Proprietà delle funzioni continue

1. Permanenza del segno: se $f: A \to \mathbb{R}$ è continua, se $\underline{x}_0 \in A \subseteq \mathbb{R}^N$, e se $f(\underline{x}_0) > 0$, allora esiste $B(\underline{x}_0, \delta) \subseteq A$ tale che

$$f(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta).$$

dim. Scelto $0 < \varepsilon < f(\underline{x}_0)$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|\underline{x} - \underline{x}_0|_N < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon, \text{ quindi}$$

$$f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0) - |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| > f(\underline{x}_0) - \varepsilon > 0. \square$$

2. Teorema di Weierstrass. Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ limitato e chiuso (compatto), sia $f: A \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono $\underline{x}_0, \underline{x}_1 \in A$ tali che

$$f(\underline{x}_0) = \max_A f, \qquad f(\underline{x}_1) = \min_A f, \qquad \text{ossia } f(\underline{x}_1) \leq f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0) \quad \forall \underline{x} \in A.$$

dim. Sia $L = \sup_A f$. A priori, $-\infty < L \leq +\infty$. Esiste comunque una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq f(A)$ tale che $y_n \to L$.

Sia $\underline{x}_n \in A$ tale che $f(\underline{x}_n) = y_n$. La successione $\{\underline{x}_n\} \subseteq A$, per il teo. di Bolzano-Weierstrass, ha una sottosuccessione $\{\underline{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a un punto $\underline{x}^* \in A$. Per continuità

$$y_{n_k} = f(\underline{x}_{n_k}) \longrightarrow f(\underline{x}^*),$$

ma $y_{n_k} \to L$, quindi $L = f(\underline{x}^*) \in \mathbb{R}$ cioè $L = \max_A f$. Idem per $\inf_A f$.

3. Esistenza degli zeri. Sia $f: B(\underline{x}_0,R)\subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua.
Se esistono $\underline{x},\underline{y}\in B(\underline{x}_0,R)$ tali che $f(\underline{x})<0<f(\underline{y})$, allora esiste $\underline{z}\in B(\underline{x}_0,R)$ tale che $f(\underline{z})=0$.

dim. Considero

$$g(t)=f((1-t)\underline{x}+t\underline{y}),\quad t\in[0,1].$$

g è continua perché composizione di funzioni continue e si ha

$$g(0)=f(\underline{x})<0,\quad g(1)=f(\underline{y})>0.$$

Divido $I_0=[0,1]$ in parti uguali: se $g(\frac{1}{2})=0$ ho finito ($\underline{z}=\frac{\underline{x}+\underline{y}}{2}$, $f(\underline{z})=0$)
se $g(\frac{1}{2})\neq 0$ definisco $I_1=[0,\frac{1}{2}]$ se $g(\frac{1}{2})>0$, $I_1=[\frac{1}{2},1]$ se $g(\frac{1}{2})<0$.
Posso scrivere $I_1=[a_1,b_1]$, con $0\le a_1<b_1\le 1$; $g(a_1)<0<g(b_1)$, $b_1-a_1=\frac{1}{2}$. Ripeto il procedimento prendendo $\frac{a_1+b_1}{2}$; se $g(\frac{a_1+b_1}{2})=0$ ho finito, altrimenti costruisco $I_2=[a_2,b_2]$ con $a_1\le a_2<b_2\le b_1$, $g(a_2)<0<g(b_2)$, $b_2-a_2=\frac{1}{4}$. Ripeto per ogni n, ottenendo $I_n\subset I_{n-1}$, con $a_{n-1}\le a_n<b_n\le b_{n-1}$, $g(a_n)<0<g(b_n)$, e $b_n-a_n=2^{-n}$.
Se non accade mai che $g(\frac{a_n+b_n}{2})=0$, ho una successione infinita di intervalli I_n. Noto allora che $\{a_n\}\nearrow$, $\{b_n\}\searrow$, $0\le a_n\le b_n\le 1$.
Dunque $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n=:a$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n=:b$, e $0\le a\le b\le 1$. Ma b_n-a_n è infinitesima, dunque $a=b$. Poiché g è continua, $g(a)=g(b)$ con
$g(a)=\lim g(a_n)\le 0$, $g(b)=\lim g(b_n)\ge 0$; e so $g(a)=0=f((1-a)x+a$

<u>Corollario</u>: <u>esistenza dei valori intermedi</u> Sia $f: B(\underline{x}_0, R) \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continua. Allora f assume tutti i valori compresi fra $\inf_{B(\underline{x}_0,R)} f$ e $\sup_{B(\underline{x}_0,R)} f$.

<u>dim</u>. Sia $\lambda \in \left] \inf_{B(\underline{x}_0,R)} f, \sup_{B(\underline{x}_0,R)} f \right[$. Cerco $\underline{x}^* \in B(\underline{x}_0, R)$ tale che $f(\underline{x}^*) = \lambda$. Noto che, per le proprietà di inf e sup, esistono $\underline{z}, \underline{y} \in B(\underline{x}_0, R)$ tali che

$$\inf_{B(\underline{x}_0,R)} f < f(\underline{z}) < \lambda, \quad \lambda < f(\underline{y}) < \sup_{B(\underline{x}_0,R)} f ;$$

dunque

$$f(\underline{z}) < \lambda < f(\underline{y}) .$$

Considero la funzione $g(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \lambda$; si ha

$$g(\underline{z}) < 0 < g(\underline{y}) .$$

Per il teo precedente, esiste $\underline{x}^* \in B(\underline{x}_0, R)$ tale che $g(\underline{x}^*) = 0$. Perciò $f(\underline{x}^*) = \lambda$. $\square$