Esempi (1) Riprendiamo l'esercizio della scorsa lezione: se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto, se $\underline{x}, \underline{x}' \in A$ e se il segmento S di estremi $\underline{x}, \underline{x}'$ è tutto contenuto in A, allora per ogni funzione f differenziabile in A vi è un punto $\underline{v} \in S$ tale che

$$f(\underline{x}') - f(\underline{x}) = \langle \nabla f(\underline{v}), \underline{x}' - \underline{x} \rangle_N .$$

Per provarlo, osserviamo che il segmento S, in forma parametrica, è descritto da

$$S = \{ \underline{\xi} = (1-t)\underline{x} + t\underline{x}', \ t \in [0,1] \}.$$

Infatti $\underline{\xi} = \underline{x}$ per $t=0$, $\underline{\xi} = \underline{x}'$ per $t=1$, $\underline{\xi} = \frac{\underline{x}+\underline{x}'}{2}$ per $t=\frac{1}{2}$, eccetera.

Dunque, la restrizione di f al segmento S è la funzione

$$g(t) = f((1-t)\underline{x} + t\underline{x}'), \quad t \in [0,1].$$

La g è una funzione definita in $[0,1]$ e ivi derivabile, per il teorema di derivazione delle funzioni composte: si ha

$$g'(t) = \langle \nabla f((1-t)\underline{x} + t\underline{x}'), \underline{x} - \underline{x}' \rangle_N \quad \forall t \in [0,1].$$

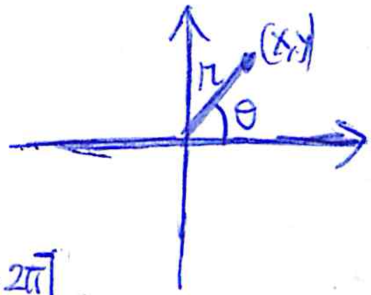
Per il teorema di Lagrange, esiste $\bar{t} \in]0,1[$ tale che

$$g'(\bar{t}) = g(1) - g(0),$$

e posto $\underline{v} = (1-\bar{t})\underline{x} + \bar{t}\underline{x}'$, è facile vedere che si ottiene la tesi.

L'enunciato appena dimostrato può essere chiamato "teorema di Lagrange N-dimensionale".

(2) Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$



Per $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ poniamo

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{ove } r\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi].$$

Dunque $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{g}(r,\theta)$, con $\underline{g}(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$.

Se $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è differenziabile e poniamo $F(r,\theta) = f(\underline{g}(r,\theta))$, cioè $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, si ha:

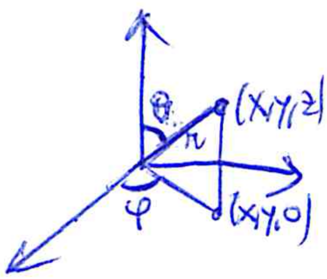
$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) = -\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\cos\theta$$

e in particolare

$$\left\| [\nabla f](r\cos\theta, r\sin\theta)\right\|_2^2 = \left[\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta)\right]^2 \quad \forall r>0,\ \forall\theta\in[0,2\pi].$$

(3) Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$



Per $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ poniamo

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \text{ove } r\geq 0,\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi].$$

Dunque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{g}(r,\vartheta,\varphi)$ con $\underline{g}(r,\vartheta,\varphi) = \begin{vmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{vmatrix}$.

