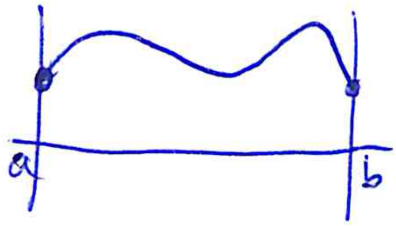
Funzioni derivabili in un intervallo

1. <u>Teorema di Rolle</u> Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$, allora esiste $\xi\in\,]a,b[$ tale che $f'(\xi)=0$.



<u>dim</u>. Se f è costante in $[a,b]$, allora per ogni $\xi\in\,]a,b[$ si ha $f'(\xi)=0$.
Se f non è costante in $[a,b]$, allora i numeri $\max\limits_{[a,b]} f$ e $\min\limits_{[a,b]} f$ esistono (per il teorema di Weierstrass) e il primo è strettamente maggiore del secondo. Essendo $f(a)=f(b)$, uno almeno dei due valori $\max\limits_{[a,b]} f$ e $\min\limits_{[a,b]} f$ è raggiunto in un punto $\xi\in\,]a,b[$. Se per esempio, come in figura, si ha $f(\xi)=\max\limits_{[a,b]} f$, allora per ogni $h\neq 0$ si ha

$$f(\xi+h)-f(\xi)\leq 0\,;$$

dunque per il rapporto incrementale si avrà

$$\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\begin{cases}\leq 0 & \text{se } h>0,\\ \geq 0 & \text{se } h<0.\end{cases}$$

Ne segue per $h\to 0$

$$f'(\xi)=0.\ \square$$

2. <u>Teorema di Cauchy</u> Siano $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$, con $g' \neq 0$ in $]a,b[$. Allora esiste $\xi \in]a,b[$ tale che

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} .$$

[Si noti che, per il Teorema di Rolle, è $g(b) \neq g(a)$.]

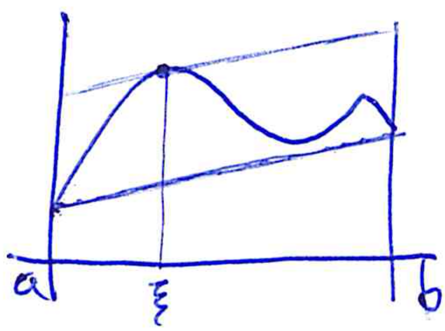
<u>dim</u>. Basta applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = f(x)\,[g(b)-g(a)] - g(x)\,[f(b)-f(a)] ,$$

la quale ha la stessa regolarità di f e g e verifica $h(a)=h(b)$. □

3. <u>Teorema di Lagrange</u>. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$. Allora esiste $\xi \in]a,b[$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$



Si noti che $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ è il coefficiente angolare della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; tale retta ha equazione $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

<u>dim</u>. Basta applicare il teorema di Cauchy nel caso particolare in cui $g(x) = x$. □

Il teorema di Lagrange ha <u>importantissime</u> applicazioni.

1. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua in $[a,b]$, e derivabile in $]a,b[$. Si ha:

$$f \text{ costante in } [a,b] \iff f'=0 \text{ in }]a,b[.$$

<u>dim</u> ($\Rightarrow$) Se f è costante in $[a,b]$, allora $f'=0$ in $[a,b]$ e non solo in $]a,b[$.

($\Leftarrow$) Sia $f'=0$ in $]a,b[$. Per il teorema di Lagrange, applicato nell'intervallo $[a,x]$, con $x\in]a,b]$ fissato, si trova

$$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)=0$$

cioè $f(x)=f(a)$ per ogni $x\in]a,b[$; facendo il limite per $x\to b$, si ottiene $f(x)=f(a)$ per ogni $x\in[a,b]$. □

2. <u>Serie logaritmica</u> Vale la relazione

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x\in]-1,1].$$

<u>dim</u>. La funzione $x\longmapsto \ln(1+x)$ è derivabile in $]1,+\infty[$, con

$$D\ln(1+x)=\frac{1}{1+x}.$$

Inoltre

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \forall x\in]-1,1[.$$

Osservato che

$$(-1)^n x^n = D\,\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1},$$

dal teorema di derivazione per serie otteniamo

$$D \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} = D \ln(1+x) \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Quindi

$$D\left[\ln(1+x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \right] = 0 \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Dall' applicazione 1, segue che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\ln(1+x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = c \quad \forall x \in]-1,1[$$

Calcolando per $x=0$ ricaviamo però

$$0 - 0 = c,$$

quindi $c=0$ e in definitiva

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Tuttavia la serie a destra, per $x>0$, verifica le ipotesi del criterio di Leibniz; in particolare vale la stima del resto:

$$\left| \ln(1+x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}$$

per ogni $x \in [0,1[$ e per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Per $x \to 1^-$ segue

$$\left| \ln 2 - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \leq \frac{1}{N+1} \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

e quindi

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad \forall x \in]-1,1] . \square$$

