Lo spazio $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$

In $\mathbb{R}^N$ c'è un prodotto scalare

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_N = \sum_{j=1}^{N} x_j y_j \qquad (\underline{x} = (x_1 \cdots x_N)\,,\ \underline{y} = (y_1 \cdots y_N))$$

che verifica, per ogni $\underline{x}, \underline{x}', \underline{y} \in \mathbb{R}^N$,

$$\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_N \geq 0\,; \quad \langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_N = 0 \Longleftrightarrow \underline{x} = \underline{0}\,;$$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_N = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle_N\,;$$

$$\langle \lambda \underline{x} + \mu \underline{x}', \underline{y} \rangle_N = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_N + \mu \langle \underline{x}', \underline{y} \rangle_N \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Poi c'è la norma euclidea

$$|\underline{x}|_N = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle_N}\,,$$

che verifica, per ogni $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathbb{R}^N$,

$$|\underline{x}|_N \geq 0\,; \quad |\underline{x}|_N = 0 \Longleftrightarrow \underline{x} = \underline{0}\,;$$

$$|\lambda \underline{x}|_N = |\lambda|\, |\underline{x}|_N \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\,;$$

$$|\underline{x} + \underline{x}'|_N \leq |\underline{x}|_N + |\underline{x}'|_N$$

e di conseguenza

$$\big|\, |\underline{x}|_N - |\underline{x}'|_N \big| \leq |\underline{x} - \underline{x}'|_N\,.$$

Tramite la norma si definisce la distanza in $\mathbb{R}^N$:

$$d(\underline{x}, \underline{x}') = |\underline{x} - \underline{x}'|_N\,;$$

essa verifica, per ogni $\underline{x}, \underline{x}', \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^N$,

$d(\underline{x},\underline{x}')\geq 0$, $\quad d(\underline{x},\underline{x}')=0 \iff \underline{x}=\underline{x}'$,

$$d(\underline{x},\underline{x}')=d(\underline{x}',\underline{x})$$

$$d(\underline{x},\underline{z})\leq d(\underline{x},\underline{y})+d(\underline{y},\underline{z}).$$

Definizione La palla di centro $\underline{x}\in\mathbb{R}^N$ e raggio $r>0$ è l'insieme

$$B(\underline{x}_0,r)=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^N:\ |\underline{x}-\underline{x}_0|_N<r\}.$$

Definizione Sia $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^N$. Un intorno di $\underline{x}_0$ è un insieme U tale che $\exists r>0$ per cui $B(\underline{x}_0,r)\subseteq U$.

Definizione Sia $E\subseteq\mathbb{R}^N$ non vuoto. Un punto d'accumulazione per E è un punto $\underline{x}_0\in\mathbb{R}^N$ tale che

$$B(\underline{x}_0,r)\cap[E\setminus\{\underline{x}_0\}]\neq\emptyset\quad\forall r>0,$$

ossia tale che esistono infiniti punti di E, diversi da $\underline{x}_0$, vicini a $\underline{x}_0$ per meno di r.

Esempio. Se $E=B(\underline{x}_0,r)$, allora: (i) E è intorno di ogni suo punto; (ii) $\underline{x}$ è punto di accumulazione per $E \iff |\underline{x}-\underline{x}_0|_N\leq r$ (cioè $\underline{x}\in\overline{B(\underline{x}_0,r)}$), ossia $\underline{x}$ sta nella palla chiusa di centro $\underline{x}_0$ e raggio r.

Sia $E\subseteq\mathbb{R}^N$ e sia $\underline{x}_0\in E$. Allora i casi sono due (mutuamente esclusivi): $\underline{x}_0$ è punto d'accumulazione per E, oppure $\underline{x}_0$ è punto isolato di E, cioè $\exists r_0>0$ tale che $B(\underline{x}_0,r_0)\cap E=\{\underline{x}_0\}$.

Esempio: se $E=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^+\}$, allora 0 è punto d'accumulazione per E.

mentre ogni $\frac{1}{n}$ è punto isolato di E.

<u>Definizione</u> $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è <u>aperto</u> se è intorno di ogni suo punto.

<u>Esempi</u>: sono aperti in $\mathbb{R}^N$: $\mathbb{R}^N$; ϕ; $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$;
$\mathbb{R}^N \setminus \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle_N = 0\}$; $B(\underline{x}_0, r)$, $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B(x_0, r)}$.

