Fac-simile del 3° compitino

Esercizio 1 Determinare, se esistono, i massimi ed i minimi relativi di

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - a(x+y)^2, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

al variare del parametro $a>0$. Calcolare poi $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f$, $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f$.

Esercizio 2 Calcolare gli integrali

$$\int_2^3 \ln\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)dx, \quad \int_0^{2\pi} x^2\,|\sin x|\,dx.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{y-x}}{1+e^x} \\ y(0)=1. \end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 La f è di classe C^∞. Annulliamo il gradiente:

$$\nabla f = \underline{0} \iff \begin{cases} 4x^3 - 2a(x+y) = 0 \\ 4y^3 - 2a(x+y) = 0. \end{cases}$$

Si ha

$$2a(x+y) = 4x^3 = 4y^3,$$

da cui $x=y$ e quindi

$$4ax = 4x^3 \; ,$$

ossia $x=0$ oppure $x = \pm\sqrt{a}$, e di conseguenza i punti stazionari sono

$$(0,0), \quad (\sqrt{a},\sqrt{a}), \quad (-\sqrt{a},-\sqrt{a}).$$

La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-2a & -2a \\ -2a & 12y^2-2a \end{pmatrix};$$

quindi in $(0,0)$ si ha

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2a & -2a \\ -2a & -2a \end{pmatrix}, \qquad \det H_f(0,0) = 0 .$$

Tuttavia $f(0,0)=0$, $f(x,-x) = -1+2x^4 > -1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) = -1+2x^4-4ax^2 = -1+2x^2[x^2-2a] < -1$ per ogni $x \in]-\sqrt{a},\sqrt{a}[$.
Perciò $(0,0)$ è punto di sella.
Poi,

$$H_f(\pm(\sqrt{a},\sqrt{a})) = \begin{pmatrix} 10a & -2a \\ -2a & 10a \end{pmatrix}, \quad \det H_f(\pm(\sqrt{a},\sqrt{a})) = 96a^2 > 0,$$

dunque $(\sqrt{a},\sqrt{a})$ e $(-\sqrt{a},-\sqrt{a})$ sono punti di minimo relativo.
Infine

$$f(x,y) = (x^4+y^4)\left[1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right] \quad \text{per } \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty,$$

quindi $\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty$. Invece si ha $\inf_{\mathbb{R}^2} f = f(\pm(\sqrt{a},\sqrt{a})) = -2a^2$; infatti, fissato $M>0$ esiste $R>0$ tale che $f(x,y) \geq R$ per $\sqrt{x^2+y^2} \geq R$, quindi il minimo di f su $\overline{B((0,0),R)}$ non può essere raggiunto sul bordo, dove f vale più di R, e sarà invece raggiunto in un punto stazionario interno, che dunque è $\pm(\sqrt{a},\sqrt{a})$. In tale punto si ha appunto

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f = f(\pm(\sqrt{a},\sqrt{a})) = 2a^2 - 4a^2 = -2a^2.$$

Esercizio 2. Per il primo integrale si ha, integrando per parti,

$$\int_2^3 \ln\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right) dx =$$

$$= \left[x \ln\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)\right]_2^3 - \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}\right) dx =$$

$$= \left[x \ln\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)\right]_2^3 - \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}} \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

$$= \left[x \ln\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}\right)\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-4}\right]_2^3 =$$

$$= 3\ln\left(\sqrt{5}+1\right) - 2\ln 2 - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Per il secondo si ha

$$\int_0^{2\pi} x^2 |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} x^2 \sin x\, dx.$$

Integrando due volte per parti si ottiene che una primitiva di $x^2 \sin x$ è

$$-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x;$$

dunque

$$\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|\, dx = \left[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right]_0^{\pi} -$$

$$-\left[-x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= \left[(\pi^2-2) - 2\right] - \left[(-4\pi^2+2) - (\pi^2-2)\right] = 6\pi^2 - 8.$$

