La serie esponenziale.

Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z\in\mathbb{C}$ (converge assolutamente per il criterio del rapporto)

Teo. Per ogni $z=x+iy\in\mathbb{C}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x[\cos y + i\sin y]$$

e, in particolare,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \forall x\in\mathbb{R}; \qquad \cos y = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m y^{2m}}{(2m)!}, \quad \sin y = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m y^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

dim. Fissato $z=x+iy\in\mathbb{C}$, possiamo scrivere

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}+i\frac{y}{n}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+i\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+i\frac{y}{n+x}\right)^n.$$

Il 1° fattore tende, come sappiamo, a e^x. Calcoliamo il limite del secondo fattore. Poniamo

$$c_n = 1+i\frac{y}{n+x} = |c_n|\left[\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n\right],$$

ove $\alpha_n\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, dato che $\operatorname{Re} c_n>0$. Per la formula di De Moivre,

$$\left(1+i\frac{y}{x+n}\right)^n = c_n^n = |c_n|^n\left[\cos n\alpha_n + i\sin n\alpha_n\right].$$

D'altra parte, se n è abbastanza grande, tanto da avere $n+x>\frac{n}{2}$, si ha

$$1<|c_n|^n = \left(1+\frac{y^2}{(n+x)^2}\right)^{\frac{n}{2}} \le \left(1+\frac{y^2}{(n/2)^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\left(1+\frac{4y^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{4}}\right]^{\frac{2}{n}} < \left[e^{4y^2}\right]^{2/n}$$

e per il teorema dei carabinieri $|c_n|^n \longrightarrow 1$

Poi,

$$|c_n| \cos\alpha_n = 1, \qquad |c_n| \sin\alpha_n = \frac{y}{n+x},$$

dunque

$$|\alpha_n| < |\mathrm{tg}\,\alpha_n| = \frac{|y|}{n+x} \to 0$$

per cui

$$\sin\alpha_n \to 0, \quad \cos\alpha_n \to 1,$$

$$\frac{\alpha_n}{\mathrm{tg}\,\alpha_n} = \frac{\alpha_n}{\sin\alpha_n} \cos\alpha_n \to 1$$

e dunque

$$n a_n = n\,\mathrm{tg}\,\alpha_n \cdot \frac{\alpha_n}{\mathrm{tg}\,\alpha_n} = \frac{ny}{n+x} \cdot \frac{\alpha_n}{\mathrm{tg}\,\alpha_n} \to y,$$

da cui

$$\cos n a_n \to \cos y, \quad \sin n a_n \to \sin y$$

e infine

$$\left(1 + \frac{iy}{n+x}\right)^n = c_n^n = |c_n|^n \left[\cos n\alpha_n + i \sin n\alpha_n\right] \to \cos y + i \sin y,$$

ossia

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x (\cos y + i \sin y),$$

che è metà della tesi.

Proviamo ora che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Fissato $m \in \mathbb{N}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} = \frac{1}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Dunque

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k}.$$

D'altra parte, per la formula del binomio,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} =$$

$$= \left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} .$$

Allora se $n > m$ si ha

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} \frac{|z|^k}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|z|^k}{k!} .$$

Se $n \to +\infty$, il 1° membro tende a

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} - e^x(\cos y + i \sin y) \right| ;$$

l'ultimo membro tende a

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

Dunque

$$\left| \sum_{k=0}^{m} \frac{z^k}{k!} - e^x(\cos y + i \sin y) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} \qquad \forall m \in \mathbb{N} .$$

Se ora $m \to \infty$, l'ultimo membro è il resto $(m+1)$-simo di una serie convergente, quindi tende a 0. Ne segue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^x (\cos y + i \sin y) . \qquad \square$$

Conseguenza: possiamo definire l'esponenziale complessa e^z, mediante

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Dunque

$$e^{iy} = (\cos y + i \sin y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \text{(l'esponenziale è periodica di periodo } 2\pi i)$$

$$e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

(infatti, se $z = x+iy$ e $w = u+iv$,

$$e^{z+w} = e^{x+u}[\cos(y+v) + i \sin(y+v)] =$$

$$= e^x e^u [\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)] =$$

$$= e^x[\cos y + i \sin y]\, e^u[\cos v + i \sin v] = e^z e^w)$$

e similmente possiamo definire $\sin z$ e $\cos z$, $z \in \mathbb{C}$, e varrà ancora $\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (ma questo è più difficile da dimostrare).

In particolare, se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$,

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$,
- $\cos y = \operatorname{Re} e^{iy} = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] =$
  $= \operatorname{Re}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!}$,
- $\sin y = \operatorname{Im} e^{iy} = \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Serie di potenze

Abbiamo visto il "prototipo" $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. Un altro prototipo è $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $z \in \mathbb{C}$: poichè, come sappiamo, per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \begin{cases} \frac{1-z^{N+1}}{1-z} & \text{se } z \neq 1 \\ N+1 & \text{se } z = 1 \end{cases},$$

vediamo che per $|z|<1$ si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Consideriamo, più generalmente, <u>serie di potenze</u> della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad \text{con } \{a_n\} \subseteq \mathbb{C}, \ z \in \mathbb{C}.$$

<u>Osservazione</u>: c'è una ambiguità! se $z=0$, che significa il primo addendo $a_0 0^0$? Nulla. Ma qui <u>si sottintende</u> che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

e dunque <u>si conviene</u> che "$a_0 0^0$" significhi "a_0".

Come è fatto l'<u>insieme di convergenza</u>

$$K = \{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ è convergente} \} \ ?$$

Vediamo.