<u>Definizione</u> $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è <u>chiuso</u> se contiene tutti i suoi punti d'accumulazione

<u>Osservazione</u> E è chiuso $\Longleftrightarrow$ $E^c := \mathbb{R}^N \setminus E$ è aperto.

<u>dim.</u> ($\Rightarrow$) supponiamo E chiuso; sia $\underline{x}_0 \in E^c$: allora $\underline{x}_0$ non è punto di accumulazione per E, quindi esiste $r > 0$ tale che

$$B(\underline{x}_0, r) \cap [E \setminus \{x_0\}] = \phi.$$

Quindi

$$B(x_0, r) \cap E = \phi \quad (\text{dato che } x_0 \in E^c).$$

Dunque $B(x_0, r) \subseteq E^c$, da cui E^c è aperto.

($\Leftarrow$) Sia E^c aperto. Sia x_0 un punto d'accumulazione per E: dunque $\forall r > 0$ si ha $B(\underline{x}_0, r) \cap (E \setminus \{\underline{x}_0\}) \neq \phi$.

Ne segue $B(x_0, r) \not\subseteq E^c$ per ogni $r > 0$. Poiché E^c è aperto si conclude che $x_0 \notin E^c$, cioè $x_0 \in E$. Perciò E è chiuso. $\square$

<u>Proposizione</u> E è chiuso $\Longleftrightarrow$ per ogni successione $\{\underline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$, che converge a $\underline{x}_* \in \mathbb{R}^N$, si ha $\underline{x}_* \in E$.

(Una successione $\{\underline{x}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ converge a $\underline{x}_*$ se $\lim_{n \to \infty} |\underline{x}_n - \underline{x}_*|_N = 0$.)

dim ($\Rightarrow$) Sia E chiuso e sia $\{\underline{x}_n\} \subseteq E$ tale che $\underline{x}_n \to \underline{x}^*$.
Se $\underline{x}_n = \underline{x}^*$ per infiniti indici, allora $\underline{x}^* \in E$.
Altrimenti sarà $\underline{x}_n \in E \setminus \{\underline{x}^*\}$ definitivamente; quindi, per ogni $r>0$ si ha definitivamente $\underline{x}_n \in B(\underline{x}^*, r) \cap [E \setminus \{\underline{x}^*\}]$.
Dunque $\underline{x}^*$ è punto d'accumulazione per E, e quindi appartiene a E poichè E è chiuso.

($\Leftarrow$) Se $\underline{x}^*$ è punto d'accumulazione per E, allora per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha $B(\underline{x}^*, \frac{1}{n}) \cap [E \setminus \{\underline{x}^*\}] \neq \phi$, quindi esiste $\underline{x}_n \neq \underline{x}^*$, $\underline{x}_n \in B(\underline{x}^*, \frac{1}{n}) \cap E$; così si trova $\{\underline{x}_n\} \subseteq E$, tale che $\underline{x}_n \to \underline{x}^*$. Dall'ipotesi segue che $\underline{x}^* \in E$. Perciò E è chiuso.

Esempi Sono chiusi in $\mathbb{R}^N$: $\mathbb{R}^N$, ϕ, $[0,1]^N$, $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : x_N \geq 0\}$, $\overline{B(\underline{x}_0, r)}$, $\mathbb{R}^N \setminus B(\underline{x}_0, r)$, $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, $\{\underline{0}\} \cup \{(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^N : n \in \mathbb{N}^+\}$.

Teorema (di Bolzano-Weierstrass). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e infinito. Allora ogni successione contenuta in E ha una sottosuccessione convergente; in particolare, E ha almeno un punto d'accumulazione.

Cosa significa sottosuccessione? Data una successione $\{\underline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, si fissa una qualunque successione crescente di numeri naturali: $0 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} \dots$; la successione $\{\underline{x}_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ si dice sottosuccessione di $\{\underline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, o sottosuccessione estratta da $\{\underline{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempi: $\{\frac{1}{n^2}\}$ è estratta da $\{\frac{1}{n}\}$, $\{\sin 2^n x\}$ è estratta da $\{\sin nx\}$, $\{x^{n!}\}$ è estratta da $\{x^n\}$.