3. <u>Serie dell'arcotangente</u>. Vale la relazione

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in [-1,1].$$

<u>dim</u>. La funzione $\operatorname{arctg} x$ è derivabile in $\mathbb{R}$, con

$$D \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}.$$

D'altra parte

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad \forall x \in]-1,1[,$$

e si riconosce che

$$(-1)^n x^{2n} = D\, (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Quindi

$$D \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2} = D \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in]-1,1[,$$

grazie al teorema di derivazione per serie. Perciò

$$D\left[\operatorname{arctg} x - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right] = 0 \quad \text{in }]-1,1[.$$

Per l'applicazione 1, si ha

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

Per $x=0$ si ricava però $0 = 0 + c$, da cui $c=0$ e dunque

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Per il criterio di Leibniz e la corrispondente stima del resto, si conclude che vale la tesi. □

4. <u>Serie binomiale</u>. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Introduciamo il <u>coefficiente binomiale generalizzato</u>

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0, \\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} & \text{se } n \geq 1. \end{cases}$$

Si noti che quando $\alpha \in \mathbb{N}$ si ritrova il coefficiente binomiale usuale:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ con } 0 \leq n \leq \alpha.$$

Vale la relazione

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \forall x \in]-1,1[, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Questa formula, per $\alpha \in \mathbb{N}$, si riduce all'usuale formula del binomio: infatti, se $\alpha \in \mathbb{N}$ allora $\binom{\alpha}{n} = 0$ per $n > \alpha$ (non vi sono fattori al numeratore), e quindi la somma è finita.

<u>Dim</u> Osserviamo anzitutto che

$$\alpha \binom{\alpha}{k} = (k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k}.$$

Infatti,

$$(k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} = (k+1)\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{(k+1)!} + k\,\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}\left[\alpha-k+k\right] = \alpha\binom{\alpha}{k}.$$

Ciò premesso, sia $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, e osserviamo che questa serie ha raggio di convergenza 1, come è immediato verificare. Risulta per ogni $x \in]-1,1[$

$$(1+x)\, g'(x) = (1+x)\, D \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \binom{\alpha}{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k =$$

$$= \alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} \right] x^k =$$

$$= \alpha + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha\, g(x).$$

Perciò

$$D\left[g(x)\, (1+x)^{-\alpha} \right] = g'(x)\, (1+x)^{-\alpha} - g(x)\, \alpha\, (1+x)^{-\alpha-1} =$$

$$= (1+x)^{-\alpha-1} \left[g'(x)(1+x) - \alpha\, g(x) \right] = 0 \quad \forall x \in]-1,1[,$$

e dunque

$$g(x) = c\,(1+x)^{\alpha}.$$

Per $x=0$ segue $g(0)=1$ da cui $1=c$. Perciò

$$g(x) = (1+x)^{\alpha} \quad \forall x \in]-1,1[.$$

Infine si può dimostrare che la formula vale in $[-1,1]$ quando $\alpha \geq 0$, mentre vale in $]-1,1]$ quando $-1 < \alpha < 0$. $\square$

Esercizi

- Provare che l'equazione

$$x^{2m}+ax+b=0 \qquad (m\in\mathbb{N}^+)$$

ha, per ogni $a,b\in\mathbb{R}$, al più due soluzioni reali.

[Infatti, se il polinomio $P(x)=x^{2m}+ax+b$ avesse tre radici reali $x_1<x_2<x_3$, per il teorema di Rolle applicato a $[x_1,x_2]$ e $[x_2,x_3]$, il polinomio $P'(x)=2m\,x^{2m-1}+a$ avrebbe due radici, una in $]x_1,x_2[$ e una in $]x_2,x_3[$. Tuttavia $P'(x)$ si annulla in un solo punto, che è $x=\left(-\frac{a}{2m}\right)^{\frac{1}{2m-1}}$. Ciò è assurdo.]

- Provare che l'equazione

$$x^{2m+1}+ax+b=0 \qquad (m\in\mathbb{N}^+)$$

ha al più 3 soluzioni reali per $a,b\in\mathbb{R}$, ed al più una soluzione reale per $a>0$, $b\in\mathbb{R}$.

[Le radici di $P'(x)=(2m+1)\,x^{2m}+a$ sono al più 2, se $a<0$, e cioè $x=\pm\left(\frac{-a}{2m+1}\right)^{\frac{1}{2m}}$, mentre non esistono se $a>0$ (e ce n'è una sola, $x=0$, quando $a=0$). Perciò $P(x)=x^{2m+1}+ax+b$ ha al più 3 radici reali, ne ha al più 2 se $a=0$ e ne ha al più una se $a>0$.]