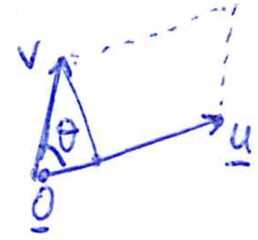
Digressione: applicazioni geometriche del prodotto vettoriale.

1. L'area del parallelogramma di $\mathbb{R}^3$ generato da due vettori $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$ è uguale a $|\underline{u} \times \underline{v}|_3$.

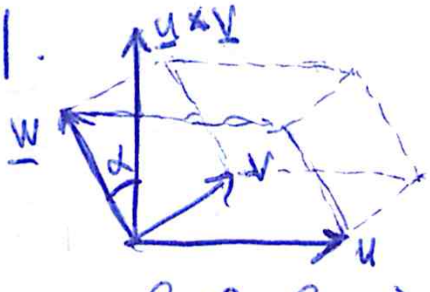


Infatti la base del parallelogramma è $|\underline{u}|_3$, mentre l'altezza è $|\underline{v}|_3 \sin\theta$, essendo θ l'angolo convesso fra $\underline{u}$ e $\underline{v}$. Ne segue che l'area è

$$|\underline{u}|_3 |\underline{v}|_3 \sin\theta = |\underline{u} \times \underline{v}|_3 .$$

Ne segue che l'area del parallelogramma generato da tre punti dati $\underline{P}, \underline{Q}, \underline{R} \in \mathbb{R}^3$ è uguale a $|(\underline{Q}-\underline{P}) \times (\underline{R}-\underline{P})|_3$.

2. Il volume del parallelepipedo di $\mathbb{R}^3$ generato da tre vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$ è uguale a $|\langle \underline{u} \times \underline{v}, \underline{w} \rangle_3|$.

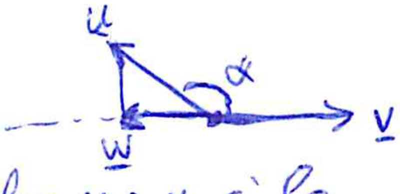


Infatti l'area di base è, per il punto 1, $|\underline{u} \times \underline{v}|_3$, mentre l'altezza (essendo $\underline{u} \times \underline{v}$ perpendicolare alla base) è $|\underline{w}|_3 |\cos\alpha|$. Ne segue che il volume è

$$|\underline{u} \times \underline{v}|_3 \, |\underline{w}|_3 \cos\alpha = |\langle \underline{u} \times \underline{v}, \underline{w} \rangle_3| .$$

3. La proiezione ortogonale di un vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ nella direzione di un altro vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$ è il vettore $\underline{w}$ dato da

$$\underline{w} = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_3}{|\underline{v}|_3^2} \underline{v} .$$



Infatti, detto α l'angolo convesso fra $\underline{u}$ e $\underline{v}$, si ha

$$|\underline{w}|_3 = |\underline{u}|_3 \cos\alpha \, .$$

Inoltre $\underline{w}$ è parallelo a $\underline{v}$, con verso concorde o discorde con quello di $\underline{v}$ a seconda che sia $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ oppure $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$.
Perciò

$$\underline{w} = |\underline{u}|_3 \cos\alpha \, \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|_3} = \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_3}{|\underline{v}|_3^2} \, \underline{v} \, .$$

4. Il piano di $\mathbb{R}^3$ passante per tre punti dati $\underline{P}, \underline{Q}, \underline{R} \in \mathbb{R}^3$ ha equazione cartesiana

$$\langle (\underline{Q}-\underline{P}) \times (\underline{R}-\underline{P}), \underline{x} \rangle_3 = \langle \underline{Q} \times \underline{R}, \underline{P} \rangle_3 \, .$$