<u>Proposizione</u> Sia data una serie di potenze $\sum a_n z^n$. Se un numero $z_0 \in \mathbb{C}$ è tale che $\exists M > 0$ per cui

$$|a_n z_0^n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora la serie è assolutamente convergente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z| < |z_0|$.

<u>dim</u>. Per confronto: $|a_n z^n| = |a_n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n |z_0|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e poiché $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, la serie $\sum |a_n z^n|$ converge. □

<u>Definizione</u> Il <u>raggio di convergenza</u> di una serie di potenze $\sum a_n z^n$ è definito come

$$R = \sup\{|z| : z \in K\} = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ è convergente}\right\}.$$

Questo appellativo è giustificato dal teorema che segue.
Si noti intanto che può essere $R = 0$, o $R = +\infty$, o $0 < R < \infty$.

<u>Teorema</u> Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza R.
Allora:
(i) Se $R = 0$, la serie converge solo per $z = 0$ (con somma a_0).
(ii) Se $R = +\infty$, la serie converge assolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$.
(iii) se $0 < R < \infty$, la serie: converge assolutamente per $|z| < R$;
non converge per $|z| > R$
non si sa cosa faccia per $|z| = R$.

<u>dim</u>. (i) Sia $R=0$. Per definizione di R, se $z\neq 0$ si ha $|z|>R$ e quindi la serie non può convergere. Se $z=0$, invece, la serie è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$ e quindi converge.

(ii) Sia $R=\infty$. Se $z\in\mathbb{C}$, $|z|$ non è un maggiorante di K, quindi esiste $z_0\in\mathbb{C}$ tale che $|z_0|>|z|$ e $\sum a_n z_0^n$ è convergente. Dunque, $|a_n z_0^n|\to 0$, per cui esiste $M>0$ tale che $|a_n z_0^n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Dalla Proposizione segue che $\sum a_n z^n$ è convergente. Dunque $\sum a_n z^n$ converge $\forall z\in\mathbb{C}$.

iii) Se $|z|>R$ la serie non converge per definizione di R. Se $|z|<R$, come in (ii) $|z|$ non è maggiorante di K, e trovo $z_0\in\mathbb{C}$ con $R\geq|z_0|>|z|$, tale che $\sum a_n z_0^n$ converge. Dunque $\exists M>0$ tale che $|a_n z_0^n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$, con la Proposizione ottengo $\sum a_n z^n$ convergente.

Se $|z|=R$ può succedere di tutto:

- $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ ha $R=1$ e non converge per $|z|=1$ (termine generale $\not\to 0$),
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ha $R=1$ e converge assolutamente per $|z|=1$,
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ha $R=1$ e converge per $z=-1$, non converge per $z=1$.

(si potrebbe dire cosa succede negli altri punti con $|z|=1$, ma è più difficile).

<u>Come determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze?</u>

<u>Proposizione</u> Sia $\sum a_n z^n$ una serie di potenze, e sia

$$L = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Allora il raggio di convergenza della serie è

$$R = \begin{cases} 0 & \text{se } L = +\infty \\ +\infty & \text{se } L = 0 \\ \frac{1}{L} & \text{se } 0 < L < \infty. \end{cases}$$

<u>dim</u>. Usiamo il criterio della radice per testare la convergenza assoluta.

$$\sqrt[n]{|a_n||z|^n} = |z| \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Se $L = \infty$, e $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha $|z|\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ per infiniti indici n, quindi $|a_n z^n| \not\to 0$ e la serie non converge. Perciò $R = 0$.

Sia $0 \le L < \infty$: se $z \in \mathbb{C}$ e $L|z| < 1$, scelto $\varepsilon > 0$ tale che $|z|(L+\varepsilon) < 1$ si ha

$$|z|\sqrt[n]{|a_n|} \le |z|(L+\varepsilon) < 1 \text{ definitivamente;}$$

quindi $\sum |a_n z^n|$ converge per il criterio della radice. Se invece $L|z| > 1$: scelto $\varepsilon > 0$ tale che $|z|(L-\varepsilon) > 1$, si ha

$$|z|\sqrt[n]{|a_n|} > |z|(L-\varepsilon) > 1 \text{ per infiniti indici,}$$

quindi $|a_n||z^n| \not\to 0$ e la serie non converge. Ciò prova che: se $L > 0$, il raggio di convergenza è $\frac{1}{L}$; se $L = 0$, il raggio di convergenza è $+\infty$

Esempi

- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} z^n$ ha $R=1$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1\right)$

- $\sum_{n=0}^{\infty} b^n z^n$ ha $R = \frac{1}{b}$ e somma $\frac{1}{1-bz}$ per $|z| < R$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ ha $R=0$ e somma 1 per $z=0$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ha $R=\infty$ e somma e^z.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$ ha $R = \frac{1}{e}$ perché $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$.

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, con $\begin{cases} a_{2m} = 2^m \\ a_{2m+1} = 3^m \end{cases}$, ha $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$ perché $\max\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$

[infatti $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[2m]{2^m} \to \sqrt{2} & \text{se } n \text{ pari} \\ \sqrt[2m+1]{3^m} \to \sqrt{3} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$]

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n^2+2)\,2^n}$,
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{3^n}\,\frac{n+1}{n+2}$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha + a^n}$ $\quad(\alpha, a > 0)$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z-1)^n}{3^n+1}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$

(trovare il raggio di convergenza e, per $z \in \mathbb{R}$, vedere che succede quando $z = \pm R$.)