<u>Esercizio 3</u> L'equazione è a variabili separabili,

$$y' = e^{y} \cdot \frac{e^{-x}}{1+e^{x}},$$

e si ha

$$e^{-y}\,dy = \frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{x}} = \frac{1}{e^{x}} \cdot \frac{1}{e^{x}+1}\,dx = \left(\frac{1}{e^{x}} - \frac{1}{1+e^{x}}\right)dx,$$

da cui, essendo

$$\int \frac{1}{1+e^{x}}\,dx = [t = e^{x}]$$

$$= \int \frac{1}{t}\,\frac{1}{1+t}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \ln|t| - \ln|1+t| + c =$$

$$= \ln\frac{e^{x}}{1+e^{x}} + c = x - \ln(1+e^{x}) + c,$$

si ricava

$$-e^{-y} = -e^{-x} - x + \ln(1+e^{x}) - c,$$

e dunque

$$y(x) = -\ln\left[x + e^{-x} - \ln(1+e^{x}) + c\right].$$

La condizione $y(0)=1$ implica

$$1 = -\ln(1 - \ln 2 + c),$$

cioè $c = -1 + \ln 2 + \frac{1}{e}$. Perciò

$$y(x) = \ln\frac{1}{x + e^{-x} - \ln(1+e^{x}) - 1 + \ln 2 + e^{-1}}.$$

2° facsimile del 3° compitino

Esercizio 1 Determinare, se esistono, i massimi ed i minimi relativi di
$$f(x,y)=b(x^2+y^2-1)-2(x^4+y^4),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$
al variare del parametro $b\in\mathbb{R}$; calcolare poi $\sup_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

Esercizio 2 Calcolare gli integrali
$$\int_3^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx\,,\qquad \int_{-1}^{1} x^2\,|2x-1|\,dx\,.$$

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'''-y'=x-\cos 2x\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\\ y''(0)=1\end{cases}$$

Risoluzione

Esercizio 1 La f è di classe C^∞. Si ha $\nabla f(x,y)=(0,0)$ se e solo se
$$\begin{cases} 2bx-8x^3=0\\ 2by-8y^3=0\end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \text{ oppure } x^2=\frac{b}{4}\\ y=0 \text{ oppure } y^2=\frac{b}{4}\end{cases};$$
quindi se $b\le 0$ si ha il solo punto stazionario $(0,0)$, mentre se $b>0$ si hanno i punti
$$(0,0),\ \left(0,\pm\frac{\sqrt b}{2}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt b}{2},0\right),\ \pm\left(\frac{\sqrt b}{2},\frac{\sqrt b}{2}\right),\ \pm\left(\frac{\sqrt b}{2},-\frac{\sqrt b}{2}\right).$$

Calcoliamo la matrice Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2b - 24x^2 & 0 \\ 0 & 2b - 24y^2 \end{pmatrix}.$$

Se $b<0$, il punto $(0,0)$ è di massimo relativo, con $f(0,0)=-b$;
se $b=0$, l'Hessiana è nulla in $(0,0)$ e non si può dire niente; però
se $b=0$ si ha $f(x,y)=-2(x^4+y^4)$ e dunque $(0,0)$ è punto di massimo (assoluto).

Se $b>0$, il punto $(0,0)$ è di minimo relativo, con $f(0,0)=-b$;
i punti $\pm\left(\frac{\sqrt{b}}{2},0\right)$ e $\pm\left(0,\frac{\sqrt{b}}{2}\right)$ sono di sella, con

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{b}}{2},0\right) = f\left(0,\pm\frac{\sqrt{b}}{2}\right) = \frac{b^2}{8}-b\,;$$

i punti $\pm\left(\frac{\sqrt{b}}{2},\frac{\sqrt{b}}{2}\right)$ e $\pm\left(\frac{\sqrt{b}}{2},-\frac{\sqrt{b}}{2}\right)$ sono di massimo relativo con

$$f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{b}}{2},\frac{\sqrt{b}}{2}\right)\right) = f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{b}}{2},-\frac{\sqrt{b}}{2}\right)\right) = \frac{b^2}{4}-b.$$