Infatti, $(\underline{Q}-\underline{P}) \times (\underline{R}-\underline{P})$ è ortogonale al piano cercato, visto che esso contiene sia $\underline{Q}-\underline{P}$ che $\underline{R}-\underline{P}$. Dunque l'equazione è

$$\langle (\underline{Q}-\underline{P}) \times (\underline{R}-\underline{P}), \underline{x}-\underline{P} \rangle_3 = 0 \, ;$$

ma il termine noto

$$\langle (\underline{Q}-\underline{P}) \times (\underline{R}-\underline{P}), \underline{P} \rangle_3$$

si semplifica:

$$\langle (\underline{Q}-\underline{P}) \times (\underline{R}-\underline{P}), \underline{P} \rangle_3 = \langle \underline{Q} \times \underline{R}, \underline{P} \rangle_3 - \langle \underline{Q} \times \underline{P}, \underline{P} \rangle_3 - \langle \underline{P} \times \underline{R}, \underline{P} \rangle_3 + \langle \underline{P} \times \underline{P}, \underline{P} \rangle_3 =$$
$$= \langle \underline{Q} \times \underline{R}, \underline{P} \rangle_3$$

poiché $\underline{Q} \times \underline{P}$ e $\underline{R} \times \underline{P}$ sono ortogonali a $\underline{P}$ mentre $\underline{P} \times \underline{P}$ è nullo.

5. La distanza d fra un punto $\underline{P} \in \mathbb{R}^3$ ed il piano Π di equazione $ax+by+cz+d=0$ è

$$d = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \text{ove } \underline{P} = (x,y,z).$$

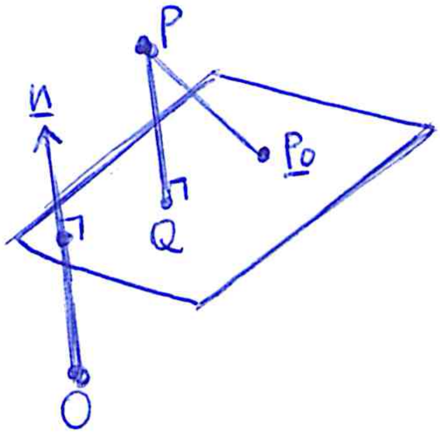
Infatti sia $\underline{P}_0$ un punto appartenente al piano: allora si ha, posto $\underline{n}=(a,b,c)$ e $P_0=(x_0,y_0,z_0)$:

$$\langle \underline{n}, P_0\rangle_3 = ax_0+by_0+cz_0=-d,$$

cosicché

$$ax+by+cz+d = \langle \underline{n}, \underline{x}-\underline{P_0}\rangle_3 \qquad \forall\, \underline{x}\in\mathbb{R}^3.$$

Se $\underline{Q}$ è la proiezione di $\underline{P}$ sul piano π, essendo $\underline{P}-\underline{Q}$ parallelo a $\underline{n}$, si ha



$$\underline{P}-\underline{Q} = \frac{\langle \underline{P}-\underline{P_0}, \underline{n}\rangle_3}{|\underline{n}|_3^2}\,\underline{n};$$

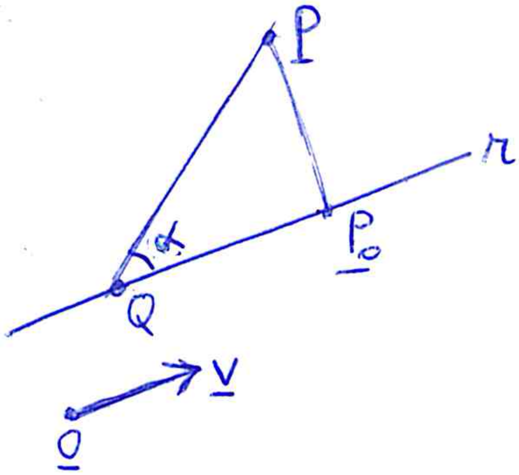
di conseguenza, se $\underline{P}=(x,y,z)$,

$$d=|\underline{P}-\underline{Q}|_3 = \frac{|\langle \underline{P}-\underline{P_0}, \underline{n}\rangle_3|}{|\underline{n}|_3} = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

6. La distanza d fra un punto $\underline{P}\in\mathbb{R}^3$ e la retta $r=\{\underline{x}=\underline{Q}+t\underline{v}, t\in\mathbb{R}\}$ è

$$d=\frac{|(\underline{P}-\underline{Q})\times\underline{v}|_3}{|\underline{v}|_3}.$$

