ANALISI 1 | gi 16/5/19

Altri esercizi

- $y' = \dfrac{x^2}{1+\ln y}$

- $y' = \dfrac{yx^2+xy^2}{x^2}$

- $y' = -\cos^2(x+y)$

- $y' - \dfrac{y}{x} = xe^x$

- $\begin{cases} y'+y = \sin x + 3\cos 2x \\ y(0)=0 \end{cases}$

- $\begin{cases} y' = y\cos x + \cos^3 x \\ y(0)=0 \end{cases}$

- $\begin{cases} y' - (\operatorname{tg} x)y = e^{\sin x} \\ y(0)=0 \end{cases}$

- $\begin{cases} y' = x^2y^2 - 4x^2 \\ y(1)=1 \end{cases}$

- $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(3)=4 \end{cases}$

- $\begin{cases} y' = (2x+y)^2 \\ y(1)=-1 \end{cases}$

Equazioni differenziali lineari di ordine $m \geq 1$.

Analizziamo la struttura delle soluzioni di una equazione lineare di ordine m:

$$y^{(m)}(x) = a_{m-1}(x)y^{(m-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + f(x).$$

L'equazione si dice <u>omogenea</u> se $f \equiv 0$.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea, che indichiamo con V_0, è uno spazio vettoriale: infatti se y_1 e y_2 sono due elementi di V_0, allora anche y_1+y_2 e λy_1 appartengono a V_0 per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (anzi, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$; e i coefficienti $a_j(x)$ potrebbero anche essere complessi; in tal caso la soluzione y sarà a valori complessi).

Se poi y_1 e y_2 risolvono l'equazione <u>non omogenea</u> (con $f \neq 0$), allora $y_1 - y_2$ risolve l'omogenea. Quindi l'insieme V_f delle soluzioni dell'equazione non omogenea è uno spazio affine, ossia risulta

$$V_f = V_0 + y^*,$$

ove y^* è una particolare soluzione dell'equazione non omogenea, scelta a piacere. Per determinare completamente V_f occorre dunque: (a) determinare una base di V_0, che si dimostra avere dimensione m; (b) individuare un particolare elemento di V_f.

Ci limiteremo a fare questi due passi nel caso di <u>equazioni del 2° ordine a coefficienti costanti</u>.

Consideriamo dunque
$$y''(x) = a_1 y'(x) + a_0 y(x) + f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
ove $f \in C(\mathbb{R})$.

(a) <u>Costruzione di V_0</u>. Le funzioni che hanno derivate multiple di se stesse sono le esponenziali. Cerchiamo quindi soluzioni dell'equazione omogenea della forma $y_0(x) = e^{\lambda x}$. Si ha
$$y_0'' - a_1 y_0' - a_0 y_0 = (\lambda^2 - a_1 \lambda - a_0) e^{\lambda x},$$
e tale espressione sarà identicamente nulla se e solo se
$$\lambda^2 - a_1 \lambda - a_0 = 0.$$
Abbiamo 3 casi possibili:

(i) 2 radici reali λ_1 e λ_2.

Allora le funzioni $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea e sono linearmente indipendenti: infatti se
$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = 0$$
allora scelto $x=0$ si ha $c_1 + c_2 = 0$, scelto $x=1$ si ha $c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} = 0$, e dunque $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_2} = 0 \end{cases}$ implica (essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$) che $c_1 = c_2 = 0$. Perciò
$$V_0 = \{ c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}.$$

(ii) 2 radici complesse coniugate $\beta \pm i\gamma$.

Allora $e^{(\beta \pm i\gamma)x}$ sono soluzioni linearmente indipendenti della equazione omogenea; però sono a valori complessi. Però, rimpiazzandole con $\dfrac{e^{(\beta+i\gamma)x}+e^{(\beta-i\gamma)x}}{2}$, $\dfrac{e^{(\beta+i\gamma)x}-e^{(\beta-i\gamma)x}}{2}$, cioè con $e^{\beta x}\cos\gamma x$ e $e^{\beta x}\sin\gamma x$, si ottengono due soluzioni <u>reali</u>, linearmente indipendenti, dell'omogenea. Dunque

$$V_0=\{c_1e^{\beta x}\cos\gamma x+c_2e^{\beta x}\sin\gamma x,\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\}.$$

(iii) Una radice reale λ^* di molteplicità 2.

In questo caso, e^{λ^*x} è un elemento di V_0. Un'altra soluzione dell'omogenea è xe^{λ^*x}. Infatti, essendo λ^* radice doppia, si ha anche $2\lambda^*-a_1=0$. Quindi, posto $\bar y(x)=xe^{\lambda^*x}$, si ha
$\bar y'(x)=e^{\lambda^*x}(1+\lambda^*x)$, $\bar y''(x)=e^{\lambda^*x}(2\lambda^*+(\lambda^*)^2x)$,
da cui

$$\bar y''-a_1\bar y'-a_0\bar y=e^{\lambda^*x}\left[2\lambda^*+(\lambda^*)^2x-a_1(1+\lambda^*x)-a_0x\right]=$$
$$=e^{\lambda^*x}\left[2\lambda^*-a_1+x((\lambda^*)^2-a_1\lambda^*-a_0)\right]=0.$$

Inoltre e^{λ^*x} e xe^{λ^*x} sono linearmente indipendenti perchè se $c_1e^{\lambda^*x}+c_2xe^{\lambda^*x}=0$ allora $c_1+c_2x=0$ e quindi, scegliendo $x=0$ e poi $x=1$, si trova $c_1=c_2=0$. Perciò

$$V_0=\{c_1e^{\lambda^*x}+c_2xe^{\lambda^*x},\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\}.$$

(b) Costruzione di un particolare elemento $y^* \in V_f$.