Se $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è differenziabile e $F(r,\vartheta,\varphi) = f(\underline{g}(r,\vartheta,\varphi))$, si ha

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\circ \underline{g}\right]\sin\vartheta\cos\varphi + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\circ \underline{g}\right]\sin\vartheta\sin\varphi + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\circ \underline{g}\right]\cos\vartheta,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\circ \underline{g}\right]r\cos\vartheta\cos\varphi + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\circ \underline{g}\right]r\cos\vartheta\sin\varphi + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\circ \underline{g}\right]r\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}\circ \underline{g}\right]r\sin\vartheta\sin\varphi + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\circ \underline{g}\right]r\sin\vartheta\cos\varphi,$$

e in particolare

$$|[\nabla f]\circ \underline{g}|_3^2 = \left[\frac{\partial F}{\partial r}\right]^2 + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right]^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\left[\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right]^2 \quad \forall r\geq 0,\ \forall \vartheta\in[0,\pi],\ \forall \varphi\in[0,2\pi].$$

<u>Esercizio</u>. Calcolare la derivata di $f\circ\underline{g}$, nei casi seguenti:

- $f(x,y) = x^2\ln(1+xy)$, $\quad \underline{g}(u,v) = \left(uv,\ \frac{u}{v}\right)$
- $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $\quad \underline{g}(u,v) = (1,\ u^2,\ u-v)$.

[Si suggerisce di applicare la formula del teorema di derivazione delle funzioni composte, e di verificarne il risultato derivando direttamente la funzione composta.]

Derivate successive

Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. La funzione f' è dunque definita in $]a,b[$ a valori in $\mathbb{R}$.
Se f' è a sua volta derivabile, diremo che f è derivabile 2 volte, e che $(f')'$ è la derivata seconda di f (e, per analogia, f' è la derivata prima). Si scrive, in luogo di $(f')'$,

$$f''(x), \quad D^2 f(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x).$$

Dunque
$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \quad \forall x \in]a,b[.$$

Analogamente si definiscono, quando esistono,

$$f''', f'''', f''''' \; (\text{si scrive } f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, \dots)$$

Diciamo che f è derivabile n volte $]a,b[$ se esistono f', f'', ..., $f^{(n)}$ in $]a,b[$.

Esempi: (1) Se $f(x) = x^2 + 3x - 7$ si ha
$$f'(x) = 2x+3, \quad f''(x) = 2, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 3.$$

(2) Se $f(x) = b^x$ $(b > 0)$, allora
$$f'(x) = b^x \ln b, \; \dots, \; f^{(n)}(x) = b^x (\ln b)^n \quad \forall n \geq 0$$
(intendendo che $f^{(0)} = f$).

(3) Se $f(x) = x|x|$, allora
$$f'(x) = |x| + x \frac{x}{|x|} = 2|x|, \quad f''(x) = 2\frac{x}{|x|} \text{ per } x \neq 0,$$
mentre $f''(0)$ non esiste.

Per le funzioni di N variabili si fa lo stesso discorso.
Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$. Se f è differenziabile in A allora $\exists\, D_1 f, \dots, D_N f$ in A. Se ciascuna di queste funzioni è differenziabile in A, esisteranno le N^2 derivate parziali seconde $D_j(D_i f)(x)$, $i,j = 1 \dots N$. Si scrive

$$D_j D_i f(\underline{x}), \quad f_{x_j x_i}(\underline{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}),$$

e se $i = j$

$$D_i^2 f(x), \quad f_{x_i x_i}(\underline{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

In generale f avrà (se esistono) N^k derivate parziali di ordine k.

<u>Definizione</u> Una funzione f è di classe C^k in A (scriviamo $f \in C^k(A)$), se f possiede tutte le derivate parziali di ordine $\leq k$, e queste sono tutte continue. In particolare $C^0(A) = \{ f : A \to \mathbb{R}$ continue$\}$, $C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A)$.

<u>Esempi</u> Tutti i polinomi sono di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (se di N variabili).
Le somme di serie di potenze sono di classe $C^\infty(-R, R)$.
La funzione $f(x) = |x|^{k+\frac{1}{2}}$ sta in $C^k(\mathbb{R}) \setminus C^{k+1}(\mathbb{R})$.