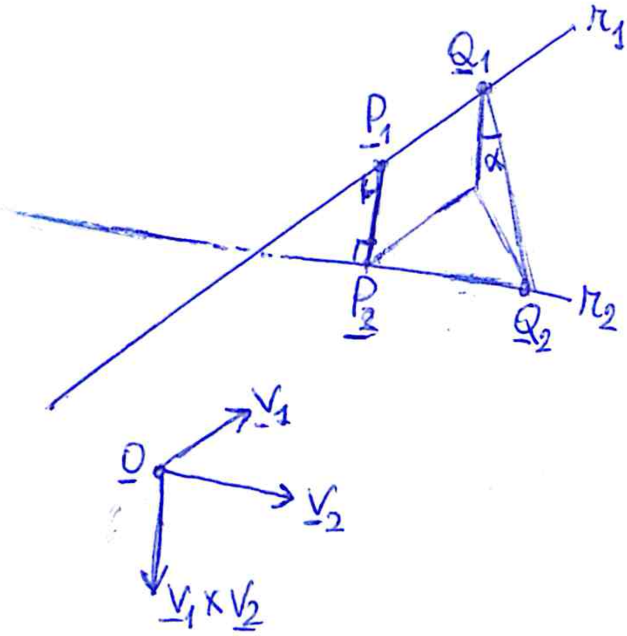
Infatti, se $\underline{P_0}$ è la proiezione ortogonale di $\underline{P}$ sulla retta r, si ha



$$d=|\underline{P}-\underline{P_0}|_3 = |\underline{P}-\underline{Q}|_3|\sin\alpha| = \frac{|(\underline{P}-\underline{Q})\times\underline{v}|_3}{|\underline{v}|_3}.$$

7. La distanza d fra due rette sghembe $r_1=\{\underline{x}=\underline{Q_1}+t\underline{v_1}, t\in\mathbb{R}\}$ e $r_2=\{\underline{x}=\underline{Q_2}+t\underline{v_2}, t\in\mathbb{R}\}$ è $d=\dfrac{|\langle \underline{Q_1}-\underline{Q_2}, \underline{v_1}\times\underline{v_2}\rangle_3|}{|\underline{v_1}\times\underline{v_2}|_3}.$

Infatti, se $\underline{P}_1 \in r_1$ e $\underline{P}_2 \in r_2$ realizzano la distanza d cercata, si ha (v. figura)



$$d = |\underline{P}_1 - \underline{P}_2|_3 = |\underline{Q}_1 - \underline{Q}_2|\,|\cos\alpha| =$$

$$= \frac{|\langle \underline{Q}_1 - \underline{Q}_2, \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 \rangle_3|}{|\underline{v}_1 \times \underline{v}_2|_3}$$

<u>Fine della digressione</u>

<u>Confronto fra infinitesimi e infiniti</u>

Siano f, g due funzioni definite in $U \setminus \{x_0\}$, dove U è un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$, oppure U è una semiretta (nel caso $x_0 = \pm\infty$). Supponiamo che:

(i) $f, g \neq 0$ in $U \setminus \{x_0\}$,

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.

<u>Definizione</u> Diciamo che f è un <u>infinitesimo di ordine superiore</u> a g per $x \to x_0$ (ovvero, che g è un <u>infinitesimo di ordine inferiore</u> a f per $x \to x_0$) se risulta

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

in tal caso scriveremo

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{per } x \to x_0$$

[e diremo che f è "o-piccolo" di g per $x \to x_0$].

<u>Definizione</u> Diciamo che f e g sono <u>infinitesimi dello stesso ordine</u> per $x \to x_0$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda;$$

in tal caso scriveremo

$$f(x) \simeq g(x) \quad \text{per } x \to x_0.$$

<u>Esempi</u> (1) $\sin^2 x = o(x)$, $\sin^2 x \simeq x^2$, $x^3 = o(\sin^2 x)$ per $x \to 0$, in quanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{\sin^2 x} = 0.$$

(2) $e^{-x} = o(x^{-m})$ per $x \to +\infty$, qualunque sia $m \in \mathbb{N}$. Infatti

$$\lim_{m \to \infty} x^m e^{-x} = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

poiché

$$\frac{x^m}{e^x} = \frac{x^m}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}} < \frac{x^m}{\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}} = \frac{(m+1)!}{x}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $x \to +\infty$.

