}=\underline{g}(x), \ x\in U. \end{cases}$$



Nel primo caso, $p=1$, $Z \cap (U \times V)$ è grafico di una funzione di 2 variabili e il piano tangente a questo grafico in (x_0, y_0, z_0) ha equazione

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 .$$

Nel secondo caso, $p=2$, $Z \cap (U \times V)$ è "grafico" di una funzione di 1 variabile, nel senso che $(y,z) = \underline{g}(x)$ per $x \in U$; la retta tangente a questa curva in (x_0, y_0, z_0) è espressa come intersezione di due piani:

$$\begin{cases} (F_1)_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + (F_1)_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + (F_1)_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \\ (F_2)_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + (F_2)_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + (F_2)_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0, \end{cases}$$

in forma matriciale tale retta è data da

$$[DF(x_0)] \cdot (\underline{x} - \underline{x_0}) = \underline{0}, \quad \text{ove} \quad \underline{x} = (x,y,z).$$

<u>Esempi</u> (1) $Z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - x^2 y = 1\}$ ha 3 punti di ascissa 1: $y=0$, $y=1$, $y=-1$. In ciascuno, Z è localmente grafico di una funzione C^∞: infatti $F(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 y$ è di classe C^∞ e $F_y(x,y) = 3y^2 - x^2$ è diversa da 0 in $(1,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$. Si ha $F_x(x,y) = 3x^2 - 2xy$, nell'intorno di $(1,0)$ si ha

$$F(x, g(x)) = 0, \quad g(1) = 0, \quad g'(1) = -\frac{F_x(1,0)}{F_y(1,0)} = -\frac{3}{-1} = +3;$$

inoltre

$$g''(x) = -\frac{d}{dx}\frac{F_x(x,g(x))}{F_y(x,g(x))} = -\frac{[F_{xx}+F_{xy}\,g']F_y - F_x[F_{yx}+F_{yy}\,g']}{F_y^{\,2}}$$

da cui, essendo $F_{xx} = 6x-2y$, $F_{xy} = -2x$, $F_{yy} = 6y$,

$$g''(1) = -\frac{(6-6)(-1)-3(-2+0)}{1} = -6.$$

Perciò il polinomio di Taylor di g è

$$p(x) = 3(x-1) - 3(x-1)^2.$$

Nell'intorno di $(1,1)$ si ha

$$g(1)=1, \quad g'(1) = -\frac{F_x(1,1)}{F_y(1,1)} = -\frac{2}{2} = -1,$$

$$g''(1) = -\frac{[4-2(-1)]\cdot 2 - 1\cdot[-2+6(-1)]}{4} = -5$$

da cui

$$p(x) = 1-(x-1)-\frac{5}{2}(x-1)^2.$$

Infine nell'intorno di $(1,-1)$ si ha

$$g(1)=-1, \quad g'(1) = -\frac{F_x(1,-1)}{F_y(1,-1)} = \frac{-5}{2},$$

$$g''(1) = -\frac{[8+5]\cdot 2 - 5[-2-6(-\frac{5}{2})]}{4} = -\frac{26-65}{4} = -\frac{39}{4},$$

da cui

$$p(x) = -1-\frac{5}{2}(x-1)-\frac{39}{8}(x-1)^2.$$

(2) Sia $\underline{F}(x,y,z) = (\sin x+\sin y+\sin z-1,\ \cos x+\cos y+\cos z-1)$.
Sia $Z = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underline{F}(x,y,z) = \underline{0}\}$. Allora $(0, \frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}) \in Z$.

In un intorno di questo punto possiamo descrivere l'insieme Z esplicitando (y,z) in funzione di x:

$$Z = \{(x,y,z): \ y = g(x), \ z = h(x)\}$$

con g, h di classe C^∞. Infatti

$$D\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos x & \cos y & \cos z \\ -\sin x & -\sin y & -\sin z \end{pmatrix}$$

e

$$\det \begin{pmatrix} (F_1)_y & (F_1)_z \\ (F_2)_y & (F_2)_z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos y & \cos z \\ -\sin y & -\sin z \end{pmatrix} =$$

$$= -\cos y \sin z + \sin y \cos z = \sin(z-y) \neq 0 \quad \text{per} \begin{cases} y = \frac{5}{6}\pi \\ z = \frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

La retta tangente a Z in $\left(0, \frac{5}{6}\pi, \frac{\pi}{6}\right)$ ha equazioni

$$\begin{cases} x - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(y - \frac{5}{6}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(z - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ -\frac{1}{2}\left(y - \frac{5}{6}\pi\right) - \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{cases}$$

Volendo scrivere la retta in forma parametrica, si deve trovare $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$, ove $\underline{u} = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\underline{v} = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ sono i vettori ortogonali al primo e al secondo piano. Allora la retta è data da $\underline{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5\pi/6 \\ \pi/6 \end{pmatrix} + t\underline{w}$, $t \in \mathbb{R}$. Si trova $\underline{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.