Se $\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty$ si ha

$$f(x,y) = -2(x^4+y^4)\left[1-o\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right],$$

quindi

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty,$$

mentre

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \max_{\mathbb{R}^2} f = \begin{cases} f(0,0)=-b & \text{se } b\le 0 \\ f\left(\pm\left(\frac{\sqrt{b}}{2},\pm\frac{\sqrt{b}}{2}\right)\right)=\frac{b^2}{4}-b & \text{se } b>0. \end{cases}$$

Esercizio 2 Per il primo integrale, ponendo $t=\sqrt{x^2-4}$ si ha

$$x^2-4=t^2, \quad x=\sqrt{t^2+4}, \quad dx=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,dt, \quad \text{da cui}$$

$$\int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int_{\sqrt5}^{\sqrt{12}} \frac{1}{\sqrt{t^2+4}\cdot t}\,\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\,dt = \int_{\sqrt5}^{\sqrt{12}} \frac{dt}{t^2+4} = \left[\text{con } s=\frac{t}{2}\right]$$

$$= \frac12 \int_{\frac{\sqrt5}{2}}^{\sqrt3} \frac{ds}{1+s^2} = \frac12\left[\operatorname{arctg}\sqrt3 - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt5}{2}\right].$$

Per il secondo integrale si ha

$$\int_{-1}^1 x^2|2x-1|\,dx = \int_{-1}^{1/2} x^2(1-2x)\,dx + \int_{1/2}^1 x^2(2x-1)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}\right]_{-1}^{1/2} + \left[\frac{x^4}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} =$$

$$= \left[\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{32}\right)-\left(-\frac13-\frac12\right)\right]+\left[\left(\frac12-\frac13\right)-\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{24}\right)\right] = \frac{1}{12}-\frac{1}{16}+1 = \frac{49}{48}.$$

Esercizio 3 Posto $u=y'$, l'equazione è lineare del 2° ordine rispetto a u:

$$u''+u = x-\cos 2x.$$

L'equazione caratteristica è $\lambda^2+1=0$, quindi una base di soluzioni per l'equazione omogenea è $u_1(x)=\cos x$, $u_2(x)=\sin x$. Perciò

$$V_0=\{c_1\cos x + c_2 \sin x\}.$$

Cerchiamo una soluzione u_1^* dell'equazione $u''+u=x$ ponendo

$$u_1^*(x)=Ax+B:$$

sostituendo, essendo $(u_1^*)'=A$, $(u_1^*)''=0$, si trova $Ax+B=x$, cioè $A=1$, $B=0$, ossia $u_1^*(x)=x$. Cerchiamo una soluzione u_2^* di

$u''+u=\cos 2x$ ponendo

$$u_2^*(x)=C\cos 2x+D\sin 2x:$$

si ha

$$(u_2^*)'(x)=-2C\sin 2x+2D\cos 2x,\ (u_2^*)''(x)=-4C\cos 2x-4D\sin 2x,$$

e sostituendo si trova

$$-4C\cos 2x-4D\sin 2x+C\cos 2x+D\sin 2x=\cos 2x,$$

ovvero

$$-3C=1$$
$$-3D=0$$

e dunque $u_2^*(x)=-\frac{1}{3}\cos 2x$. In definitiva una soluzione particolare dell'equazione non omogenea è

$$u^*(x)=u_1^*(x)+u_2^*(x)=x-\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Tutte le possibili soluzioni u sono quindi

$$u(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+x-\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Tornando alla y, si ha $y'=u$, quindi y è una primitiva di u:

$$y(x)=c_1\sin x-c_2\cos x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\sin 2x+c_0\ ,\ c_1,c_2,c_0\in\mathbb{R}.$$

Le condizioni $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$ ci danno le condizioni

$$0=y(0)=-c_2+c_0,$$
$$0=y'(0)=u(0)=c_1-\frac{1}{3},$$
$$1=y''(0)=u'(0)=c_2+1,$$

da cui $c_1=\frac{1}{3}$, $c_2=0$, $c_0=0$. Dunque la soluzione del problema è

$$y(x)=\frac{1}{3}\sin x+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\sin 2x.$$