(3) $x^{\varepsilon} = o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ per $x \to 0^+$, qualunque sia $\varepsilon > 0$:
infatti

$$\lim_{x\to 0^+} (\ln x) x^{\varepsilon} = [t = -\ln x]$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[-t e^{-\varepsilon t}\right] = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

(4) Se f è derivabile in x_0, allora

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0.$$

(5) Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N = o(|\underline{x} - \underline{x}_0|_N) \text{ per } \underline{x} \to \underline{x}_0.$$

(6) Le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = x(2 + \sin\frac{1}{x})$ sono due infinitesimi per $x \to 0$ <u>non confrontabili</u>, poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ non esiste.}$$

<u>Teorema</u> <u>(principio di sostituzione degli infinitesimi)</u>. Siano f, g, φ, ψ funzioni definite in $U \setminus \{x_0\}$, ove U è un intorno di x_0 oppure una semiretta (nel caso $x_0 = \pm\infty$). Supponiamo che:

(i) g, $g + \psi$ siano diverse da 0 in $U \setminus \{x_0\}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$,

(ii) $\varphi(x) = o(f(x))$, $\psi(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$,

(iii) $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (finito o infinito).

Allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)+\psi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

dim. Raccogliamo il fattore "predominante":

$$\frac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)+\psi(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1+\frac{\varphi(x)}{f(x)}}{1+\frac{g(x)}{\psi(x)}};$$

nel membro destro il secondo fattore tende a 1 (per (ii)) e il primo ha limite (per (iii)). Ne segue la tesi. □

Esempi: (1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x^2}{x+(\sin x)\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x + \ln(1+x^2)}{x^2} = [\text{osservato che } \sin x - x \simeq x^3]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1.$$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\ln(1+x)-x}{x^2} = \left[\text{essendo } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left((1+x)\left(x-\frac{x^2}{2}\right) - x + o(x^2)\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Parliamo adesso di infiniti per $x\to x_0$: il discorso sarà analogo al caso degli infinitesimi.

<u>Definizione</u> Siano f, g definite in $U \setminus \{x_0\}$, ove U è un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ oppure una semiretta (nel caso $x_0 = \pm\infty$). Supponiamo che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty .$$

Diciamo che f è <u>un infinito di ordine inferiore</u> a g per $x \to x_0$ (ovvero che g è <u>un infinito di ordine superiore</u> a f per $x \to x_0$) se risulta

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 ;$$

in tal caso scriveremo

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \quad \text{per } x \to x_0$$

[e diremo che $f(x)$ è un "o-piccolo" di $g(x)$ per $x \to x_0$].

<u>Definizione</u> Diciamo che f e g sono <u>infiniti dello stesso ordine</u> per $x \to x_0$ se esiste $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda ;$$

scriveremo in tal caso

$$f(x) \simeq g(x) \quad \text{per } x \to x_0 .$$

<u>Esempi</u> (1) $\sqrt{1+x^3}$ è un infinito di ordine superiore a x per $x \to +\infty$, poiché $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^3}} = 0 .$

(2) $\operatorname{tg} x$ è un infinito dello stesso ordine di $\frac{1}{\pi+2x}$ per $x \to -\frac{\pi}{2}^+$, in quanto

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (\pi+2x)\operatorname{tg} x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} 2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\frac{\sin x}{\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} 2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\frac{\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = -2.$$

(3) $f(x)=\frac{1}{x}$ e $g(x)=\frac{1}{x}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$ sono infiniti non confrontabili per $x\to 0$.

__Teorema__ (<u>principio di sostituzione degli infiniti</u>) Siano f, g, φ, ψ funzioni definite in $U\setminus\{x_0\}$, ove U è un intorno di x_0 oppure una semiretta nel caso $x_0=\pm\infty$. Supponiamo che:

(i) f, g, φ, ψ sono infiniti per $x\to x_0$,

(ii) $\varphi(x)=o(f(x))$, $\psi(x)=o(g(x))$ per $x\to x_0$,

(iii) esista il $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ (finito o infinito).

Allora

$$\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)+\psi(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

__dim.__ Basta scrivere, come nel teorema precedente,

$$\frac{f(x)+\varphi(x)}{g(x)+\psi(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{1+\frac{\varphi(x)}{f(x)}}{1+\frac{g(x)}{\psi(x)}}\right) \simeq \frac{f(x)}{g(x)} \text{ per } x\to x_0. \quad \square$$