Ci sono 2 metodi: il metodo generale (metodo di variazione delle costanti) e un metodo per secondi membri f di tipo particolare (metodo dei coefficienti indeterminati).

Sia
$$V_0 = \{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Metodo di variazione delle costanti

Si cerca $y^*(x)$ della forma
$$y^*(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x),$$
ove $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono funzioni (non più costanti) da determinare.

Imponiamo che y^* risolva l'equazione non omogenea: si ha
$$(y^*)' = c_1' y_1 + c_2' y_1 + c_1 y_1' + c_2 y_2'$$
e per comodità di calcolo impongo per prima cosa
$$c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0.$$

Allora
$$(y^*)'' = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'',$$
da cui
$$(y^*)'' - a_1 (y^*)' - a_0 y^* =$$
$$= c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' - a_1 [c_1 y_1' + c_2 y_2'] - a_0 [c_1 y_1 + c_2 y_2] =$$
$$= c_1' y_1' + c_2' y_2' + 0,$$
visto che $y_1, y_2 \in V_0$. Perciò, $y^* \in V_f$ purchè valga il sistema

$$(*) \quad \begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f \end{cases},$$

Questo sistema è sempre risolubile rispetto a c_1' e c_2', perché il determinante

$$D(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

è sempre diverso da 0. Infatti

$$D'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2 =$$

$$= y_1 (a_1 y_2' + a_0 y_2) - (a_1 y_1' + a_0 y_1) y_2 = a_1 y_1 y_2' - a_1 y_1' y_2 =$$

$$= a_1 D(x),$$

e dunque $D(x) = c\, e^{a_1 x}$ per qualche $c \in \mathbb{R}$. Ma se fosse $c = 0$, avremmo

$$0 \equiv D(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = y_2^2 \frac{d}{dx} \frac{y_1}{y_2},$$

quindi

$$\frac{d}{dx} \frac{y_1}{y_2} = 0, \qquad \text{cioè} \qquad y_1 = c y_2,$$

il che contraddirebbe la lineare indipendenza di y_1 e y_2. In definitiva il sistema $(*)$ ha una e una sola soluzione $c_1'(x)$, $c_2'(x)$. Per integrazione si trovano $c_1(x)$ e $c_2(x)$ (le costanti di integrazione si sommano alle c_1, c_2 di V_0). Si conclude che

$$y^*(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \in V_f.$$

Esempio $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos^3 x}$, $\quad -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Equazione omogenea: poiché $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i$,
avremo

$$y_1(x) = e^{2x}\cos x, \quad y_2(x) = e^{2x}\sin x,$$

e

$$V_0 = \{c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Equazione non omogenea: sia $y^*(x) = c_1(x)\, e^{2x}\cos x + c_2(x)\, e^{2x}\sin x$. Il sistema ⊛ è

$$\begin{cases} c_1' \left(e^{2x}\cos x\right) + c_2' \left(e^{2x}\sin x\right) = 0 \\ c_1' e^{2x}\left(2\cos x - \sin x\right) + c_2' e^{2x}\left(2\sin x + \cos x\right) = \dfrac{e^{2x}}{\cos^3 x} \end{cases}$$

Ne segue:

$$c_1' = -c_2' \operatorname{tg} x,$$

$$c_2' e^{2x}\left[\cancel{-2\sin x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + 2\sin x + \cos x\right] = \frac{e^{2x}}{\cos^3 x}$$

$$c_2' \left[\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x}\right] = \frac{1}{\cos^3 x},$$

$$c_2' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad c_1' = -\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}.$$

Pertanto $\quad c_1 = -\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{2}, \quad c_2 = \operatorname{tg} x,\quad$ e dunque

$$y^*(x) = e^{2x}\left[-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}\cos x + \operatorname{tg} x \sin x\right] = \frac{e^{2x}}{2}\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Si conclude allora che

$$V_f = \left\{ e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Metodo dei coefficienti indeterminati

Questo metodo funziona per secondi membri f del tipo

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x\right],$$

ove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, A, B sono polinomi.

- Se si ha $\beta = 0$, si cerca y^* della forma

$$y^*(x) = x^m Q(x) e^{\alpha x},$$

ove Q è un polinomio dello stesso grado di A e

$$m = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \text{ non è radice di } \lambda^2 - a_1\lambda - a_0 = 0 \\ 1 & \text{se } \alpha \text{ è radice semplice} \\ 2 & \text{se } \alpha \text{ è radice doppia.} \end{cases}$$

- Se invece si ha $\beta \neq 0$, si cerca y^* della forma

$$y^*(x) = x^m e^{\alpha x}\left[C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x\right],$$

ove C, D sono polinomi di grado pari al maggiore fra i gradi di A e B, e

$$m = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \pm i\beta \text{ non è radice di } \lambda^2 a_1\lambda + a_0 = 0, \\ 1 & \text{se } \alpha \pm i\beta \text{ è radice.} \end{cases}$$

Esempi

- $y'' + y = (x+1)\sin x$
- $y'' + y' = x\cos x$
- $y'' + 4y' + 4y = e^x - e^{-x}$
- $y'' - 2y' + 2y = \sin x + e^x$.