<u>Oss.</u> $C^k[a,b]$ è l'insieme delle $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabili k volte con continuità (negli estremi si fa la sola derivata destra, o sinistra)

È importante il seguente

Teorema (di Schwarz) Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è aperto, e se $f \in C^2(A)$, allora $D_i D_j f(\underline{x}) = D_j D_i f(\underline{x})$ per ogni $\underline{x} \in A$.

dim (nel caso $N=2$). Sia $(x_0, y_0) \in A$. Consideriamo per $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sufficientemente piccoli, la quantità

$$A(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0).$$

Se raggruppiamo i primi due termini e gli ultimi due, vediamo che $[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)] - [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]$ è l'incremento in $[x_0, x_0+h]$ della funzione $f(x, y_0+k) - f(x, y_0)$ (della variabile x). Per il teorema di Lagrange, esiste $\xi_{hk} \in]x_0, x_0+h[$ tale che

$$A(h,k) = [f_x(\xi_{hk}, y_0+k) - f_x(\xi_{hk}, y_0)]\, h .$$

Adesso, il teorema di Lagrange, applicato in $[y_0, y_0+k]$ alla funzione $f_x(\xi_{hk}, y)$ (della variabile y), ci dice che esiste $\eta_{hk} \in]y_0, y_0+k[$ tale che

$$A(h,k) = f_{xy}(\xi_{hk}, \eta_{hk})\, hk .$$

Similmente, se raggruppiamo il primo termine col terzo e il secondo col quarto, vediamo che $[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)] - [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)]$ è l'incremento della funzione $f(x_0+h, y) - f(x_0, y)$ (della variabile y), e per il teorema di Lagrange esiste $\eta'_{hk} \in]y_0, y_0+k[$ tale che

$$A(h,k) = [f_y(x_0+h, \eta'_{hk}) - f_y(x_0, \eta'_{hk})]\, k ;$$

ancora il teorema di Lagrange, applicato in $[x_0, x_0+h]$ alla funzione $f_y(x, \eta'_{hk})$ della variabile x, dice che esiste $\xi'_{hk} \in]x_0, x_0+h[$ tale che

$$A(h,k) = f_{yx}(\xi'_{hk}, \eta'_{hk})\, hk .$$

A questo punto si conclude: poiché f_{xy} e f_{yx} sono continue in (x_0,y_0), si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} A(h,k) = f_{xy}(x_0,y_0),$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk} A(h,k) = f_{yx}(x_0,y_0),$$

e dunque i due membri destri sono uguali. □

Esempio La funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

verifica le proprietà seguenti:

$$\exists\, f_x(x,y) = \begin{cases} y\cos\frac{x}{y} & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{se } y=0, \end{cases} \qquad \exists\, f_y(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y} & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{se } y=0; \end{cases}$$

$$\exists\, f_{xy}(0,0) = 1, \qquad \exists\, f_{yx}(0,0) = 0.$$

Si noti che f_{xy} e f_{yx} non esistono nei punti $(x_0,0)$ con $0 < |x_0| < \frac{\pi}{2}$; quindi $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$.

Principio d'identità delle serie di potenze

Per i polinomi vale il principio d'identità, che stabilisce che due polinomi, che coincidono per ogni valore delle variabile, devono avere i coefficienti uguali.

Per le serie di potenze vale un enunciato analogo. Anzitutto:

Teorema Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ una serie di potenze convergente in $]-R,R[$, e sia $f(x)$ la sua somma. Allora:

(i) $f \in C^\infty(-R,R)$;

(ii) Vale
$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\dots(k-n+1)\, a_k\, x^{k-n}$$
per ogni $x \in]-R,R[$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(iii) Risulta in particolare
$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

dim. (ii) Si applica n volte il teorema di derivazione delle serie.

(i) È conseguenza di (ii).

(iii) Basta calcolare $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$. $\square$

Corollario (principio d'identità) Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ due serie di potenze con raggi di convergenza R e R' rispettivamente. Posto $r = \min\{R, R'\}$, ~~se~~ risulta
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad \forall x \in]-r,r[,$$
allora
$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

dim. Si applica la (iii) del teorema precedente alla serie $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x^n$, che ha somma 0 in $]-r,r[$. $\square$